

В случае изотропного полупроводника при малых отклонениях от равновесия термодинамические потоки $\bar{J}_{(Q)}$, $\bar{j}_{(\alpha)}$ ($\alpha = n, p$), Γ и термодинамические силы $\bar{X}_{(Q)}$, $\bar{X}_{(\alpha)}$ ($\alpha = n, p$), X_{Γ} связаны линейными соотношениями

$$\begin{aligned}\bar{J}_{(Q)} &= L_{(QQ)}\bar{X}_{(Q)} + \sum_{\beta=n,p} L_{(Q\beta)}\bar{X}_{(\beta)}, \\ \bar{j}_{(\alpha)} &= \sum_{\beta=n,p} L_{(\alpha\beta)}\bar{X}_{(\beta)} + L_{(\alpha Q)}\bar{X}_{(Q)} \quad (\alpha = n, p), \\ \Gamma &= L_{\Gamma}X_{\Gamma},\end{aligned}\tag{15}$$

где $L_{(QQ)}$, $L_{(Q\alpha)}$, $L_{(\alpha\beta)}$, $L_{(\alpha Q)}$ ($\alpha, \beta = n, p$), L_{Γ} — кинетические коэффициенты.

Отметим, что при соответствующих предположениях соотношения (15) следуют непосредственно из системы уравнений динамической модели.

Уравнения (6), (7), (10), (15) вместе с уравнениями совместности деформаций и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля составляют замкнутую систему уравнений, которая может быть использована для описания во взаимосвязи процессов деформации, теплопроводности, электропроводности, а также генерации и рекомбинации свободных электронов и дырок в полупроводниковых телах с собственной проводимостью.

1. Бурак Я. Я., Галапац Б. П., Гнидець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах.— К.: Наук. думка, 1978.— 230 с.
2. Бурак Я. Я., Чекурин В. Ф. Термодинамическая модель собственного полупроводника.— В кн.: IX Совещ. по теории полупроводников (Тбилиси, 24—26 окт. 1978 г.): Тез. докл. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1978, с. 77—78.
3. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Об одной модели многофазной среды.— Докл. АН СССР, 1977, 286, № 5, с. 1098—1101.
4. Гроот С. де, Мазур П. Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1964.— 456 с.
5. Нигматулин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей.— ПММ, 1970, 34, № 6, 1097—1112.
6. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидець Б. М. Исходные уравнения теории деформации электропроводных твердых растворов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 22—29.
7. Чекурин В. Ф. Уравнения состояния для трехконтинуумной модели собственного полупроводника.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 67—71.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию
19.11.79

УДК 539.3 : 538.6

В. Ф. Кондрат, Т. С. Нагирный

МАГНИТОВЯЗКОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Закономерности распространения синусоидальных волн в линейных упруго-вязких средах, описываемых различными реологическими моделями, изучены в работе [2]. В работе [8] исследовано распространение волны второй гармоники в нелинейной упруговязкой среде. В работе [10] изучены линейные магнитовязкоупругие волны в электропроводном полупространстве при внезапном силовом воздействии на его поверхность. В настоящей работе исследовано влияние постоянного магнитного поля на параметры волн первой и второй гармоник в электропроводном вязкоупругом полупространстве при гармоническом силовом воздействии на его поверхность в пределах модели нелинейной магнитовязкоупругой среды. Аналогичная задача для магнитоупругого полупространства рассмотрена в работе [1].

Рассмотрим электропроводное неферромагнитное вязкоупругое полупространство $x > 0$, помещенное в тангенциальное к его поверхности постоянное магнитное поле индукции $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$. На поверхности

полупространства задана нормальная к ней равномерно распределенная гармоническая во времени силовая нагрузка $\vec{F} = (F_0 e^{i\omega t}, 0, 0)$, где ω — циклическая частота. Полупространство граничит со средой, которую в отношении электромагнитных свойств примем в приближении вакуума.

При решении поставленной задачи исходим из системы уравнений [5], которая в пренебрежении геометрической нелинейностью, токами смещения в области тела, тепловыми эффектами и приведенная к безразмерной комплексной форме запишется в виде:

для области $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^t R(t-t') \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t'} dt' - s^2 \frac{\partial b}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{4} \Phi_0 \beta_2 \left\{ (1-i) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^2 \right] + 2(1+i) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right\}, \\ \xi^2 \frac{\partial b}{\partial t} &= \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - \xi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{4} \Phi_0 \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-i) \left(b \frac{\partial u}{\partial t} + b^* \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1+i) \left(b^* \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) \right], \\ E &= \frac{\partial b}{\partial x} - \xi^2 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4} \Phi_0 \xi^2 \left[(1-i) \left(b \frac{\partial u}{\partial t} + b^* \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1+i) \left(b^* \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) \right]; \end{aligned} \quad (1)$$

для области $x < 0$

$$\frac{\partial E_0}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial b_0}{\partial t}, \quad \chi^2 \frac{\partial b_0}{\partial x} + \frac{\partial E_0}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u &= \frac{\Omega}{\Phi_0} \mathbf{u}; \quad b, b_0 = (\Phi_0 B_0)^{-1} \mathbf{b}, \mathbf{b}_0; \quad E, E_0 = \frac{\sigma \mu}{B_0 \Phi_0 \Omega} \mathbf{E}, \mathbf{E}_0; \\ x &= \Omega \mathbf{x}; \quad t = \omega t; \quad \Omega = \frac{\omega}{c_1}; \quad \Phi_0 = \frac{F_0}{\rho c_1^2}; \\ s^2 &= \frac{B_0^2}{\rho \mu c_1^2}; \quad \xi^2 = \frac{\omega \sigma \mu}{\Omega^2}; \quad \chi = \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)^{1/2}; \end{aligned} \quad (3)$$

$\vec{u} = (u, 0, 0)$ — вектор перемещения; $\beta = c_1/c_2$; c_1, c_2 — скорости распространения продольной и поперечной упругих волн; ρ — плотность среды; σ — коэффициент электропроводности; $\beta_2 = \frac{1}{\rho c_1^2} (A + 2B + C)$; A, B, C —

модули третьего порядка Ландау; $\vec{b} = (0, 0, b)$ и $\vec{b}_0 = (0, 0, b_0)$ — возмущения векторов индукции магнитного, а $\vec{E} = (0, E, 0)$ и $\vec{E}_0 = (0, E_0, 0)$ — электрического полей в теле и вакууме соответственно; μ — магнитная проницаемость среды; μ_0 и ϵ_0 — магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума; x, t — координата и время; звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины.

Параметр Φ_0 характеризует влияние нелинейных слагаемых на решение системы уравнений (1), (2). Для рассматриваемого здесь случая деформирования вдали от области пластического течения $\Phi_0 \ll 1$.

В уравнении движения (1) мы пренебрегли нелинейными слагаемыми вида $\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t R_1(t-t'; t-t'') \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t'} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t''} dt' dt''$ и $s^2 b^2$, поскольку ввиду малости диссипативных эффектов и условия $s^2 \ll 1$ для практически достижимых

полей [4] их учет эквивалентный учету членов степени малости более высокой чем Φ_0 .

Учитывая, что для неферромагнитного тела $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, $\mu \approx \mu_0$ [6], условия на поверхности $x = 0$ тела для функций u , b , E , b_0 , E_0 принимаем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \int_{-\infty}^t R(t-t') \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t'} dt' + \frac{1}{8} \Phi_0 \beta_2 \left\{ (1-i) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^2 \right] + 2(1+i) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right\} = e^{it}, \quad b = b_0, \quad E = E_0. \quad (4)$$

К этим соотношениям необходимо присоединить начальные условия, условия ограниченности параметров электромагнитного поля и деформации на бесконечности в полупространстве, а также условия излучения для электромагнитного поля в вакууме.

Ядро релаксации $R(t-t')$ в уравнениях (1), (4) в дальнейшем примем в виде

$$R(t-t') = \varepsilon_1 e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} + \varepsilon_2 e^{-\frac{t-t'}{\tau_2}}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{4}{3} \beta^2 \Delta_0^{(1)}$; $\varepsilon_2 = \left(1 - \frac{4}{3} \beta^2\right) \Delta_0^{(2)}$; $\Delta_0^{(1)}$ и $\Delta_0^{(2)}$ — наибольшие величины дефектов модулей сдвига и объемного сжатия для вязкоупругой среды; $\tau_1 = \omega \tau_1$, $\tau_2 = \omega \tau_2$; τ_1 , τ_2 — времена релаксации сдвиговых и объемных напряжений соответственно.

При решении системы уравнений (1), (2) использована методика работы [7], базирующаяся на разделении решения с помощью операции осреднения на колебательную и медленно изменяющуюся во времени (медленную) составляющие и методе асимптотического разложения по малому параметру Φ_0 . Тогда в нулевом приближении по малому параметру Φ_0 получаем систему линеаризованных уравнений магнитоупругости, которая описывает магнитоупругие волны частоты внешней нагрузки (волны первой гармоники). В первом приближении решение уравнений (1), (2), кроме волн первой гармоники, также описывает магнитоупругие волны удвоенной частоты (волны второй гармоники) и медленные составляющие процессов.

При решении задачи волновые процессы принимались установившимися. Если пренебречь медленными процессами, то в первом приближении для функции перемещения и индукции возмущения магнитного поля в теле получим следующие выражения:

$$f_j(x, t) = f_j^{(1)}(x, t) + \Phi_0 f_j^{(2)}(x, t), \quad f_j^{(1)}(x, t) = \sum_{m=1}^2 f_{jm}^{(1)} e^{-i(k_m x - t)}, \quad (6)$$

$$f_j^{(2)}(x, t) = 2(1-i) \sum_{n=1}^5 \operatorname{Re} [f_{jn}^{(2)} e^{-i(p_n x - 2t)}], \quad j = 1, 2,$$

$$f_1(x, t) = u(x, t), \quad f_2(x, t) = b(x, t),$$

$$k_1 = 1 - \frac{1}{2} \frac{is^2 \xi^2}{1 + i\xi^2} - \frac{1}{2} \frac{i\varepsilon_1 \tau_1}{1 + i\tau_1} - \frac{1}{2} \frac{i\varepsilon_2 \tau_2}{1 + i\tau_2},$$

$$k_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \xi \left(1 - \frac{1}{2} \frac{is^2 \xi^2}{1 + i\xi^2} \right),$$

$$p_1 = 2k_1, \quad p_2 = k_1 + k_2, \quad p_3 = 2k_2, \quad (7)$$

$$p_4 = 2 - \frac{is^2 \xi^2}{2 + i\xi^2} - \frac{2i\varepsilon_1 \tau_1}{1 + 2i\tau_1} - \frac{2i\varepsilon_2 \tau_2}{1 + 2i\tau_2},$$

$$p_5 = (1-i) \xi \left(1 - \frac{1}{2} \frac{is^2 \xi^2}{2 + i\xi^2} \right).$$

Коэффициенты $f_{j,m}^{(r)}$, $f_{j,n}^{(r)}$ ($j, r, m = 1, 2$; $n = \overline{1, 5}$) определяются из условий (4).

Волновые числа k_1, k_2, p_4, p_5 записаны с учетом малости параметров $s^2, \epsilon_1, \epsilon_2$ по сравнению с единицей. Из формул (6), (7) видно, что в принятом приближении волновой процесс в полупространстве представлен двумя типами волн первой гармоники, которые назовем модифицированными упругой ($\sim e^{-ik_1x}$) и электромагнитной ($\sim e^{-lk_2x}$), и пятью типами волн второй гармоники, которые назовем модифицированными электромагнитными I и II волнами ($\sim e^{-lp_1x}, \sim e^{-lp_2x}$), модифицированными упругими I и II волнами ($\sim e^{-lp_3x}, \sim e^{-lp_4x}$) и смешанной волной ($\sim e^{-lp_5x}$).

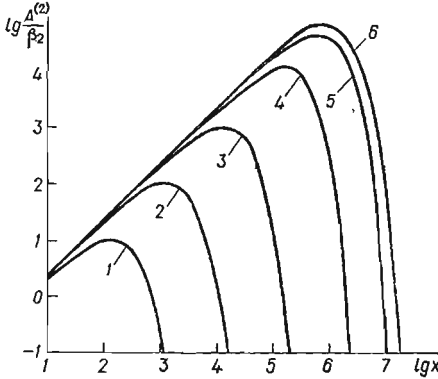


Рис. 1

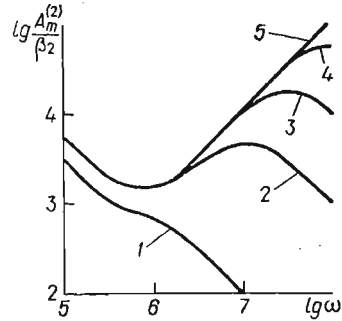


Рис. 2

Анализ полученного решения (6) показывает, что с достаточной для практических расчетов точностью

$$\begin{aligned} u^{(1)} &\approx u_1^{(1)} e^{-i(k_1x-t)}, \\ u^{(2)} &\approx (u_1^{(2)} e^{-lp_1x} + u_4^{(2)} e^{-lp_4x}) e^{2it}, \\ b^{(2)} &\approx (b_1^{(2)} e^{-lp_1x} + b_2^{(2)} e^{-lp_2x} + b_4^{(2)} e^{-lp_4x} + b_5^{(2)} e^{-lp_5x}) e^{2it}. \end{aligned} \quad (8)$$

При выполнении условий

$$\frac{\epsilon_1 \tau_1^2}{1 + \tau_1^2} + \frac{\epsilon_2 \tau_2^2}{1 + \tau_2^2} \gg \frac{s^2 \xi^4}{1 + \xi^4}, \quad \frac{4\epsilon_1 \tau_1^2}{1 + 4\tau_1^2} + \frac{4\epsilon_2 \tau_2^2}{1 + 4\tau_2^2} \gg \frac{s^2 \xi^4}{4 + \xi^4} \quad (9)$$

можно пренебречь влиянием внешнего магнитного поля на дисперсию механических волн первой и второй гармоники. При обратном знаке неравенства (9) дисперсию механических волн определяет внешнее магнитное поле.

Если дисперсией упругих волн пренебречь (в принятой модели, как показывают численные исследования, она обычно мала, т. е. относительное изменение фазовой скорости волны меньше 1%), то при выполнении условий

$$\frac{\epsilon_1 \tau_1}{1 + \tau_1^2} + \frac{\epsilon_2 \tau_2}{1 + \tau_2^2} \gg \frac{s^2 \xi^2}{1 + \xi^4}, \quad \frac{\epsilon_1 \tau_1}{1 + 4\tau_1^2} + \frac{\epsilon_2 \tau_2}{1 + 4\tau_2^2} \gg \frac{s^2 \xi^2}{4 + \xi^4} \quad (10)$$

механические волны можно определять в приближении вязкоупругости. При обратном знаке неравенства (10) поставленную задачу можно решать в приближении магнитоупругости.

Исследование волны перемещения второй гармоники показало, что амплитуда достигает максимального значения на глубине

$$x = x_m = \frac{\ln(\operatorname{Im} p_4) - \ln(\operatorname{Im} p_1)}{\operatorname{Im}(p_1 - p_4)}. \quad (11)$$

При $s^2 = 0, \tau_1 \ll 1$ формула для определения x_m совпадает с приведенной в работе [3]. При $s^2 > \frac{4 + \xi^4}{4\xi^2} \left(\frac{\tau_1 \epsilon_1}{1 + 4\tau_1^2} + \frac{\tau_2 \epsilon_2}{1 + 4\tau_2^2} \right)$ глубина x_m , на которой амплитуда $A^{(2)}$ волны перемещения второй гармоники достигает максимума,

и величина $A^{(2)} = A_m^{(2)}$ этого максимума практически не зависят от внешнего магнитного поля. При $s^2 < \frac{4 + \xi^4}{4\xi^2} \left(\frac{\varepsilon_1 \tau_1}{1 + 4\tau_1^2} + \frac{\varepsilon_2 \tau_2}{1 + 4\tau_2^2} \right)$ большему значению интенсивности внешнего магнитного поля соответствуют меньшие значения x_m и $A_m^{(2)}$. Это иллюстрируется рис. 1, на котором показано распределение функции $A_m^{(2)}/\beta_2$ в глубь полупространства из поликристаллического алюминия при $s^2 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 0$ (кривые 1—6 соответственно) для $\rho = 2,7 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $c_1 = 5,1 \cdot 10^8$ м/с, $\beta = \frac{1}{3}$, $\Delta_0^{(1)} = 8 \cdot 10^{-4}$, $\sigma = 5 \times 10^7$ Ом $^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $\tau_1 = 70$, $\xi^2 = 22,6$. Численные расчеты производились в пренебрежении эффектами объемной вязкости в связи с их малостью по сравнению с эффектами, обусловленными сдвиговой вязкостью [9]. При выборе $\Delta_0^{(1)}$ и τ_1 использованы данные, приведенные в этой же работе.

На рис. 2 показана зависимость функции $\lg A_m^{(2)}/\beta_2$ максимальной значения амплитуды волны перемещения второй гармоники от $\lg \omega$ при $s^2 = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 0$ (кривые 1—5 соответственно). Из графиков видно, что влияние внешнего магнитного поля на $A_m^{(2)}$ особенно существенно при высоких частотах. Минимум максимального значения $A_m^{(2)}$ амплитуды волны соответствует значению параметра $\tau_1 = \omega \tau_1 = 1$

1. Бурак Я. И., Кондрат В. Ф. Магнитотермоупругие волны в полубесконечном электропроводном теле.— В кн.: Волны в сплошных средах. Киев : Наук. думка, 1978, с. 85—92.
2. Дэвис Р. М. Волны напряжений в твердых телах.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 102 с.
3. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах.— Успехи физ. наук, 1970, 102, № 4, с. 549—586.
4. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсивные магнитные поля.— М. : Мир, 1972.— 391 с.
5. Нагирный Т. С. Нелинейные уравнения магнитотермовязкоупругости.— В кн.: Материалы V конф. молодых ученых Льв. фил. мат. физики Ин-та математики АН УССР. Секция механики деформируемого твердого тела. Львов, 1978, с. 74—77.
6. Новаку В. Введение в электродинамику.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 303 с.
7. Підстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф. Магнітотермопружні процеси в електропровідних тілах при силовому навантаженні.— Вісн. АН УРСР, № 10, с. 12—21.
8. Полякова А. Л. Нелинейные эффекты в твердых телах.— Физика твердого тела, 1964, 6, № 1, с. 65—70.
9. Постников В. С. Внутреннее трение в металлах.— М. : Металлургиздат, 1974.— 351 с.
10. Селезов И. Т., Селезова Л. В. Волны в магнитогидроупругих средах.— Киев : Наук. думка, 1975.— 163 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
25.05.79

УДК 539.3 : 538.569

А. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецкий

**ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ И НАПРЯЖЕНИЯ
В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ СЛОЕ,
НАХОДЯЩЕМСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ
УСТАНОВИВШЕГОСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

В данной работе определены и исследованы электромагнитные, тепловые поля и напряжения в слое, находящемся в периодическом во времени внешнем электромагнитном поле. При этом влияние поля на процессы деформации и теплопроводности связывается только с выделением тепла, обусловленного трением, возникающем при переориентации диполей в переменном электромагнитном поле, и наличием чисто омической проводимости в диэлектрике, это учитывается введением комплексной диэлектрической проницаемости и ее дисперсией с частотой [2, 4, 9]. В отличие от известных в литературе работ [3] определению температурных полей в диэлектрике [4, 6], в которых