

Зависимость \tilde{k}_1^\pm от параметра ϵ при фиксированной ширине зоны контакта ($\delta = \frac{1}{3}$) приведена на рис. 2. При $\epsilon = 0$ величина \tilde{k}_1^- совпадает с его значением, полученным несколько другим путем в работе [1]. Следует отметить, что существуют единственные значения параметров $a_2 = -a_1$ и $a_0 = a_1/9$, которые не влияют на ширину зоны контакта ($\delta = \frac{1}{3}$), достигаемую с помощью параметра a_1 (рис. 3). При этом величина $\tilde{k}_1^- = 1,01497$ в отличие от случая $a_0 = a_2 = 0$, когда $\tilde{k}_1^- = 1,08866$. Это позволяет сделать вывод о том, что интенсивность напряжений в вершинах контактирующей трещины существенно зависит не только от ширины зоны контакта, но и от характера нагружения, при котором она достигается.

1. Грилицкий Н. Д., Кит Г. С. О напряженном состоянии в окрестности трещины с частично контактирующими берегами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 35—39.
2. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Интегральные уравнения задачи термоупругости для плоскости с криволинейным отверстием и трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 11, с. 997—1001.
3. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Интегральные уравнения стационарных задач теплопроводности для тел с криволинейными разрезами.— Инж.-физ. журн., 1978, 34, № 1, с. 149—150.
4. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Смешанная задача термоупругости для плоскости с криволинейными разрезами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 3, с. 227—230.
5. Разрушение.— М.: Мир, 1975.— Т. 2.— 364 с.
6. Bowie O. L., Freese C. E. A note on the bending of a cracked strip including crack surface interference.— Int. J. Fract., 1976, 12, N 3, p. 457—462.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.12.79

УДК 539.377

И. П. Лаушник

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ТЕРМОИЗОЛИРОВАННЫХ ТРЕЩИН В БЕСКОНЕЧНОМ ТЕЛЕ

Пусть упругое бесконечное тело, ослабленное N плоскими произвольно расположенными термоизолированными эллиптическими трещинами (разрезами) S_n ($n = \bar{1}, N$), находится под действием теплового потока $q(x_1, x_2, x_3)$ и заданных на поверхностях трещин внешних усилий N_{in} (N_{3n} — нормальные, N_{1n} и N_{2n} — касательные внешние усилия). Если выбрать локальные системы координат $O_n x_{1n} x_{2n} x_{3n}$ таким образом, что плоскость $x_{1n} O_n x_{2n}$ совпадает с плоскостью расположения n -й трещины, то задача об определении в теле с трещинами температурного поля и напряжений сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений [1, 4]

$$\Delta_n \iint_{S_n} \frac{\gamma_n(\xi, \eta)}{R_{0n}} d\xi d\eta = q_n(x_{1n}, x_{2n}) + \sum_{k=1}^N \iint_{S_k} \gamma_k(\xi, \eta) S_{kn}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$\Delta_n \iint_{S_n} \frac{\alpha_{in}(\xi, \eta)}{R_{0n}} d\xi d\eta + (-1)^i (1 - \delta_{i3}) \nu \frac{\partial}{\partial x_{(3-i)n}} \iint_{S_n} \left[\alpha_{in}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x_{2n}} - \right. \\ \left. - \alpha_{2n}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x_{1n}} \right] \frac{d\xi d\eta}{R_{0n}} - (1 - \delta_{i3}) \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x_{in}} \iint_{S_n} \frac{\gamma_n(\xi, \eta)}{R_{0n}} d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1-\nu}{G} N_{in}(x_{1n}, x_{2n}) + \sum_{k=1}^N \int_{S_k} \left[\sum_{s=1}^3 \alpha_{sk}(\xi, \eta) \chi_{iskn}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta) + \right. \\ \left. + \alpha_0 \gamma_k \chi_{ikn}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta) \right] d\xi d\eta \quad (n = \overline{1, N}), \quad (x_{1n}, x_{2n}) \in S_n. \quad (1)$$

В формулах (1) штрих возле знака суммы означает, что в ней опущен член с номером $k = n$; $q_n(x_{1n}, x_{2n})$ — нормальная составляющая теплового потока к плоскости расположения n -й трещины в области S_n ; ν, G — соответственно коэффициент Пуассона и модуль сдвига; $\alpha_0 = \alpha_t(1 + \nu)$, где α_t — коэффициент линейного теплового расширения; $\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{2n}^2}$ — двумерный оператор Лапласа; $R_{0n} = [(x_{1n} - \xi)^2 + (x_{2n} - \eta)^2]^{1/2}$ — расстояние между двумя произвольными точками области S_n с координатами (x_{1n}, x_{2n}) и (ξ, η) ;

$$S_{kn}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial x_{3n}} \left[\frac{\partial}{\partial x_{3kn}} \left(\frac{1}{R_{kn}} \right) \right]_{x_{3n}=0}; \\ \chi_{ikn}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta) = \left[x_{3kn} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{jkn}^2} l_{jiz} + \frac{\partial^2}{\partial x_{jkn} \partial x_{(j+1)kn}} l_{jiz}^* \right) \frac{1}{R_{kn}} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial}{\partial x_{3kn}} (l_{1iz} + l_{2iz}) \frac{1}{R_{kn}} + \left(\frac{\partial}{\partial x_{2kn}} l_{2iz}^* + \frac{\partial}{\partial x_{1kn}} l_{3iz}^* \right) \frac{1}{R_{kn}} \right]_{x_{3n}=0}, \quad (2)$$

а все другие обозначения такие, как в работе [4]. Далее предполагаем, что заданные функции q_n, N_{jn} представляются в виде многочленов по переменным x_{1n} и x_{2n} .

Если трещины не пересекаются, а расстояние между их центрами больше $2a_n$, где a_n ($n = \overline{1, N}$) — большие полуоси эллипсов, то ядра системы интегральных уравнений (1) разлагаются в сходящиеся ряды по отрицательным степеням d ($d = \min d_{kn}$):

$$\left. \begin{array}{l} S_{kn}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta) \\ \chi_{iskn}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta) \\ \chi_{ikn}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta) \end{array} \right\} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{d^{p+2}} \left\{ \begin{array}{l} S_{kn}^{(p)}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta), \\ \chi_{iskn}^{(p)}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta), \\ \chi_{ikn}^{(p)}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta). \end{array} \right. \quad (3)$$

Легко убедиться, что функции $S_{kn}^{(p)}, \chi_{iskn}^{(p)}$ и $\chi_{ikn}^{(p)}$ есть многочлены переменных $x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta$. Если представить также γ_n и α_{in} в виде ряда

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_n(x_{1n}, x_{2n}) \\ \alpha_{in}(x_{1n}, x_{2n}) \end{array} \right\} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{d^p} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{np}(x_{1n}, x_{2n}), \\ \alpha_{inp}(x_{1n}, x_{2n}), \end{array} \right. \quad (4)$$

подставить их в уравнения (1), предварительно разложив ядра этих уравнений в ряд (3), и приравнять выражения при одинаковых степенях d , для определения γ_{np} и α_{inp} получим рекуррентную систему интегральных уравнений

$$\Delta_n \iint_{S_n} \frac{\gamma_{nr}(r_n)}{R_{0n}} d\xi d\eta = \delta_{r0} q_n(x_n) + \sum_{k=1}^N \sum_{p=0}^{r-2} \iint_{S_k} \gamma_{kp}(r_k) S_{kn}^{(r-2-p)}(r_k, x_n) d\xi d\eta, \\ \Delta_n \iint_{S_n} \frac{\alpha_{inr}(r_n)}{R_{0n}} d\xi d\eta + (-1)^i (1 - \delta_{i3}) \nu \frac{\partial}{\partial x_{(3-i)n}} \iint_{S_n} \left[\alpha_{1n}(r_n) \frac{\partial}{\partial x_{2n}} - \right. \\ \left. - \alpha_{2n}(r_n) \frac{\partial}{\partial x_{1n}} \right] \frac{d\xi d\eta}{R_{0n}} - (1 - \delta_{i3}) \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x_{in}} \iint_{S_n} \frac{\gamma_{nr}(r_n)}{R_{0n}} d\xi d\eta = \frac{1-\nu}{G} N_{in}(x_n) \delta_{r0} + \\ + \sum_{k=1}^N \sum_{p=0}^{r-2} \iint_{S_k} \left[\sum_{s=1}^3 \alpha_{skp}(r_k) \chi_{iskn}^{(r-2-p)}(r_k, x_n) + \alpha_0 \gamma_{kp}(r_k) \chi_{ikn}^{(r-2-p)}(r_k, x_n) \right] d\xi d\eta. \quad (5)$$

В интегральных уравнениях (5) через r_k обозначена точка области S_k с координатами (ξ_k, η_k) в k -й локальной системе координат, через x_n — точка области S_n с координатами (x_{1n}, x_{2n}) в n -й локальной системе координат.

Так как в рассматриваемом случае правые части уравнений (5) есть многочлены переменных x_{1n} и x_{2n} , то для решения этих уравнений можно воспользоваться методикой работы [6]. С этой целью представим $\gamma_{nr}(r_n)$ в виде произведения

$$\gamma_{nr}(r_n) = \sqrt{-L(r_n)} M_r(r_n), \quad L(r_n) = \frac{\xi^2}{a_n^2} + \frac{\eta^2}{b_n^2} - 1, \quad (6)$$

где $M_r(r_n)$ — многочлены переменных ξ и η с неизвестными коэффициентами, причем степень этих многочленов такая же, как и в правой части первого уравнения (5).

Подставляя равенства (6) в первое из уравнений (5) и приравнявая выражения при одинаковых степенях многочленов, предварительно вычислив по методике [6] соответствующие интегралы, получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов многочленов $M_r(r_n)$. В частности, когда тело, ослабленное N одинаковыми эллиптическими трещинами, находится под действием однородного теплового потока, получаем

$$\begin{aligned} M_0(r_n) &= -\frac{bq_n}{2\pi E(k)}, \quad M_1(r_n) = M_2(r_n) = 0, \\ M_3(r_n) &= \frac{b^2}{4\pi^2 E^2(k)} \sum_{k=1}^N q_k I_{00} S_{kn}, \\ M_4(r_n) &= \frac{b^2(a^2 - b^2)}{4\pi^2 E(k)} \sum_{k=1}^N q_k I_{00} \left[\frac{K_{1kn} \xi}{(a^2 - 2b^2) E(k) + b^2 F(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_{2kn} \eta}{(2a^2 - b^2) E(k) - b^2 F(k)} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где $F(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода

$$k = \sqrt{a^2 - b^2}/a; \quad I_{ij} = \iint_{S_k} \xi^i \eta^j \sqrt{-L(r_k)} d\xi d\eta;$$

$$S_{kn} = 3e_{3kn} \sum_{j=1}^3 e_{jkn} l_{j3} - l_{33}; \quad (8)$$

$$K_{lkn} = 3 \left[(l_{3i} - 5\omega_{ikn} e_{3kn}) \sum_{j=1}^3 e_{jkn} l_{j3} + e_{3kn} \sum_{j=1}^3 l_{jl} l_{j3} + 3l_{33} \omega_{ikn} \right];$$

$$\omega_{jkn} = \sum_{i=1}^3 l_{ij} e_{ikn}.$$

Для решения интегральных уравнений (5) задачи термоупругости представим α_{inr} в виде произведения

$$\alpha_{inr}(x_n) = \sqrt{-L(x_n)} C_{ir}(x_n). \quad (9)$$

Здесь $C_{ir}(x_n)$ — многочлены переменных x_{1n} и x_{2n} , степень которых равна степени многочлена правой части интегральных уравнений (5). Поступая аналогично предыдущему, сводим задачу об определении коэффициентов многочлена $C_{ir}(x_n)$ к решению системы алгебраических уравнений.

В частности, когда тело с N одинаковыми эллиптическими термоизолированными трещинами находится кроме теплового потока под действием постоянных нормальных N_{3n} и касательных N_{1n} , N_{2n} внешних усилий, заданных на трещинах, то

$$\begin{aligned} C_{i0}(x_n) &= (B_{i10} x_{1n} + B_{i20} x_{2n})(1 - \delta_{i3}) + B_{i00}, \\ C_{i1}(x_n) &= 0, \quad C_{i2}(x_n) = B_{i02}, \\ C_{i3}(x_n) &= B_{i03} + B_{i13} x_{1n} + B_{i23} x_{2n}, \end{aligned} \quad (10)$$

где B_{ijs} определяются через заданные нагрузки соотношениями

$$\begin{aligned}
 B_{100} &= -\frac{b(1-\nu)N_{1n}k^2}{2\pi G[(k^2-\nu)E(k)+\nu k'^2F(k)]}, \quad B_{210} = B_{120} = 0, \\
 B_{200} &= -\frac{b(1-\nu)N_{2n}k^2}{2\pi G[(k^2+\nu k'^2)E(k)-\nu k'^2F(k)]}, \quad B_{300} = -\frac{b(1-\nu)N_{3n}}{2\pi GE(k)}, \quad (11) \\
 B_{i10} &= (-1)^i \frac{A_{00}q_n}{k^2M} \{ (1-k^2)(\Omega_{i+2}-\Omega_i)F(k) - [(1-k^2)\Omega_{i+2}-\Omega_i]E(k) \} \\
 &\quad (i=1, 2), \\
 B_{102} &= -\frac{k^2ab^2\alpha_0A_{00}\sum_{k=1}^N q_k\chi_{1kn}^{(0)}}{3[(k^2-\nu)E(k)+\nu k'^2F(k)]}, \quad B_{302} = -\frac{ab^2\alpha_0A_{00}\sum_{k=1}^N q_k\chi_{3kn}^{(0)}}{3E(k)}, \\
 B_{202} &= -\frac{k^2ab^2\alpha_0A_{00}\sum_{k=1}^N q_k\chi_{2kn}^{(0)}}{3[(k^2+\nu k'^2)E(k)-\nu k'^2F(k)]}, \\
 B_{313} &= -\frac{k^2ab^2\alpha_0A_{00}\sum_{k=1}^N q_k\Phi_{13kn}}{3[(k^2-k'^2)E(k)+k'^2F(k)]}, \quad B_{323} = -\frac{k^2ab^2\alpha_0A_{00}\sum_{k=1}^N q_k\Phi_{23kn}}{3[(k^2+1)E(k)-k'^2F(k)]}, \\
 B_{i13} &= (-1)^i \frac{\alpha_0A_{30}k'^2 \{ [(1-k^2)(\Omega_{i+2}-\Omega_i)]F(k) - [(1-k^2)\Omega_{i+2}-\Omega_i]E(k) \}}{k^2M} \\
 &\quad - (-1)^i \frac{\alpha_0A_{00}ab^2}{3M} \sum_{k=1}^N q_k (\Phi_{11kn}\Omega_{i+2} + \Phi_{22kn}\Omega_i) \quad (i=1, 2), \\
 B_{123} &= \frac{ab^2\alpha_0A_{00}}{3(\Omega_6\Omega_8-\Omega_7\Omega_6)} \sum_{k=1}^N q_k (\Phi_{21kn}\Omega_8 - \Phi_{12kn}\Omega_6), \\
 B_{213} &= \frac{ab^2\alpha_0A_{00}}{3(\Omega_6\Omega_8-\Omega_7\Omega_6)} \sum_{k=1}^N q_k (\Phi_{12kn}\Omega_6 - \Phi_{21kn}\Omega_7), \\
 B_{103} &= -\frac{k^2ab^2}{3[(k^2-\nu)E(k)+\nu k'^2F(k)]} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 F_{1i}B_{i00}, \\
 B_{203} &= -\frac{k^2ab^2}{3[(k^2+\nu k'^2)E(k)-\nu k'^2F(k)]} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 F_{2i}B_{i00}, \\
 B_{303} &= -\frac{ab^2}{3E(k)} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 F_{3i}B_{i00}, \\
 M &= \Omega_1\Omega_4 - \Omega_2\Omega_3, \quad A_{00} = -\frac{b}{2\pi E(k)}, \quad A_{30} = -\frac{bA_{00}\sum_{k=1}^N S_{kn}q_k l_{00}}{2\pi E(k)}, \\
 \Omega_1 &= \frac{\nu k'^2}{k^4} [(2-k^2)E(k) - 2(1-k^2)F(k)], \quad \Omega_4 = -\frac{\Omega_1}{k'^2}, \\
 \Omega_2 &= \left(2 - \frac{1-\nu}{k^2} - \frac{2\nu}{k^4} \right) E(k) + \left(-1 + \frac{1-2\nu}{k^2} + \frac{2\nu}{k^4} \right) F(k), \quad k' = \frac{b}{a}, \\
 \Omega_3 &= \left[(-1+\nu) - \frac{1}{k^2} (1+3\nu) + \frac{2\nu}{k^4} \right] E(k) + \\
 &\quad + \left[(-1-2\nu) + (1+4\nu)\frac{1}{k^2} - \frac{2\nu}{k^4} \right] F(k), \\
 \chi_{jkn}^{(0)} &= -e_{3kn} \sum_{i=1}^3 l_{ij3} + 3e_{3kn} \sum_{i=1}^3 (e_{ikn}^2 l_{ij3} + e_{ikn} e_{(i+1)kn} l_{ij3}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2e_{3kn}(l_{1j^*} + l_{2j^*}) - e_{2kn}l_{2j^*}^* - e_{1kn}l_{3j^*}^*, \\
\Phi_{l_{jkn}} = & (3e_{3kn}\omega_{ikn} - l_{3i}) \sum_{m=1}^3 l_{mj^*} + 3l_{3i} \sum_{m=1}^3 (e_{mkn}^2 l_{mj^*} + e_{mkn}e_{(m+1)kn}l_{mj^*}^*) + \\
& + 3e_{3kn} \sum_{m=1}^3 [2l_{mi}e_{mkn}l_{mj^*} + (e_{(m+1)kn}l_{mi} + e_{mkn}l_{(m+1)i})l_{mj^*}^*] - \\
- 15e_{3kn}\omega_{ikn} \sum_{m=1}^3 & (e_{mkn}^2 l_{mj^*} + e_{mkn}e_{(m+1)kn}l_{mj^*}^*) - 2(3e_{3kn}\omega_{ikn} - l_{3i})(l_{1j^*} + l_{2j^*}) + \\
& + (3e_{2kn}\omega_{ikn} - l_{2i})l_{2j^*}^* + (3e_{1kn}\omega_{ikn} - l_{1i})l_{3j^*}^* \quad (i = 1, 2; \quad j = \overline{1, 3}), \\
& e_{4kn} \equiv e_{1kn}, \quad l_{4i} \equiv l_{1i}, \\
\Omega_6 = & \left(-1 - \frac{1-2\nu}{k^2} - \frac{2\nu k'^2}{k^4} \right) E(k) + \frac{k'^2}{k^2} \left(1 - 3\nu + \frac{2\nu}{k^2} \right) F(k), \\
\Omega_6 = \nu \frac{k'^2}{k^4} & \left(2F(k) - \frac{k'^2+1}{k'^2} E(k) \right), \quad \Omega_7 = k'^2 \Omega_6, \\
\Omega_8 = & \left(-1 + \frac{1-2\nu}{k^2} k'^2 - \frac{2\nu k'^2}{k^4} \right) E(k) + \frac{k'^2}{k^2} \left(-1 + \nu + \frac{2\nu}{k^2} \right) F(k).
\end{aligned}$$

Выражение для F_{ij} определяется через постоянные материала и геометрические параметры, характеризующие расположение трещин формулами (15) работы [4].

Располагая решением системы интегральных уравнений (1) по соответствующим формулам [1, 3], определяем напряжения в теле с трещинами, а также коэффициенты интенсивности напряжений. С использованием результатов работы [6] выражения коэффициентов интенсивности напряжений для рассматриваемой задачи представим в виде формул

$$\begin{aligned}
k_1 = & -\frac{R(\alpha)}{(1-\nu)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{3i}(x_{1n}, x_{2n})}{d^i}, \quad R(\alpha) = \frac{2G\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{a_n^2 \sin^2 \alpha + b_n^2 \cos^2 \alpha}}, \\
k_2 = & -\frac{R(\alpha)}{(1-\nu)} \left[\cos \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{2i}(x_{1n}, x_{2n})}{d^i} - \sin \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{1i}(x_{1n}, x_{2n})}{d^i} \right], \quad (12) \\
k_3 = & -R(\alpha) \left[\sin \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{2i}(x_{1n}, x_{2n})}{d^i} + \cos \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{1i}(x_{1n}, x_{2n})}{d^i} \right],
\end{aligned}$$

где a_n, b_n — соответственно полуоси n -й эллипсоидальной трещины; C_{hj} — функции, через которые определяются α_{in} по формулам (9) и (4); α — угол касательной к контуру трещины с положительным направлением оси $O_n x_{1n}$; x_{1n}, x_{2n} — координаты точки контура трещины в n -й локальной системе координат. Для определения C_{hj} необходимо иметь решение системы (5). Когда имеется N одинаковых эллиптических термоизолированных трещин, поверхности которых нагружены постоянными внешними усилиями N_{jn} , а тело с трещинами находится под действием однородного теплового потока q , то C_{hj} определяются через геометрические параметры, характеризующие расположение трещин в теле, и постоянные материала по формулам (10), (11).

Когда имеется только одна термоизолированная эллиптическая трещина, а однородный тепловой поток q перпендикулярен к плоскости расположения трещины, то $k_1 = 0$, а

$$k_2 = -\frac{2G\alpha_0 qb}{3\sqrt{\pi}(1-\nu)} \sqrt[4]{\sin^2 \alpha + k'^2 \cos^2 \alpha}, \quad k_3 = \frac{2G\alpha_0 qb \sqrt[4]{a} k^2 \sin \alpha \cos \alpha}{3\sqrt{\pi} \sqrt[4]{(\sin^2 \alpha + k'^2 \cos^2 \alpha)^3}},$$

где a и b — полуоси эллипса; $k' = b/a$.

На рис. 1—3 представлены графики приведенных значений коэффициентов интенсивности напряжений $K_i = k_i/k_\infty$ ($k_\infty = -\frac{2G\alpha_0 b \sqrt{bq}}{3\pi(1-\nu)}$), вычисленных по формулам (12), когда имеются две одинаковые эллиптические термоизолированные свободные от внешних усилий трещины. Одна из них перпендикулярна к направлению однородного теплового потока, а другая смещается произвольно относительно первой. Расположение второй трещины относительно первой характеризу-

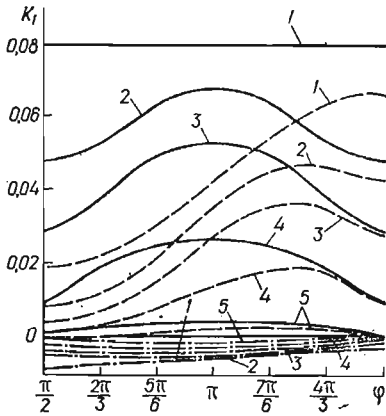


Рис. 1

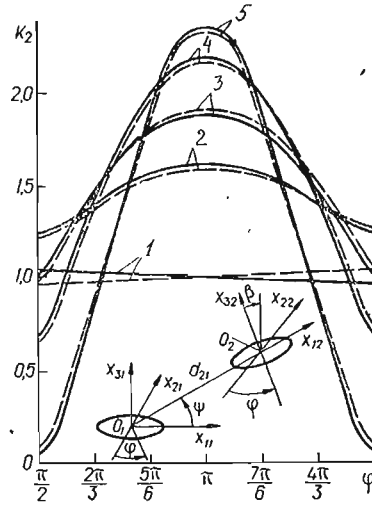


Рис. 2

ется величинами d , β и ψ (см. рис. 2). При вычислениях положено $\nu = 0,3$; $\beta = 0$; $b \leq a$; $a/d = 0,25$. На рис. 2 приведена зависимость K_i от угла ϕ , который определяется через α по формулам

$$\sin \phi = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + k'^2 \cos^2 \alpha}}, \quad \cos \phi = \frac{k' \cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + k'^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Сплошные линии на рис. 1 соответствуют значениям $\psi = \frac{\pi}{2}$, штриховые — $\psi = \frac{\pi}{3}$, штрихпунктирные — $\psi = \frac{\pi}{6}$; при $\psi = 0$ значения $K_1 \equiv 0$. На

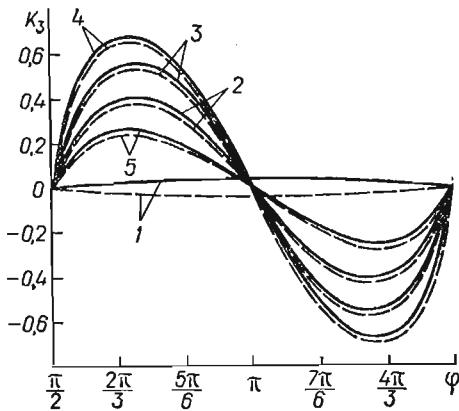


Рис. 3

рис. 2, 3 сплошные линии соответствуют значениям $\psi = 0$, штриховые — $\psi = \frac{\pi}{3}$; величины K_2 и K_3 при других значениях ψ отличаются от нанесенных очень незначительно и поэтому на рисунках не приведены. Кривые 1—5 на всех рисунках построены соответственно при значениях $k' = 1; 0,5; 0,33; 0,142; 0,02$.

При вычислениях мы ограничивались членами ряда (4) до ϵ^3 включительно ($\epsilon = a/d$). Вычислялись также величины, включающие члены до ϵ^4 , которые в работе не приведены из-за их громоздкости. Их влияние на величину коэффициентов интенсивности незначительно для рассматриваемых случаев расположения трещин.

В частности, при определении K_2 эта величина составляет около 1%, а при определении K_3 составляет 1,5%. Поэтому формулами (9) — (12) можно с надежностью пользоваться при отношении $a/d \leq 0,25$.

Из графиков следует, что зависимость коэффициентов интенсивности

напряжений k_2 и k_3 от угла ψ незначительна. В то же время зависимость k_1 от угла ψ более существенна. Если $b/a = 0,02$, то значение коэффициентов интенсивности напряжений в точках пересечения меньшей полуоси с контуром трещины при рассматриваемых расстояниях между трещинами мало отличается от коэффициента интенсивности напряжений, когда имеется термоизолированная полосовидная трещина в бесконечном теле, нагруженном аналогичными нагрузками. Видно, что k_1 принимает наибольшее значение, когда $b/a = 1$ и $\psi = \frac{\pi}{2}$ (трещины соосные).

Отметим, что в случае одной эллиптической трещины, нагруженной сдвигающими усилиями, полученные результаты совпадают с известными в работе [5].

1. Кит Г. С. Общий метод решения пространственных задач теплопроводности и термоупругости для тела с дискообразными трещинами.— Прикл. механика, 1977, 13. № 12, с. 18—24.
2. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
3. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
4. Кит Г. С., Хай М. В., Лаушник И. П. Первая основная задача теории упругости для тела с дискообразными трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 26—32.
5. Разрушение.— М.: Мир, 1975.— Т. 2.— 364 с.
6. Хай М. В. О решении задач термоупругости для тел с плоскими трещинами, контур которых описывается кривой второго порядка.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 80—85.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.01.80

УДК 539.377

В. И. Громовык, М. С. Яворский

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ И НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛОСЕ-ПЛАСТИНКЕ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ

Пусть в области $R - h \leq x \leq R + h$, $|z| \leq \delta$ бесконечной однородной полосы-пластинки ширины $2l$ и толщины 2δ действуют источники тепла мощностью q . Поверхности $x = \pm l$ пластинки предполагаются теплоизолированными и свободными от внешней нагрузки, а через поверхности $z = \pm \delta$ происходит теплообмен с внешней средой нулевой температуры, причем коэффициент теплоотдачи есть кусочно-постоянная функция координаты $\alpha(x) = \alpha_1 + (\alpha_0 - \alpha_1) N(x)$. Здесь α_0 — коэффициент теплоотдачи с части $R - h \leq x \leq R + h$ боковых поверхностей $z = \pm \delta$; α_1 — коэффициент теплоотдачи с остальной части этих поверхностей; $N(x) = S_-(x - R + h) - S_+(x - R - h)$; $S_{\pm}(\xi)$ — асимметричные единичные функции.

Неустановившееся температурное поле определим из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\alpha(x)}{\lambda \delta} T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q}{\lambda} N(x),$$

которое при аналогичных работе [2] допущениях запишется в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \kappa^2 T = (MT|_{x=R} - Q) \frac{\delta(x-R)}{\Lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (1)$$

где $\kappa^2 = \alpha_1/\lambda\delta$; $M = 4\alpha_0 h(1 - \alpha_1/\alpha_0)$; $Q = 4h\delta q$; $\Lambda = 2\lambda\delta$;

$\delta(x-R) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_-(x-R+h) - S_+(x-R-h)}{2h}$ — дельта-функция Дирака; λ ,

a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности; τ — время.