напряжений k_2 и k_3 от угла ψ незначительна. В то же время зависимость k_1 от угла ψ более существенна. Если $b/a = 0{,}02$, то значение коэффициентов интенсивности напряжений в точках пересечения меньшей полуоси с контуром трещины при рассматриваемых расстояниях между трещинами мало отличается от коэффициента интенсивности напряжений, когда имеется термоизолированная полосовидная трещина в бесконечном теле, нагруженном аналогичными нагрузками. Видно, что k_1 принимает наибольшее значение, когда $b/a = 1$ и $\psi = \frac{\pi}{2}$ (трещины соосные).

Отметим, что в случае одной эллиптической трещины, нагруженной сдвигающими усилиями, полученные результаты совпадают с известными в работе [5].

1. *Кит Г. С.* Общий метод решения пространственных задач теплопроводности и термоупругости для тела с дискообразными трещинами.— Прикл. механика, 1977, 13, № 12, с. 18—24.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
3. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
4. *Кит Г. С., Хай М. В., Лашник И. П.* Первая основная задача теории упругости для тела с дискообразными трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 26—32.
5. *Разрушение.*— М. : Мир, 1975.— Т. 2.— 364 с.
6. *Хай М. В.* О решении задач термоупругости для тел с плоскими трещинами, контур которых описывается кривой второго порядка.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 80—85.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.01.80

УДК 539.377

В. И. Громовык, М. С. Яворский

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ И НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛОСЕ-ПЛАСТИНКЕ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ

Пусть в области $R - h \leqslant x \leqslant R + h$, $|z| \leqslant \delta$ бесконечной однородной полосы-пластинки ширины $2l$ и толщины 2δ действуют источники тепла мощностью q. Поверхности $x = \pm l$ пластинки предполагаются теплоизолированными и свободными от внешней нагрузки, а через поверхности $z = \pm\delta$ происходит теплообмен с внешней средой нулевой температуры, причем коэффициент теплоотдачи есть кусочно-постоянная функция координаты $\alpha(x) = \alpha_1 + (\alpha_0 - \alpha_1) N(x)$. Здесь α_0 — коэффициент теплоотдачи с части $R - h \leqslant x \leqslant R + h$ боковых поверхностей $z = \pm\delta$; α_1— коэффициент теплоотдачи с остальной части этих поверхностей; $N(x) = S_-(x - R + h) - S_+(x - R - h)$; $S_\pm(\zeta)$ — асимметричные единичные функции.

Неустановившееся температурное поле определим из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\alpha(x)}{\lambda\delta} T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q}{\lambda} N(x),$$

которое при аналогичных работе [2] допущениях запишется в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \varkappa^2 T = (MT|_{x=R} - Q)\frac{\delta(x-R)}{\Lambda} + \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau}, \qquad (1)$$

где $\varkappa^2 = \alpha_1/\lambda\delta$; $M = 4\alpha_0 h(1 - \alpha_1/\alpha_0)$; $Q = 4h\delta q$; $\Lambda = 2\lambda\delta$;

$\delta(x - R) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{S_-(x - R + h) - S_+(x - R - h)}{2h}$ — дельта-функция Дирака; λ, a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности; τ — время.

Применяя к уравнению (1) и граничным условиям $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\pm l} = 0$ интегральное преобразование Лапласа по переменной τ с учетом $T|_{\tau=0} = 0$, находим

$$\frac{d^2\overline{T}}{dx^2} - \gamma^2\overline{T} = \left(M\overline{T}\Big|_{x=R} - \frac{Q}{s}\right)\frac{\delta(x-R)}{\Lambda}, \tag{2}$$

$$\left.\frac{d\overline{T}}{dx}\right|_{x=\pm l} = 0, \tag{3}$$

где

$$\overline{T} = \int\limits^{\infty} Te^{-s\tau}d\tau; \quad \gamma^2 = \varkappa^2 + \frac{s}{a}.$$

Общее решение уравнения (2) ищем в виде

$$\overline{T}(x, s) = C\,\mathrm{ch}\,\gamma x + D\,\mathrm{sh}\,\gamma x + \frac{\frac{Q}{s} - M\overline{T}\Big|_{x=R}}{2\Lambda\gamma}e^{-|x-R|\gamma}. \tag{4}$$

Отсюда определяем $\overline{T}|_{x=R}$ и с помощью условий (3) находим постоянные интегрирования C и D и получаем искомое решение уравнения (2) в виде

$$\overline{T}(x, s) = \frac{Q[\mathrm{ch}\,\gamma(x+R) + \mathrm{ch}\,\gamma(2l - |x-R|)]}{s[2\Lambda\gamma\,\mathrm{sh}\,2\gamma l + M(\mathrm{ch}\,2\gamma l + \mathrm{ch}\,2\gamma R)]}. \tag{5}$$

Перейдя здесь по формуле обращения к оригиналу, использовав при этом теорему разложения [3], для определения нестационарного температурного поля в пластинке найдем выражение

$$\theta = \frac{\lambda T}{2q\delta^2} = H\left\{\frac{\mathrm{ch}[(X+P)\sqrt{\mathrm{Bi}}] + \mathrm{ch}[(2L - |X-P|)\sqrt{\mathrm{Bi}}]}{2[\sqrt{\mathrm{Bi}}\,\mathrm{sh}\,2B + H(\mathrm{Bi}_0 - \mathrm{Bi})(\mathrm{ch}\,2B + \mathrm{ch}\,2B_R)]} - \right.$$
$$\left. - 2L\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left[-\mathrm{Fo}\left(\frac{\mu_n^2}{4L^2} + \mathrm{Bi}\right)\right]\right\}. \tag{6}$$

Здесь

$$A_n = \frac{\mu_n\left[\cos\left(\frac{X+P}{2L}\mu_n\right) + \cos\left(\frac{2L - |X-P|}{2L}\mu_n\right)\right]}{(\mu_n^2 + 4L^2\,\mathrm{Bi})\left[\sin\mu_n + \mu_n\cos\mu_n + 2H(\mathrm{Bi}_0 - \mathrm{Bi})\left(L\sin\mu_n - P\sin\frac{P}{L}\mu_n\right)\right]};$$

μ_n — корни характеристического уравнения

$$\mu\sin\mu - 2HL(\mathrm{Bi}_0 - \mathrm{Bi})\left(\cos\mu + \cos\frac{P}{L}\mu\right) = 0;$$

$$\mathrm{Bi} = \alpha_1\delta/\lambda; \quad \mathrm{Bi}_0 = \alpha_0\delta/\lambda; \quad B = L\sqrt{\mathrm{Bi}}; \quad B_R = P\sqrt{\mathrm{Bi}}; \quad X = x/\delta;$$
$$P = R/\delta; \quad L = l/\delta; \quad H = h/\delta; \quad \mathrm{Fo} = a\tau/\delta^2.$$

Поскольку рассматриваемая полоса-пластинка свободна от внешней нагрузки, а температура изменяется лишь по ее ширине, то температурные напряжения определим по формуле [1]

$$\sigma_y = \frac{\sigma_{yy}\lambda}{2\alpha_t Eq\delta^2} = -\theta + \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L}\theta dX + \frac{3X}{2L^3}\int\limits_{-L}^{L}\theta X dX, \tag{7}$$

где E, α_t — модуль упругости и температурный коэффициент линейного расширения. Подставляя сюда выражение (6), находим

$$\sigma_y = H\times$$
$$\times\left\{\frac{(LB + 3XB_R)\,\mathrm{sh}\,2B - 6X\,\mathrm{sh}\,B\,\mathrm{sh}\,B_R - L^2B[\mathrm{ch}(X+P)\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{ch}(2L - |X-P|\sqrt{\mathrm{Bi}})]}{2LB^2[\sqrt{\mathrm{Bi}}\,\mathrm{sh}\,2B + H(\mathrm{Bi}_0 - \mathrm{Bi})(\mathrm{ch}\,2B + \mathrm{ch}\,2B_R)]} + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left[-\mathrm{Fo}\left(\frac{\mu_n^2}{4L^2} + \mathrm{Bi}\right)\right]\right\}, \tag{8}$$

где

$$B_n = \frac{\mu_n^2 L\left(\cos\frac{X+P}{2L}\mu_n - \cos\frac{2L-|X-P|}{2L}\mu_n\right) - \frac{2\mu_n}{L}(1+3XP\sin\mu_n) + 24X\sin\frac{\mu_n}{2}\sin\frac{P}{2L}\mu_n}{\mu_n(\mu_n^2+4L^2\,\mathrm{Bi})\left[\sin\mu_n+\mu_n\cos\mu_n+2H(\mathrm{Bi}_0-\mathrm{Bi})\left(L\sin\mu_n+P\sin\frac{P}{L}\mu_n\right)\right]}.$$

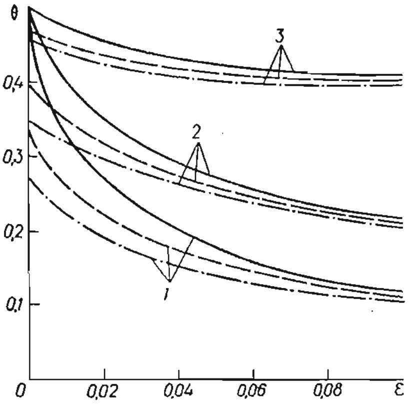

Рис. 1

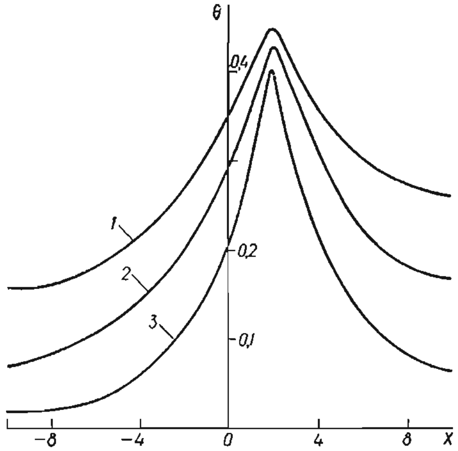

Рис. 2

Устремив в выражениях (6) и (8) $\mathrm{Fo}\to\infty$, получим решение стационарной задачи теплопроводности и термоупругости, совпадающее с приведенным в работе [2].

Для случая $\mathrm{Bi}_0=\mathrm{Bi}$ решение поставленной краевой задачи записывается в виде

$$\frac{\theta}{H} = \frac{1-e^{-\mathrm{Bi}\,\mathrm{Fo}}}{2L\,\mathrm{Bi}} + 2L\sum_{k=1}^{\infty} A_k\left\{1-\exp\left[-\mathrm{Fo}\left(\mathrm{Bi}+\frac{\pi^2k^2}{4L^2}\right)\right]\right\}, \tag{9}$$

а напряжения будем вычислять по формуле

$$\sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\left\{1-\exp\left[-\mathrm{Fo}\left(\mathrm{Bi}+\frac{\pi^2k^2}{4L^2}\right)\right]\right\}, \tag{10}$$

где

$$A_k = (-1)^k\left[\cos\frac{\pi k(X+P)}{2L}+\cos\frac{\pi k(2L-|X-P|)}{2L}\right](4L^2\,\mathrm{Bi}+\pi^2k^2)^{-1};$$

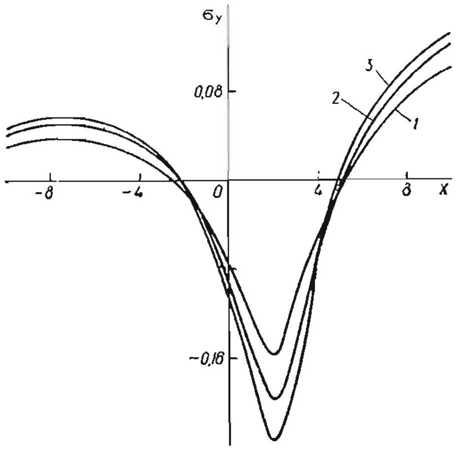

Рис. 3

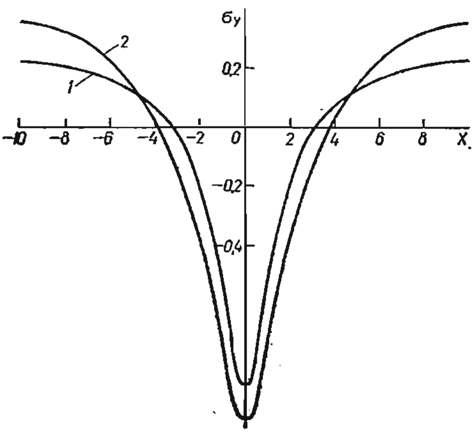

Рис. 4

$$B_k = (-1)^{k+1}\left\{48HX\sin\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi kP}{2L} + 2HL\pi^2k^2\left[\cos\frac{\pi k(X+P)}{2L} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \cos\frac{\pi k(2L - |X - P|)}{2L}\right]\right\}[\pi^2k^2(4L^2\,\mathrm{Bi} + \pi^2k^2)]^{-1}.$$

По формулам (6), (8) и (10) проведены вычисления, результаты которых представлены на рис. 1—5. При вычислениях по формулам (6) и (8) принимали $L = 10$, $H = 1$, $\mathrm{Bi}_0 = 1$, $P = 2$, а по формуле (10) — $L = 10$, $H = 1$, $P = 0$, $\mathrm{Bi} = \mathrm{Bi}_0 = 0{,}1$.

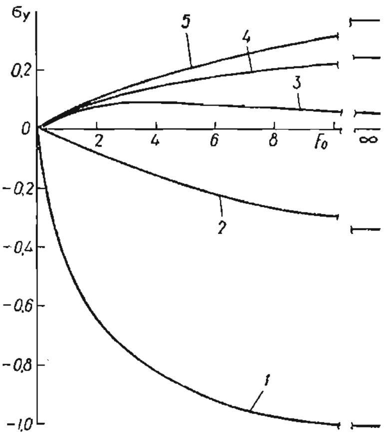

Рис. 5

На рис. 1 показана зависимость безразмерного температурного поля θ от величины $\varepsilon = \mathrm{Bi}/\mathrm{Bi}_0$ в сечениях $X = -2$; 0; 2 (кривые *1—3*) для Fo = 30; 50; ∞ (штрихпунктирная, штриховая и сплошная линии соответственно). На рис. 2 показано распределение функции θ по ширине полосы-пластинки в установившемся тепловом режиме при $\varepsilon = 0{,}02$; 0,04; 0,1 (кривые *1—3*). На рис. 3 дано распределение напряжений σ_{y} по ширине полосы при Fo = 30; $\varepsilon = 0{,}02$; 0,04; 0,08 (кривые *1—3*). Распределение напряжений по ширине полосы при центральном расположении источника тепла для значений Fo = 6; ∞ (кривые *1*, *2*) приведено на рис. 4, а в зависимости от безразмерного времени Fo в сечениях $X = 0$; 2; 4; 6; 10 (кривые *1—5*) — на рис. 5.

Из графиков видно, что с увеличением коэффициента теплоотдачи со свободной от нагрева поверхности пластинки температурное поле в каждой ее точке уменьшается. Температурные напряжения как в случае центрального расположения источников тепла, так и в случае внецентрального их расположения достигают максимального значения при $x = R$. С увеличением параметра ε они уменьшаются. В области действия источников тепла возникают напряжения сжатия, а в удаленных от центра действия источников сечениях на величину $b > 3{,}3H$ — напряжения растяжения (см. рис. 4).

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений.— М. : Мир, 1964.— 517 с.
2. *Коляно Ю. М., Громовык В. И.* Влияние переменной теплоотдачи на напряжения в пластинках, обусловленные источниками тепла.— Прикл. механика, 1976, 12, № 12, с. 100—104.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.— М. : Высш. школа, 1967.— 599 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
19.11.79

УДК 539.3

В. И. Елейко

СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ, ВОЗБУЖДЕННЫЕ ТЕПЛОВЫМ УДАРОМ

Рассмотрим круглую пластину радиуса r_2, к поверхности $z = h/2$ которой внезапно подводится тепловой поток со случайной плотностью [2]

$$q(\tau) = q^{(0)} + \varepsilon A_q q^{(1)}(\tau), \tag{1}$$

где $q^{(0)}$ — среднее значение плотности теплового потока; $q^{(1)}$ — стохастическая функция времени с равным нулю математическим ожиданием и вероятностью единица непрерывно-дифференцируемыми реализациями; ε — малый параметр; A_q — постоянная величина. Поверхность $z = -h/2$ пластины и