

$$B_k = (-1)^{k+1} \left\{ 48HX \sin \frac{\pi k}{2} \sin \frac{\pi k P}{2L} + 2HL\pi^2 k^2 \left[ \cos \frac{\pi k (X+P)}{2L} + \cos \frac{\pi k (2L - |X-P|)}{2L} \right] \right\} [\pi^2 k^2 (4L^2 Bi + \pi^2 k^2)]^{-1}.$$

По формулам (6), (8) и (10) проведены вычисления, результаты которых представлены на рис. 1—5. При вычислениях по формулам (6) и (8) принимали  $L = 10$ ,  $H = 1$ ,  $Bi_0 = 1$ ,  $P = 2$ , а по формуле (10) —  $L = 10$ ,  $H = 1$ ,  $P = 0$ ,  $Bi = Bi_0 = 0,1$ .

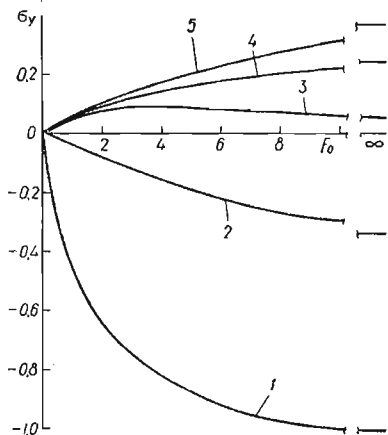


Рис. 5

На рис. 1 показана зависимость безразмерного температурного поля  $\theta$  от величины  $\epsilon = Bi/Bi_0$  в сечениях  $X = -2; 0; 2$  (кривые 1—3) для  $Fo = 30; 50; \infty$  (штрихпунктирная, штриховая и сплошная линии соответственно). На рис. 2 показано распределение функции  $\theta$  по ширине полосы-пластинки в установившемся тепловом режиме при  $\epsilon = 0,02; 0,04; 0,1$  (кривые 1—3). На рис. 3 дано распределение напряжений  $\sigma_y$  по ширине полосы при  $Fo = 30; \epsilon = 0,02; 0,04; 0,08$  (кривые 1—3). Распределение напряжений по ширине полосы при центральном расположении источника тепла для значений  $Fo = 6; \infty$  (кривые 1, 2) приведено на рис. 4, а в зависимости от безразмерного времени  $Fo$  в сечениях  $X = 0; 2; 4; 6; 10$  (кривые 1—5) — на рис. 5.

Из графиков видно, что с увеличением коэффициента теплоотдачи со свободной от нагрева поверхности пластинки температурное поле в каждой ее точке уменьшается. Температурные напряжения как в случае центрального расположения источников тепла, так и в случае внецентрального их расположения достигают максимального значения при  $x = R$ . С увеличением параметра  $\epsilon$  они уменьшаются. В области действия источников тепла возникают напряжения сжатия, а в удаленных от центра действия источников сечениях на величину  $b > 3,3H$  — напряжения растяжения (см. рис. 4).

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений.— М.: Мир, 1964.— 517 с.
2. Коляно Ю. М., Громык В. И. Влияние переменной теплоотдачи на напряжения в пластинках, обусловленные источниками тепла.— Прикл. механика, 1976, 12, № 12, с. 100—104.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности.— М.: Высш. школа, 1967.— 599 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегия 19.11.79

УДК 539.3

В. И. Елейко

#### СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ, ВОЗБУЖДЕННЫЕ ТЕПЛОМ УДАРОМ

Рассмотрим круглую пластину радиуса  $r_2$ , к поверхности  $z = h/2$  которой внезапно подводится тепловой поток со случайной плотностью [2]

$$q(\tau) = q^{(0)} + \epsilon A_q q^{(1)}(\tau), \quad (1)$$

где  $q^{(0)}$  — среднее значение плотности теплового потока;  $q^{(1)}$  — стохастическая функция времени с равным нулю математическим ожиданием и вероятностью единица непрерывно-дифференцируемыми реализациями;  $\epsilon$  — малый параметр;  $A_q$  — постоянная величина. Поверхность  $z = -h/2$  пластины и

ее контур  $r = r_2$  предполагаются теплоизолированными. Начальная температура пластины равна  $T_0$ .

При таких условиях теплообмена нестационарное температурное поле с точностью до  $\varepsilon$  определяем формулами [1, 4, 5].

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)}. \quad (2)$$

Здесь

$$T^{(0)} = T_0 + \frac{q^{(0)}h}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{12z^2 + 12z - 1}{24} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-2} \cos \left[ \frac{n\pi}{2} (2\zeta + 1) \right] \exp(-n^2\pi^2\tau) \right\}; \quad (3)$$

$$T^{(1)} = \int_0^{\tau} \Phi(\zeta, \tau - \tau') q^{(1)}(\tau') d\tau';$$

$$\Phi(\zeta, \tau - \tau') = \frac{A_0 h}{\lambda} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \left[ n\pi \left( \zeta + \frac{1}{2} \right) \right] \exp(-n^2\pi^2\tau) \right];$$

$\zeta$  — относительная координата,  $\zeta = z/h$ ;  $\tau = dt/h^2$  — безразмерное время;  $h$  — толщина пластины;  $\lambda, a$  — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности пластины соответственно.

Для нахождения прогибов  $u_z$  рассматриваемой пластины, обусловленных случайным температурным полем (2) — (3), запишем уравнение движения

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 u_z + \kappa^2 \partial^2 u_z / \partial \tau^2 + r_2^2 (1 + \nu) \nabla_1^2 \kappa_T = 0, \quad (4)$$

где

$$\kappa_T = (12/h) \int_{-1/2}^{1/2} \alpha_c \zeta (T - T_0) d\zeta; \quad \kappa^2 = 12(1 - \nu) r_2^2 a^2 / c_2^2 h^6;$$

$$\nabla_1^2 = \partial^2 / \partial \rho^2 + (1/\rho) \partial / \partial \rho; \quad \rho = r/r_2; \quad c_2 = E/\rho_0; \quad (5)$$

$\rho$  — относительная координата;  $\rho_0$  — плотность материала пластины;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль упругости;  $c_2$  — скорость распространения поперечной волны.

К уравнению (4) присоединим начальные условия

$$u_z = 0; \quad \partial u_z / \partial \tau = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0 \quad (6)$$

и граничные условия, соответствующие свободному операнию пластины:

$$u_z = 0; \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + r_2^2 (1 + \nu) \kappa_T = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (7)$$

Пусть коэффициент  $\kappa^2$ , прямо пропорциональный квадрату коэффициента теплопроводности и обратно пропорциональный квадрату скорости распространения поперечной волны, является случайной функцией времени и имеет вид

$$\kappa^2(\tau) = \kappa_0^2 + \varepsilon A_x \kappa_1^2(\tau), \quad (8)$$

где  $\kappa_0^2$  — среднее значение коэффициента  $\kappa^2$ ;  $\kappa_1^2(\tau)$  — стохастическая функция, математическое ожидание которой равно нулю, а реализации с вероятностью единица непрерывно-дифференцируемые;  $A_x$  — постоянная величина.

Подставляя решение задачи термоупругого изгиба (4), (6), (7) в соответствии с выражениями (2), (8) в виде

$$u_z = u_z^{(0)} + \varepsilon u_z^{(1)}, \quad (9)$$

для нахождения функций  $u_z^{(l)}$  ( $l = 0, 1$ ) получаем краевые задачи

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 u_z^{(l)} + \kappa_0^2 \partial^2 u_z^{(l)} / \partial \tau^2 + r_2^2 (1 + \nu) \nabla_1^2 \kappa_T^{(l)} (1 - \delta_l^1) = \\ = - [A_x \kappa_1^2(\tau) (\partial^2 u_z^{(l-1)} / \partial \tau^2) + r_2^2 (1 + \nu) \nabla_1^2 \kappa_T^{(l)}] \delta_l^1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$u_z^{(l)} = 0, \quad \partial u_z^{(l)} / \partial \tau = 0 \quad \text{при } \tau = 0,$$

$$u_z^{(l)} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z^{(l)}}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial u_z^{(l)}}{\partial \rho} + r_2^2 (1 + \nu) \kappa_T^{(l)} = 0 \quad \text{при } \rho = 1,$$

где

$$\delta_l^l = \begin{cases} 0, & l < 1, \\ 1, & l \geq 1; \end{cases}$$

$u_z^0$  — среднее значение прогибов рассматриваемой пластины;  $u_z^{(1)}$  — дополнительные прогибы круглой пластины, обусловленные случайными флуктуациями интенсивности теплового потока  $q$  и коэффициента  $\kappa^2$ .

Подставляя выражения для температурного поля (2), (3) в формулы (5), чисто тепловую деформацию  $\kappa_T$  после соответствующих вычислений получаем в виде

$$\kappa_T = \kappa_T^{(0)} + \varepsilon \kappa_T^{(1)}, \quad (11)$$

где

$$\kappa_T^{(0)} = \frac{q^{(0)} \alpha_c}{2\lambda} \left[ 1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots} n^{-4} \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \right];$$

$$\kappa_T^{(1)} = (A_q \alpha_c / 2\lambda) \int_0^\tau \Psi(\tau - \tau') q^{(1)}(\tau') d\tau';$$

$$\Psi(\tau - \tau') = 1 + 96\pi^2 \sum_{s=1,3,\dots} s^{-2} \exp[-s^2 \pi^2 (\tau - \tau')]. \quad (12)$$

Вводя безразмерные перемещения  $\eta_z^{(l)}$  и чисто тепловые деформации  $X_T^{(l)}$  в виде

$$\eta_z^{(0)} = [\lambda/q^{(0)} \alpha_c r_2^2 (1 + \nu)] u_z^{(0)}, \quad \eta_z^{(1)} = [\lambda/A_q \alpha_c r_2^2 (1 + \nu)] u_z^{(1)},$$

$$X_T^{(0)} = [\lambda/q^{(0)} \alpha_c] \kappa_T^{(0)}, \quad X_T^{(1)} = [\lambda/A_q \alpha_c] \kappa_T^{(1)} \quad (13)$$

и учитывая, что  $\nabla_1^2 \kappa_T^{(0)} = 0$ , краевую задачу (10) сводим к решению уравнений

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 \eta_z^{(l)} + \kappa_0^2 \partial^2 \eta_z^{(l)} / \partial \tau^2 = -A_{\kappa} \kappa_1^2(\tau) (\partial^2 \eta_z^{(l-1)} / \partial \tau^2) \delta_l^l \quad (14)$$

при начальных и граничных условиях

$$\eta_z^{(l)} = 0, \quad \partial \eta_z^{(l)} / \partial \tau = 0 \quad \text{при } \tau = 0,$$

$$\eta_z^{(l)} = 0, \quad \partial^2 \eta_z^{(l)} / \partial \rho^2 + (\nu/\rho) \partial \eta_z^{(l)} / \partial \rho + X_T^{(l)} = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (15)$$

Решения уравнений (14) ищем в виде суммы безразмерных квазистатических прогибов  $\eta_z^{(l)s}$  и обусловленных силами инерции дополнительных прогибов  $\eta_z^{(l)d}$ :

$$\eta_z^{(l)} = \eta_z^{(l)s} + \eta_z^{(l)d}. \quad (16)$$

Функции  $\eta_z^{(l)s}$  ( $l = 0, 1$ ) удовлетворяют краевой задаче

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 \eta_z^{(l)s} = 0, \quad (17)$$

$$\eta_z^{(l)s} = 0, \quad \partial^2 \eta_z^{(l)s} / \partial \rho^2 + (\nu/\rho) \partial \eta_z^{(l)s} / \partial \rho + X_T^{(l)} = 0 \quad \text{при } \rho = 1.$$

Решения системы (17), согласно работе [1], имеют вид

$$\eta_z^{(l)s} = (1 - \rho^2) X_T^{(l)} / 2 (1 + \nu) \quad (l = 0, 1). \quad (18)$$

Для нахождения прогибов  $\eta_z^{(l)d}$  с учетом формул (15) — (18) получаем дифференциальное уравнение

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 \eta_z^{(l)d} + \kappa_0^2 \partial^2 \eta_z^{(l)d} / \partial \tau^2 = -[(1 - \rho^2) \kappa_0^2 / 2 (1 + \nu)] \times$$

$$\times \partial^2 X_T^{(l)} / \partial \tau^2 - A_{\kappa} \kappa_1^2(\tau) (\partial^2 \eta_z^{(l-1)d} / \partial \tau^2) \delta_l^l \quad (19)$$

при начальных и граничных условиях

$$\begin{aligned} \eta_z^{(l)d} = 0, \quad \frac{\partial \eta_z^{(l)a}}{\partial \tau} &= -\frac{(1-\rho^2)}{2(1+\nu)} \frac{\partial X_T^{(l)}}{\partial \tau} \quad \text{при } \tau = 0, \\ \eta_z^{(l)d} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta_z^{(l)}}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial \eta_z^{(l)}}{\partial \rho} &= 0 \quad \text{при } \rho = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Для нахождения  $\eta_z^{(0,a)}$  и каждой из реализаций  $\eta_z^{(1)d}$  применяем метод разложения искомым функций в ряд по собственным функциям. После соответствующих вычислений получаем

$$\eta_z^{(l)d} = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m^{(l)}(\rho) q_m^{(l)}(\tau), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_m^{(l)}(\rho) &= I_0(\alpha_{lm}) J_0(\alpha_{lm}\rho) - J_0(\alpha_{lm}) I_0(\alpha_{lm}\rho); \\ q_m^{(l)}(\tau) &= \left\{ \int_0^1 (1-\rho^2) \rho \eta_m^{(l)}(\rho) d\rho \left[ \dot{X}_m^{(l)}(0) \sin \alpha_{lm}^2 B_l^2 \tau + \int_0^\tau \ddot{X}_T(\tau') \sin \alpha_{lm}^2 B_l^2 (\tau - \tau') \times \right. \right. \\ &\times d\tau' \left. \right] / 2(1+\nu) + \int_0^1 \rho \eta_m^{(l)}(\rho) d\rho + \int_0^\tau \ddot{\eta}_z^{(l-1)d}(\tau') \kappa_1^2(\tau') \sin \alpha_{lm}^2 B_l^2 (\tau - \tau') d\tau' \left. \right\} \times \\ &\times N_m^{(l)} \alpha_{lm}^2 B_l^2; \end{aligned} \quad (22)$$

$$N_m^{(l)} = J_0(\alpha_{lm}) D_{lm} / (1-\nu);$$

$$D_{lm} = \alpha_{lm} [I_0(\alpha_{lm}) J_1(\alpha_{lm}) - J_0(\alpha_{lm}) I_1(\alpha_{lm})] - (1+\nu) J_0(\alpha_{lm}) I_0(\alpha_{lm});$$

$$B_0^2 = 1/\kappa_0^2; \quad B_1^2 = 1/A_{\kappa};$$

собственные значения  $\alpha_{lm}$  — корни трансцендентного уравнения

$$\frac{J_1(\alpha)}{J_0(\alpha)} + \frac{I_1(\alpha)}{I_0(\alpha)} = \frac{2\alpha}{1-\nu};$$

$J_k(x)$ ,  $I_k(x)$  ( $k = 0, 1$ ) — функции Бесселя действительного и чисто мнимого аргументов первого рода.

Из решений (2), (3), (18), (21), (22) следует, что температура и прогибы рассматриваемой пластины линейно зависят от случайных функций  $q^{(1)}(\tau)$  и  $\kappa_1^2(\tau)$ . Таким образом, в пределах корреляционной теории статистические характеристики температурного поля и прогибов круглой пластины будут выражаться через соответствующие вероятностные оценки теплового потока  $q^{(1)}$  и коэффициента  $\kappa_1^2$ .

Пусть случайные функции  $q^{(1)}(\tau)$  и  $\kappa_1^2(\tau)$  представлены каноническими разложениями [3]

$$q^{(1)}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{1k} \cos \omega_{1k}\tau, \quad \kappa_1^2(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{2k} \cos \omega_{2k}\tau, \quad (23)$$

где  $\xi_{1k}$ ,  $\xi_{2k}$  — некоррелированные случайные переменные с нулевыми значениями математических ожиданий и ограниченными дисперсиями  $D_{1k}$  и  $D_{2k}$  соответственно.

Корреляционные функции и дисперсии квазистатического и динамического прогибов для рассматриваемой пластины имеют вид

$$\begin{aligned} K_{u_z^s} &= \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} D_{1k} u_{2k}^{(1)s}(\rho, \tau) u_{2k}^{(1)s}(\rho', \tau'), \\ K_{u_z^d} &= \varepsilon^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} D_{lk} u_{2lk}^{(1)d}(\rho, \tau) u_{2lk}^{(1)d}(\rho', \tau'), \end{aligned} \quad (24)$$

$$D_{u_z^s} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} D_{1k} |u_{zk}^{(1)s}(\rho, \tau)|^2,$$

$$D_{u_z^d} = \varepsilon^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} D_{ik} |u_{rik}^{(1)d}(\rho, \tau)|^2,$$

где функции  $u_{zk}^{(1)s}$ ,  $u_{zik}^{(1)d}$  определяются выражениями (18) и (21) с учетом (23) соответственно.

В случае, когда случайные переменные  $\xi_{1k}$  и  $\xi_{2k}$  имеют гауссовские законы распределения, на основании математических ожиданий  $u_z^{(0)s}$ ,  $u_z^{(0)d}$  и дисперсий  $D_{u_z^s}$ ,  $D_{u_z^d}$  можно определять вероятности изменения квазистатического и динамического прогибов пластины при фиксированных значениях  $\rho_c$ ,  $\tau_c$  в заданных интервалах.

1. Коваленко А. Д. Основы термоупругости.— Киев : Наук. думка, 1970.— 307 с.
2. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел.— М. : Наука, 1970.— 139 с.
3. Пугачев В. С. Теория случайных функций.— М. : Физматгиз, 1960.— 884 с.
4. Швец Р. Н., Елейко В. И. Стохастическая задача теплопроводности для пластины.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 20—26.
5. Швец Р. Н., Елейко В. И. Колебания трансверсально-изотропных пластин, возбужденные случайным температурным полем.— В кн.: Композиционные материалы и новые конструкции. Киев : Наук. думка, 1977, с. 60—65.

Институт прикладных проблем  
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
19.11.79

УДК 539.377

Р. Н. Швец, В. М. Флячок

#### ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Вариационные принципы теории упругости нашли широкое применение в теории оболочек и часто используются для получения как основных дифференциальных уравнений, так и приближенных решений [1—6]. В настоящей статье предложен вариационный принцип, характеризующий линейную краевую задачу с неоднородными начальными условиями для термоупругих анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвиговых и нормальных деформаций. Из сформулированного принципа выведена теорема взаимности, которая используется для представления решений рассматриваемых задач в квадратурах.

1. Основные уравнения теории сопряженной термоупругости анизотропных оболочек. Рассмотрим анизотропную оболочку с постоянной толщиной, срединная поверхность  $G$  которой ограничена контуром  $g$  и отнесена к ортогональным координатам  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2$ ). Пусть  $k_i$  — главные кривизны;  $A_j$  — коэффициенты Ламе. Под воздействием силовых и температурных факторов в оболочке возникнут: поле перемещений  $u_r$ ,  $\gamma_r$  и потоки тепла  $H_r^{(t)}$ ; температурное поле  $T_j$  и энтропия  $S_j$ , усилия-моменты  $N = \{N_{ij}; Q_i; N_{33}; M_{ij}; M_{i3}\}$  и деформации  $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}; \varepsilon_{i3}; \varepsilon_{33}; \kappa_{ij}; \kappa_{i3}\}$  как функции координат  $\alpha_j$  и времени  $\tau$ .

Если предположить, что перечисленные функции обладают соответствующими свойствами гладкости, то термомеханическое состояние оболочки описывается [6,7] уравнениями движения

$$L_1^q(N) \equiv (A_1 A_2)^{-1} [(A_2 N_{11})_{,1} - A_{2,1} N_{22} + A_{1,2} N_{12} + (A_1 N_{21})_{,2} + A_1 A_2 k_1 Q_1] = \rho_1 u_1 - q_1 \quad (1 \neq 2), \quad (1)$$