

$$W_k^l = (2k - 1)(A_1 A_2)^{-1} \delta(\alpha_j - n_j) \delta(\tau) \quad (20)$$

в точке  $(\eta_j = \eta_{j1}, \eta_{j2})$ . Решение исходной системы при действии термической нагрузки (20) и однородных граничных и начальных условиях обозначим  $u_r^{(k)}, \gamma_r^{(k)}, T_l^{(k)}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} T_k(\eta_j, \tau) = & \iint_G \left[ \sum_l^2 \frac{W_l^l * T_l^{(k)}}{2l-1} + \frac{\lambda_{33}}{h^2} (\mu_1 t_i^c * T_1^{(k)} + \mu_{3-} t_i^c * T_2^{(k)}) \right] dG - \\ & - \frac{T_0}{2h} \iint_G (q_r * \dot{u}_r^{(k)} + m_r * \dot{\gamma}_r^{(k)}) dG + \frac{T_0}{2h} \int_G (\dot{N}_j^{(k)} * \bar{u}_j + \dots + \\ & + M_3^{(k)} * \bar{\gamma}_3) dg + \int_G \sum_l^2 \frac{\bar{T}_l * H_n^{(k)}(t)}{2l-1} dg. \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношения (19), (21) учитывают влияние различных факторов, вызывающих поле температуры и перемещений, и могут упрощаться.

1. Айнола Л. А. Вариационные принципы и теорема взаимности для динамических задач теории оболочек.— В кн.: Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966, с. 9—13.
2. Абовский И. Н., Андреев Н. П., Деруга А. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек.— М.: Наука, 1978.— 287 с.
3. Болотин В. В. О вариационных принципах теории упругой устойчивости.— В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. М., 1970, с. 83—88.
4. Новичков Ю. Н. Вариационные принципы динамики и устойчивости многослойных оболочек.— Тр. Моск. энергет. ин-та. 1973, вып. 164, с. 14—22.
5. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек.— Киев: Наук. думка, 1978.— 343 с.
6. Швец Р. Н., Флячок В. М. Основные уравнения термоупругих ортотропных оболочек с учетом поперечных сдвиговых и нормальных деформаций.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 6, с. 540—545.
7. Швец Р. Н., Флячок В. М. Некоторые теоремы теории термоупругости анизотропных оболочек.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 6, с. 527—532.
8. Nickell R. E., Sackman I. Variational principles for linear coupled thermoelasticity.— Quart. Appl. Math., 1968, 26, N 1, p. 540—545.

Институт прикладных проблем  
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
24.01.79

УДК 539.63

П. П. Доманский

#### ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ УДАРНОЙ СИЛОВОЙ НАГРУЗКЕ

Пусть тонкостенная круговая цилиндрическая оболочка радиуса  $R$ , толщины  $2h$ , длины  $a$  в момент времени  $\tau = 0$  подвергается воздействию ударной осесимметричной нормальной силовой нагрузки  $P = P(\alpha)$  и равномерно распределенных по краям  $\alpha = 0, \frac{a}{R}$  изгибающих моментов интенсивности  $M_{10}$  и  $M_{20}$  соответственно, которые для  $\tau > 0$  поддерживаются неизменными во времени. Здесь  $\alpha = \frac{x}{R}$ ;  $x$  — осевая координата. Ставим задачу об определении такого распределения нагрузки  $P = P(\alpha)$  и интенсивности изгибающих моментов  $M_{10}$  и  $M_{20}$ , при которых динамические эффекты в оболочке оптимально низки. Уравнения движения цилиндрической оболочки в перемещениях имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} - c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \\ & c_1^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + w + \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + c_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = P_1(\alpha) S(\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$c_2^2 = \frac{\rho R^2 (1 - \nu^2)}{E}; \quad c_1^2 = \frac{h^2}{3R^2}; \quad P_1 = \frac{R^2 (1 - \nu^2)}{2Eh} P_*$$

$$P_* = P(\alpha) + P_M(\alpha); \quad P_M(\alpha) = M_{10} \delta_+(\alpha) + M_{20} \delta_-\left(\frac{a}{R} - \alpha\right) -$$

эквивалентная приложенным изгибающим моментам радиальная нагрузка;  $\rho$  — плотность материала оболочки;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль упругости;  $w = \frac{w_0}{R}$ ;  $u = \frac{u_0}{R}$ ;  $u_0$  и  $w_0$  — компоненты вектора перемещений;  $S(\tau)$  — единичная функция Хевисайда;  $\delta_+(\alpha)$  и  $\delta_-\left(\frac{a}{R} - \alpha\right)$  — производные от асимметричных дельта-функций.

В качестве граничных условий на краях цилиндрической оболочки, которая находится под воздействием эквивалентной радиальной нагрузки  $P_*(\alpha)$ , принимались условия шарнирного опирания, т. е. при  $\alpha = 0, \frac{a}{R}$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \quad (2)$$

и нулевые начальные условия при  $\tau = 0$ , т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0, \quad u = w = 0. \quad (3)$$

Искомую функцию внешней нагрузки  $P_1(\alpha)$  представим в виде

$$P_1(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n \alpha). \quad (4)$$

Для граничных условий (2) решение задачи (1) — (3) естественно искать в форме разложений

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\tau) \cos(\lambda_n \alpha), \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\tau) \sin(\lambda_n \alpha), \quad (5)$$

где

$$\lambda_n = \frac{n\pi R}{a}; \quad A_n = A_n^* - \lambda_n (M_{10} + (-1)^{n+1} M_{20}) \frac{R}{a}; \quad (6)$$

$A_n^*$  — коэффициенты разложения функции  $\frac{R^2 (1 - \nu^2)}{2Eh} P(\alpha)$ .

Для коэффициентов разложений  $u_n(\tau)$  и  $w_n(\tau)$  получаем систему уравнений

$$c_2^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} + \lambda_n^2 u_n - \nu \lambda_n w_n = 0,$$

$$c_2^2 \frac{\partial^2 w_n}{\partial \tau^2} + (1 + c_1^2 \lambda_n^4) w_n - \nu \lambda_n u_n = A_n S(\tau),$$

решая которую с учетом нулевых начальных условий, получаем

$$u_n(\tau) = \frac{\nu \lambda_n A_n S(\tau)}{b_{4n}} \left( 1 + \frac{\lambda_{3n}^2}{\lambda_{1n}^2 - \lambda_{3n}^2} \cos(\lambda_{1n} \tau) - \frac{\lambda_{1n}^2}{\lambda_{1n}^2 - \lambda_{3n}^2} \cos(\lambda_{3n} \tau) \right),$$

$$w_n(\tau) = \frac{\lambda_n^2 A_n S(\tau)}{b_{4n}} \left( 1 - \frac{\lambda_{3n}^2 (c_2^2 \lambda_{1n}^2 - \lambda_n^2)}{\lambda_n^2 (\lambda_{1n}^2 - \lambda_{3n}^2)} \cos(\lambda_{1n} \tau) + \frac{\lambda_{1n}^2 (c_2^2 \lambda_{3n}^2 - \lambda_n^2)}{\lambda_n^2 (\lambda_{1n}^2 - \lambda_{3n}^2)} \cos(\lambda_{3n} \tau) \right),$$

где

$$b_{3n} = 1 + \lambda_n^2 + c_1^2 \lambda_n^4; \quad b_{4n} = \lambda_n^2 (1 - \nu^2 + c_1^2 \lambda_n^4);$$

$$\lambda_{1n} = \frac{1}{c_2 \sqrt{2}} \sqrt{b_{3n} + \sqrt{b_{3n}^2 - 4b_{4n}}}; \quad \lambda_{3n} = \frac{1}{c_2 \sqrt{2}} \sqrt{b_{3n} - \sqrt{b_{3n}^2 - 4b_{4n}}}.$$

В качестве функционального условия оптимальности принимаем условие минимума кинетической энергии оболочки. Функционал кинетической энергии цилиндрической оболочки на промежутке времени  $0 \leq \tau \leq \tau_1$

запишется так:

$$K = 2h\rho\pi \int_0^{\tau_1} \int_0^{\frac{a}{R}} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 + c_1^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \tau} \right)^2 \right] dz d\tau. \quad (7)$$

Экстремали этого функционала находим на множестве допустимых функций  $P_1(\alpha)$ , каждая из которых удовлетворяет системе условий изопериметрической задачи

$$\int_0^{\frac{a}{R}} \left( \alpha - \frac{a}{2R} \right)^k P_1(\alpha) d\alpha = D_k \quad (k = \overline{0, m}). \quad (8)$$

Здесь  $D_k$  — постоянные инвариантные по отношению к множеству допустимых функций  $P_1(\alpha)$ .

Сформулированная задача сводится к отысканию экстремалей функционала

$$K^* = 2h\rho\pi \left\{ \int_0^{\tau_1} \int_0^{\frac{a}{R}} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 + c_1^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \tau} \right)^2 \right] d\alpha d\tau + \sum_{k=0}^m \int_0^{\frac{a}{R}} \gamma_k \left( \alpha - \frac{a}{2R} \right)^k P_1(\alpha) d\alpha \right\}, \quad (9)$$

где  $\gamma_k$  — множители Лагранжа. Подставляя сюда представления (4), (5) и выполняя интегрирование, получаем

$$K^* = \frac{h\rho\pi a}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n^2 [B_n + C_n(1 + c_1^2 \lambda_n^2)] + \frac{2R}{a} S_n A_n \right\}. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\frac{a}{R}} \sum_{k=0}^m \gamma_k \left( \alpha - \frac{a}{2R} \right)^k \sin(\lambda_n \alpha) d\alpha; \\ B_n &= L_n^2 a_{1n} + 2K_n L_n a_{2n} + K_n^2 a_{3n}; \\ C_n &= M_n^2 a_{1n} + 2M_n N_n a_{2n} + N_n^2 a_{3n}; \\ a_{1n} &= \tau_1 - \frac{\sin(2\lambda_{1n} \tau_1)}{2\lambda_{1n}}; \quad a_{3n} = \tau_1 - \frac{\sin(2\lambda_{3n} \tau_1)}{2\lambda_{3n}}; \\ a_{2n} &= \frac{\sin(\lambda_{1n} + \lambda_{3n}) \tau_1}{\lambda_{1n} + \lambda_{3n}} - \frac{\sin(\lambda_{1n} - \lambda_{3n}) \tau_1}{\lambda_{1n} - \lambda_{3n}}; \\ K_n &= \frac{\nu \lambda_n \lambda_{1n}}{\lambda_{2n}}; \quad L_n = \frac{\nu \lambda_n \lambda_{3n}}{\lambda_{2n}}; \quad M_n = \frac{\sqrt{b_{4n} \lambda_{1n} - \lambda_n^2 \lambda_{3n}}}{\lambda_{2n}}; \\ N_n &= \frac{\lambda_{3n} \sqrt{b_{4n} - \lambda_n^2 \lambda_{1n}}}{\lambda_{2n}}; \quad \lambda_{2n} = \sqrt{2b_{4n}(b_{3n}^2 - 4b_{4n})}. \end{aligned}$$

Из необходимого условия экстремума выражения (10) по коэффициентам  $A_n$  разложения допустимых функций следует, что

$$A_n = - \frac{RS_n}{a[B_n + C_n(1 + c_1^2 \lambda_n^2)]}. \quad (11)$$

Представив выражение (11) в виде (6), найдем искомые интенсивности моментов  $M_{10}$  и  $M_{20}$ , а также коэффициенты  $A_n^*$  разложения функции  $\frac{R^2(1-\nu^2)}{2Eh} P(\alpha)$ .

В качестве примера рассмотрим решение задачи в случае  $m = 0$ , т. е.

$$\int_0^{\frac{a}{R}} P_1(\alpha) d\alpha = D_0. \quad (12)$$

Тогда

$$S_n = \int_0^{\frac{a}{R}} \gamma_0 \sin(\lambda_n \alpha) d\alpha = \frac{\gamma_0}{\lambda_n} [1 + (-1)^{n+1}].$$

Выражение (11) для коэффициентов  $A_n$  запишется так:

$$A_n = \frac{R\gamma_0}{a} \left[ \frac{2c_2^2}{c_1^2 \tau_1 \lambda_n} - \frac{F(\lambda_n)}{\lambda_n} - \frac{2c_2^2}{\tau_1} \lambda_n \right] [1 + (-1)^{n+1}]. \quad (13)$$

Здесь

$$F(\lambda_n) = \frac{1}{B_n + C_n (1 + c_1^2 \lambda_n^2)} - \frac{2c_2^2 \lambda_n^2}{\tau_1} + \frac{2c_2^2}{c_1^2 \tau_1}.$$

Из формулы (13) следует, что

$$A_n^* = \frac{R\gamma_0}{a\lambda_n} \left[ \frac{2c_2^2}{c_1^2 \tau_1} - F(\lambda_n) \right], M_{10} = M_{20} = \frac{2c_2^2 \gamma_0}{\tau_1},$$

где множитель Лагранжа  $\gamma_0$  определяется из условия (12).

Численные исследования выполнены для цилиндрической оболочки при

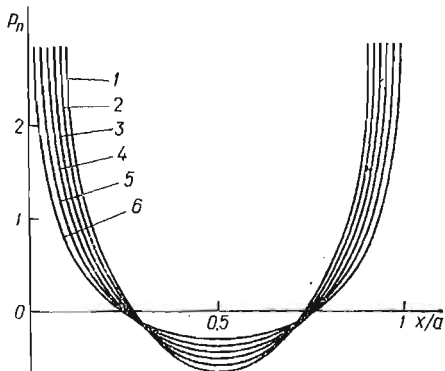


Рис. 1

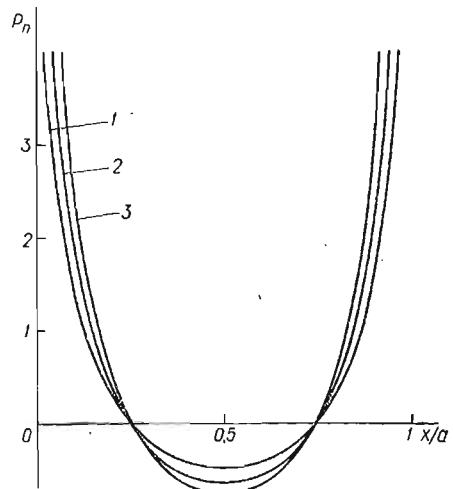


Рис. 2

$\nu = 0,3$ ,  $E = 2,23 \cdot 10^{-2}$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\rho = 7,75 \cdot 10^{-6}$  кг/мм<sup>3</sup>,  $\tau_1 = 1$  с. На рис. 1 показано распределение приведенной силовой нагрузки  $P_n(\alpha) = \frac{R^2(1-\nu^2)}{2EhD_0} P(\alpha)$  при  $\frac{h}{R} = \frac{1}{40}$  и различных значениях отношения  $\frac{a}{R} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  (кривые 1—6 соответственно). На рис. 2 представлено распределение силовой нагрузки  $P_n(\alpha)$  при  $\frac{a}{R} = 2$  и значениях  $\frac{h}{R} = \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{120}$  (кривые 1—3 соответственно). Следует отметить, что с изменением значения  $\tau_1$  распределение силовой нагрузки меняется незначительно.

Проведенное сравнение прогибов цилиндрической оболочки при оптимальном распределении силовой нагрузки  $P_1 = P_1(\alpha)$  с прогибами, возникающими при силовой нагрузке постоянной интенсивности, удовлетворяющей интегральному ограничению (12), показало, что максимальные прогибы при оптимальной силовой нагрузке на порядок ниже прогибов при ударной нагрузке постоянной интенсивности.