нения (3) границы исходной области D. Переход к новым переменным может усложнить первоначальную область, но в данном методе это не играет никакой роли. Поэтому стало возможным написание стандартной программы решения рассматриваемой задачи на ЭВМ в произвольной области. При использовании ее в конкретном случае требуется написать только процедуру вычисления функций $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$, $\varphi'(\sigma)$, $\psi'(\sigma)$, $\alpha(\sigma)$, $f(\sigma)$ в зависимости от σ. Программа составлена в кодах ЭВМ типа «М-200» на языке ФОРТРАН-IV. Интегральное уравнение (10) решается путем замены его системой линейных алгебраических уравнений способом, указанным в работе [1]. Правильность и точность предлагаемого метода проверены на контрольных задачах с известными решениями.

В качестве примера проведен расчет температуры пластинки, форма которой изображена на рис. 1. Граничные условия были взяты следующими. На участке 0—1: $\alpha = 0, f = q_s = 0{,}1 \cdot 10^6$ ккал/м^2 · ч, на остальной части внешней границы $\alpha = 0$, $f = 0$, т. е. стенки теплоизолированы. На внутренних границах задано условие (2) при $\alpha = 0{,}5 \cdot 10^5$ ккал/м^2 · ч · град, $f = \alpha T_c$, $T_c = 0°$ С. Геометрические размеры области: длина участка 0—1 равна 0,1 м, участка 1—2 равна 0,15 м. Радиус окружности 0,0141 м, центр ее находится в точке (0,025; 0,05), длина стороны квадрата равна 0,0125 м, центр — в точке (0,075; 0,05). Площадь квадрата равна площади круга. Расчеты проводили при $\lambda_x = 100$ ккал/м·ч·град, $\lambda_y = \lambda = 250$ ккал/м × × ч · град, $T_1 = 50°$ С, $\alpha_1 = 100$ ккал/м^2 · ч · град, $h = 0{,}005$ м. На рис. 2 приведено распределение температуры вдоль двух внешних сторон при $\varkappa = 0$ (кривая *1*), $\varkappa = 0{,}1$ (кривая *2*). Несовпадение этих двух кривых показывает влияние на теплообмен внутренних отверстий в виде квадрата и круга. При одинаковой их площади это отличие невелико. Там же (кривая *3*) приведено распределение температуры для изотропной пластинки при $\lambda_x = \lambda_y = 250$ ккал/м · ч · град.

1. *Бобрик А. И., Михайлов В. Н.* Об одном методе численного решения линейного интегрального уравнения.— Вест. Яросл. ун-та, 1974, вып. 10, с. 65—69.
2. *Бобрик А. И., Михайлов В. Н.* Расчет нелинейных температурных полей в сложных двумерных областях.— Прикл. механика, 1976, № 4, с. 69—74.
3. *Метод граничных* интегральных уравнений : Сб. статей.— М. : Мир, 1978.— 210 с.
4. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.
5. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики.— М. : Высш. школа, 1962.— 560 с.

г. Подольск — Поступила в редколлегию 20.10.79

УДК 539.32+552.1 : 53

А. С. Федоришин

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХФАЗНЫХ СРЕД ОТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ФАЗ

Одним из основных вопросов механики неоднородных сред является вычисление макроскопических упругих модулей в зависимости от объемного содержания фаз. Они должны находиться между верхней и нижней границами Хашина — Штрикмана и зависеть от геометрической структуры фаз. Эффективные модули упругости двухфазных сред с включениями в виде эллипсоидов вращения получены в работах [2, 3]. В этих статьях пренебрегали флуктуациями деформаций внутри фаз. В настоящей работе показано, что если не пренебрегать флуктуациями деформаций в пределах фаз, то даже при фиксированном значении соотношения полуосей эллипсоида вращения эффективные модули упругости характеризуются не конкретными значениями, а изменяются в некоторых пределах. Точное значение макроскопических модулей зависит от взаимного расположения включений.

Тензор эффективных модулей упругости определим исходя из уравнения равновесия для внешних напряжений

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -g_i, \quad \sigma_{ij} = \Lambda_{ijlm}\varepsilon_{lm}, \quad e_{iln}e_{jmp}\frac{\partial^2 \varepsilon_{np}}{\partial x_l \partial x_m} = 0. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам производится суммирование. Из уравнения (1) можно получить

$$L_{ijlm}\frac{\partial^2 (u_l - u_l^c)}{\partial x_j \partial x_m} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\Lambda_{ijlm} - L_{ijlm})\,\varepsilon_{lm}\right], \tag{2}$$

где L_{ijlm} — тензор модулей упругости некоторого однородного тела (тела сравнения); u_l^c — поле перемещений в теле сравнения, вызванное массовыми силами g_l. Представим уравнение (2) в интегральном виде

$$\varepsilon_{ij}(r_1) = \varepsilon_{ij}^c + \int K_{ijl}(r_1 - r_2)\frac{\partial}{\partial x_{2m}}\left[(\Lambda_{lmnp} - L_{lmnp})\,\varepsilon_{np}(r_2)\right] dS_2 +$$

$$+ \int \frac{\partial}{\partial x_{1m}} K_{ijl}(r_1 - r_2)\left[(\Lambda_{lmnp} - L_{lmnp})\,\varepsilon_{np}(r_2)\right] dV_2, \tag{3}$$

$$K_{ijl}(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}G_{jl}(r) + \frac{\partial}{\partial x_j}G_{il}(r)\right]$$

(G_{il} — функция Грина уравнения равновесия). Поверхностный интеграл здесь следует рассматривать как осреднение подынтегральной функции [4], поэтому случайные функции находим только в объемном интеграле. Осредняя уравнение (3) и представляя ε_{ij} через среднее значение и флуктуацию, получаем

$$\varepsilon_{ij}(r_1) = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + \int K_{ijlm}(r_1 - r_2)\left[(\Lambda_{lmnp} - L_{lmnp})\,\varepsilon_{np}(r_2) - \right.$$

$$\left. - \langle(\Lambda_{lmnp} - L_{lmnp})\,\varepsilon_{np}\rangle\right] dV_2, \tag{4}$$

$$K_{ijlm}(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_m}K_{ijl}(r) + \frac{\partial}{\partial x_l}K_{ijm}(r)\right].$$

Далее будем следовать методу условных моментов [3]. Для смеси n фаз получим

$$\langle\sigma\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k\Lambda_k\langle\varepsilon_k\rangle, \tag{5}$$

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = \langle\varepsilon\rangle + \int K(r)\sum_{k=1}^{n}(\Lambda_k - L)\left[p_{\nu k}(r)\,\varepsilon^{\nu k}(r) - c_k\langle\varepsilon_k\rangle\right] dV. \tag{6}$$

Для сокращения записи в тензорах, входящих в уравнения (5), (6), индексы опущены, а под произведением тензоров следует понимать их свертывание по внутренним индексам. Этой же символикой будем пользоваться и в дальнейшем. Пусть $p_{\nu k}(r_1 - r_2)$ — вероятность нахождения в точке r_2 фазы k при условии, что в точке r_1 находится фаза ν; $\varepsilon^{\nu k}(r_1 - r_2)$ — математическое ожидание деформации в точке r_2 при условии, что в ней находится фаза k, а в точке r_1 — фаза ν; Λ_k — тензор модулей упругости k-й фазы. Из определения функций $p_{\nu k}(r)$ следует, что они должны обладать следующими свойствами: $p_{\nu k}(0) = \delta_{\nu k}$, $p_{\nu k}(\infty) = c_k$, т. е. их можно представить в виде

$$p_{\nu k}(r) = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k)\,f(r), \tag{7}$$

причем $f(0) = 1$, $f(\infty) = 0$. Подставляя соотношение (7) в (6) и проводя некоторые перегруппировки, получаем

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = \langle\varepsilon\rangle + \int K(r)\,f(r)\,dV\sum_{k=1}^{n}(\delta_{\nu k} - c_k)(\Lambda_k - L)\langle\varepsilon_k\rangle +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}(\Lambda_k - L)\int K(r)\,p_{\nu k}(r)\left[\varepsilon^{k\nu}(r) - \langle\varepsilon_k\rangle\right] dV. \tag{8}$$

Тензор L_{ijkl} до сих пор был произвольным. Здесь определим его равенством

$$\sum_{k=1}^{n} (\Lambda_k - L) \int K(r)\, p_{\nu k}(r)\, [\varepsilon^{\nu k}(r) - \langle\varepsilon_k\rangle]\, dV = 0. \tag{9}$$

Теперь для определения $\langle\varepsilon_\nu\rangle$ имеем алгебраическое уравнение

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = \langle\varepsilon\rangle + K \sum_{k=1}^{n} (\delta_{\nu k} - c_k)(\Lambda_k - L)\langle\varepsilon_k\rangle, \tag{10}$$

$$K = \int K(r) f(r)\, dV.$$

Для среды с ориентированными в одном направлении включениями в виде эллипсоидов вращения функция $f(r)$ имеет вид [3]

$$f(r) = \exp\left(-\frac{8}{c_2\pi^2} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}\right),$$

где a, b — полуоси эллипсоида вращения.

В уравнениях (5) и (10) под ν и k следует понимать не только фазы с определенными физическими свойствами, но и ориентацию, форму, размеры включений. Для среды с хаотической ориентацией включений имеем

$$\langle\sigma\rangle = \Lambda_1 \sum_n s_n \langle\varepsilon_1^n\rangle + \Lambda_2 c_2 \langle\varepsilon_2\rangle, \tag{11}$$

$$\langle\varepsilon_1^n\rangle = \langle\varepsilon\rangle + K\,[(\Lambda_1 - L)(\langle\varepsilon_1^n\rangle - c_1\langle\varepsilon_1\rangle) - c_2\langle\varepsilon_2\rangle]. \tag{12}$$

Здесь s_n, $\langle\varepsilon_1^n\rangle$ — концентрация и средняя деформация включений n-го направления. Для определения эффективных модулей упругости необходимо решить уравнение (12) относительно $\langle\varepsilon_1^n\rangle$ и подставить это решение в уравнение (11). Опуская промежуточные выкладки, приведем выражения для K^* и μ^*:

$$K^* = \frac{c_2K_2 + c_1K_1T_k}{c_2 + c_1T_k}, \quad \mu^* = \frac{c_2\mu_2 + c_1\mu_1T_\mu}{c_2 + c_1T_\mu}, \tag{13}$$

$$T_k = \frac{1}{3} T_{iikk}, \quad T_\mu = \frac{1}{15}(3T_{ikik} - T_{iikk}). \tag{14}$$

Компоненты тензора T_{ijkl} в двухиндексном обозначении имеют вид

$$T_{11} + T_{12} = T_{21} + T_{22} = \frac{1}{\Delta}[(1 - M_{11}^2 - M_{12}^2)(1 - M_{33}^1) - 2M_{13}^1M_{31}^2],$$

$$T_{13} = T_{23} = \frac{1}{\Delta}[(1 - M_{33}^2)M_{13}^1 - (1 - M_{33}^1)M_{13}^2],$$

$$T_{31} = T_{32} = \frac{1}{\Delta}[(1 - M_{11}^2 - M_{12}^2)M_{31}^1 - (1 - M_{11}^1 - M_{12}^1)M_{31}^2],$$

$$T_{33} = \frac{1}{\Delta}[(1 - M_{11}^1 - M_{12}^1)(1 - M_{33}^2) - 2M_{13}^2M_{31}^1],$$

$$\Delta = (1 - M_{11}^1 - M_{12}^1)(1 - M_{33}^1) - 2M_{13}^1M_{31}^1,$$

$$T_{44} = T_{55} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - 2M_{44}^2}{1 - 2M_{44}^1}, \quad T_{66} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - 2M_{66}^2}{1 - 2M_{44}^1},$$

$$M_{11}^i + M_{12}^i = a_iQ_1 + b_iQ_2,$$

$$M_{13}^i = -a_iQ_1 + d_iQ_2, \quad M_{31}^i = -a_iQ_1 - 2d_i(Q_2 + 1),$$

$$M_{33}^i = 2a_iQ_1 - 2(b_i - d_i)(Q_2 + 1),$$

$$M_{55}^i = -a_iQ_1 - e_i(Q_2 + 1), \tag{15}$$

$$M_{66}^i = \frac{1}{4}a_iQ_1 + \left(2e_i - \frac{1}{4}a_i\right)Q_2,$$

$$Q_1 = \frac{3\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} - \frac{\alpha(1+2\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^{5/2}} \arcsin\sqrt{1-\alpha^2},$$

$$Q_2 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} - \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}} \arcsin\sqrt{1-\alpha^2}, \quad \alpha = \frac{b}{a},$$

$$a_i = \frac{m_i(l+m)}{2m(l+2m)}, \quad b_i = \frac{l_i+m_i}{l+2m}, \quad d_i = \frac{l_i}{2(l+2m)}, \quad e_i = \frac{m_i}{2m},$$

$$l_i = \lambda_i - l, \ m_i = \mu_i - m, \ n = l + \frac{2}{3}m, \quad i = 1, 2.$$

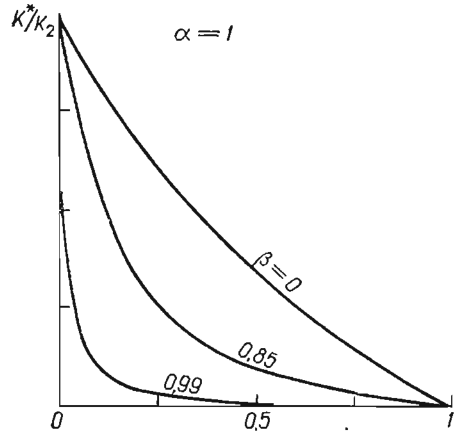

Рис. 1

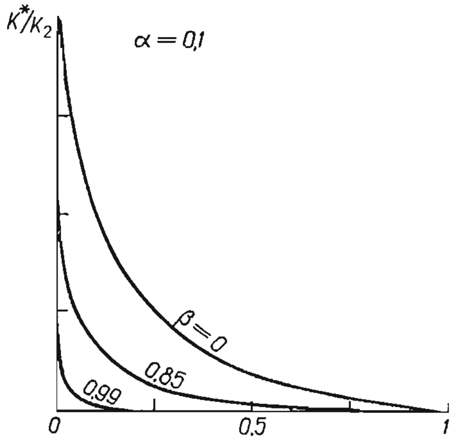

Рис. 2

Соотношения (15) справедливы для любого α, так как

$$\frac{\arcsin\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Проанализируем теперь влияние параметров m и n на эффективные модули упругости. Для этого введем параметр β равенствами $n = \beta K_1 + (1-\beta) K_2$, $m = \beta\mu_1 + (1-\beta)\mu_2$ для сред с мягкими включениями и

$$\frac{1}{n} = \frac{\beta}{K_1} + \frac{1-\beta}{K_2}; \quad \frac{1}{m} = \frac{\beta}{\mu_1} + \frac{1-\beta}{\mu_2}$$

для сред с твердыми включениями. На рис. 1, 2 показана зависимость K^* от концентрации пор для пористой среды при различных значениях α и β. Коэффициент Пуассона для скелета принят равным 0,25. На рис. 3, 4 приведены те же зависимости только для сред с твердыми включениями при

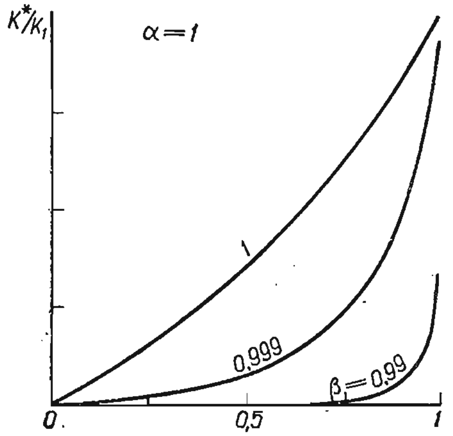

Рис. 3

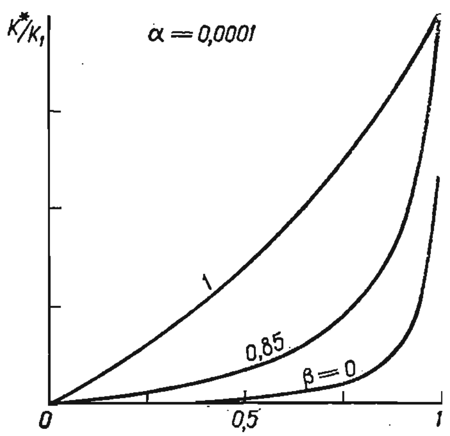

Рис. 4

$K_1/K_2 = 10^5$. Интересен тот факт, что для твердых сферических включений при $c_1 = 0{,}95$ и $\beta = 0$ модуль сжатия композита довольно низкий по сравнению с модулем сжатия включения, тогда как при $\beta = 1$ они примерно равны. Для сферических пустот при концентрации последних 0,05 и $\beta = 0$ $K^* \approx K_2$, а при $\beta = 1$ $K^* = 0$, т. е. материал теряет сплошность. В работе [1] получено выражение для K^* двухфазного неоднородного материала с изолированными сферическими включениями, совпадающее с выражением [13] при $\alpha = 1$ и $\beta = 0$.

Исходя из изложенного можно предположить, что от параметра β, определяющего модули упругости тела сравнения, зависит связность включений. Если все включения изолированы один от другого, то $\beta = 0$, а если контактируют, то следует принять $\beta = 1$. Введение параметра связности включений могло бы быть полезным при изучении коллекторских свойств горных пород.

В работе [3] принято, что $n = \langle K \rangle$, $m = \langle \mu \rangle$ для сред с мягкими включениями и $\frac{1}{n} = \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle$, $\frac{1}{m} = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle$ для сред с твердыми включениями, т. е. принято, что $\beta = c_1$. Это хорошо согласуется с замечанием, сделанным в работе [1], что количество контактируемых включений должно быть возрастающей функцией их объема.

1. *Хашин З.* Упругие модули неоднородных материалов.— Прикл. механика. Тр. амер. инженеров механиков. Сер. Е, 1962, **29**, № 1, с. 159—167.
2. *Хорошун Л. П.* Прогнозирование термоупругих свойств материалов, упрочненных однонаправленными дискретными волокнами.— Прикл. механика, 1974, № 12, с. 23—30.
3. *Хорошун Л. П.* Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред.— Прикл. механика, 1978, № 2, с. 3—17.
4. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред.— М. : Наука, 1977.— 399 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
25.10.79