Формулировка результата. Пусть ядро $k(t, s)$ имеет суммируемые предельные значения $k(t, 0)$ и $k(0, s)$ и удовлетворяет условию (2). Тогда при любой правой части $g(t) \in L_2(0, 1)$ уравнение (1) имеет в пространстве $L_2(0, 1)$ единственное решение

$$u(t) = g(t) - \int_0^1 r(t, s) g(s) ds, \qquad 0 < t < 1, \tag{11}$$

$$r(t, s) = \begin{cases} r_+(t-s) - \int_t^1 r_+(\tau - s) r_-(t-\tau) d\tau, & t > s, \\ r_-(t-s) - \int_s^1 r_+(\tau - s) r_-(t-\tau) d\tau, & t < s, \end{cases} \tag{12}$$

где функции r_+ и r_- определены формулами (7), (8) и (6).

Пример:

$$u(t) + \lambda \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{|t-s|}} + \lambda \ln \left| \frac{\sqrt{t} + \sqrt{s}}{\sqrt{t} - \sqrt{s}} \right| \right] u(s) ds = g(t), \quad \lambda = \mathrm{const}.$$

Условие (2) выполнено. Так как ядро симметрично, то $r_-(t) = r_+(-t)$ и достаточно найти одну резольвентную функцию r_+. Очевидно,

$$m(t) = k(t, 0) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}}, \qquad 0 < t < 1.$$

Продолжая эту функцию на луч $t \geqslant 1$ аналитически, находим

$$M^+(z) = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{i+1}{\sqrt{z^+}}, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

(значения $\sqrt{z}^+$ лежат в верхней полуплоскости).

Выражение (7) приводит к результату

$$\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} + \lambda\sqrt{2\pi}}{x + \lambda\sqrt{2\pi x} + \lambda^2 \pi} \cos tx dx = \begin{cases} r_+(t), & 0 < t < 1, \\ r_-(t), & -1 < t < 0. \end{cases}$$

Далее вступают в силу формулы (11), (12).

Отметим, что метод остается эффективным для системы уравнений, когда $k(t, s)$ — матрица-функция, а u и g — вектор-функции.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
29.09.80

УДК 517.946

М. С. Волошина, А. С. Гупало, Г. П. Лопушанская

ОБОБЩЕННАЯ ВТОРАЯ СМЕШАННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

В настоящей статье устанавливается существование и единственность решения обобщенной в смысле работ [1, 6] второй смешанной граничной задачи в многосвязной области для одного класса сильно эллиптических систем второго порядка. В классической постановке задача рассмотрена в работе [2].

Пусть

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) \equiv \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}\,\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \tag{1}$$

— самосопряженная система уравнений Эйлера, отвечающая основной вариационной задаче для положительно определенного функционала

$$\int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} A_{kl} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\,dx \geqslant \gamma^2 \int_V \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\,dx;$$

$A_{kl} = A_{lk} = A'_{kl}$ — постоянные действительные квадратные матрицы порядка p; $x \in R^n$, $V \subset R^n$ — некоторая область; γ — действительное число и пусть S_k $(k = \overline{0, m})$ — замкнутые поверхности класса C^∞, $S_k \cap S_j = \varnothing$, $k \neq j$, S_0 содержит внутри себя все остальные поверхности S_k $(k = \overline{1, m})$; Ω_k — области, ограниченные поверхностями S_k, $\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \Omega_k$, $S = \partial\Omega = \bigcup_{k=0}^{m} S_k$; S_ε — параллельная к S поверхность, расположенная на расстоянии $\varepsilon > 0$ в направлении внутренней нормали $\bar{n}(y)$, $y \in S$; $\bar{\nu}(y)$ — орт нормали $\bar{n}(y)$.

Обозначим через $D(S)$ пространство бесконечно дифференцируемых на S вектор-функций $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$, через $D'(S)$ — пространство линейных непрерывных функционалов $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$ над $D(S)$ (пространство обобщенных вектор-функций), через $\langle \varphi, f \rangle$ — действие обобщенной вектор-функции на основную: $\langle \varphi, f \rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle \varphi_i, f_i \rangle$.

Построим второй смешанный граничный оператор

$$B^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) = \alpha(x)\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) + h(x)\right] + (1 - \alpha(x))\,E,$$

где $C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) = -2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\nu_l(x)\frac{\partial}{\partial x_{\varepsilon k}}$ — граничный оператор типа Неймана; $\tilde{A}_{kl}$ — постоянные действительные квадратные матрицы порядка p определяемые единственным образом [3]. Предполагаем, что $\xi' h^{(s)}(x)\,\xi \geqslant 0$, где ξ — произвольный действительный вектор; $h^{(s)}(x)$ — симметрическая часть матрицы $h(x)$; E — единичная матрица:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in S^{(r)} = \bigcup_{i=0}^{r} S_i, \quad 0 \leqslant r < m, \\ 0, & x \in S \setminus S^{(r)} = \bigcup_{i=r+1}^{m} S_i. \end{cases}$$

Очевидно, $B^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ на поверхностях $S_0, S_1, \ldots, S_r$ является оператором типа Неймана $(\alpha = 1)$, а на поверхностях $S_{r+1}, \ldots, S_m$ — типа Дирихле $(\alpha = 0)$. Далее будем полагать $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, если $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x \in S$.

Постановка задачи. Пусть $F \in D'(S)$, $F = \sum_{i=0}^{m} F^i$, $F^i \in D'(S)$, $\operatorname{supp} F^i \subseteq S_i$. Найти решение $u(x)$ системы (1) в области Ω, удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon)\, B^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = \langle \varphi, F \rangle \qquad \forall \varphi \in D(S). \tag{2}$$

Пусть S_{m+1} — поверхность, охватывающая все поверхности S_k ($k = \overline{0, m}$); Ω_{m+1} — область, ограниченная поверхностью S_{m+1}; $\Omega_{m+1}^{(r)} = \Omega_{m+1} \setminus \bigcup_{k=r+1}^{m} \Omega_k$. В работе [4] показано существование матрицы Грина $G^{(1)}(x, y)$ внутренней задачи Дирихле для системы (1) в многосвязной области $\Omega_{m+1}^{(r)}$ ($r \leqslant m$), обладающей свойствами:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G^{(1)}(x, y) = 0, \quad x \neq y, \quad x, y \in \Omega_{m+1}^{(r)};$$

$$\lim_{x \to y_0} G^{(1)}(x, y) = G^{(1)}(y_0, y) = 0, \quad y_0 \in S_k, \quad y \notin S_k, \qquad k = \overline{r+1, m+1};$$

$G^{(1)}(x, y) = \omega(x, y) - g^{(1)}(x, y)$, где $\omega(x, y)$ — фундаментальная матрица системы (1); $g^{(1)}(x, y)$ — регулярное в $\Omega_{m+1}^{(r)}$ матричное решение системы (1); $G^{(1)}(x, y) = [G^{(1)}(y, x)]'$. При этом

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{(S \setminus S^{(r)})_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) G^{(1)}(x_\varepsilon, y)\right]' dS_\varepsilon = 2\varphi(y), \quad y \in S \setminus S^{(r)}, \tag{3}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon^{(r)}} \varphi(x_\varepsilon) \left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) + h(x)\right] G^{(1)}(x_\varepsilon, y)\, dS_\varepsilon =$$

$$= -\varphi(y) + \int_{S^{(r)}} \varphi(x) \left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + h(x)\right] G^{(1)}(x, y)\, dS, \quad y \in S^{(r)} \tag{4}$$

$$\forall \varphi \in D(S).$$

Лемма. Преобразование $\langle g, R\rangle = \langle \varphi_g, P\rangle$, где $g \in D(S)$, φ_g — решение системы интегральных уравнений

$$-\varphi(y) + \int_{S^{(r)}} \varphi(x) \left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + h(x)\right] G^{(1)}(x, y)\, dS = g(y), \tag{5}$$

определяет изоморфизм пространства $D'(S)$ на себя. Формула обращения имеет вид

$$\langle \varphi, P\rangle = \left\langle -\varphi(y) + \int_{S^{(r)}} \varphi(x) \left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + h(x)\right] G^{(1)}(x, y)\, dS, \ R \right\rangle$$

$$\forall \varphi \in D(S).$$

Утверждение леммы следует из единственности решения системы интегральных уравнений (5), сопряженной системе (15) работы [2].

Теорема. Пусть обобщенная вектор-функция $R \in D'(S)$ определена следующим образом:

$$\langle g, R\rangle = \left\langle \varphi_g, \sum_{l=0}^{r} F^l \right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2} \left\langle \int_{S^{(r)}} \varphi_g(x) \left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + h(x)\right] \left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) G^{(1)}(x, y)\right]' dS, \sum_{l=r+1}^{m} F^l \right\rangle, \tag{6}$$

где $g \in D(S)$; φ_g — решение системы интегральных уравнений (5). Тогда вектор-функция

$$u(x) = \frac{1}{2} \left\langle \left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) G^{(1)}(x, y)\right]', \sum_{l=r+1}^{m} F^l \right\rangle + \langle G^{(1)}(x, y), R\rangle, \quad x \in \Omega \tag{7}$$

является единственным решением обобщенной второй смешанной граничной задачи (1), (2).

Действительно, из свойств матрицы $G^{(1)}(x, y)$ следует, что вектор-функция (7) удовлетворяет в области Ω системе (1). Покажем, что она удовлетворяет граничному условию (2). Подставляя (7) в (2) и пользуясь формулами (3), (4), получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\,B^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)u(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon=$$

$$=\left\langle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\,B^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G^{(1)}(x_\varepsilon, y)\right]'dS_\varepsilon,\ \sum_{l=r+1}^{m}F^l\right\rangle+$$

$$+\left\langle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\,B^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)G^{(1)}(x_\varepsilon, y)\,dS_\varepsilon,\ R\right\rangle=$$

$$=\left\langle\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon^{(r)}}\varphi(x_\varepsilon)\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)+h(x_\varepsilon)\right]\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G^{(1)}(x_\varepsilon, y)\right]'dS_\varepsilon+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(S\setminus S^{(r)})_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G^{(1)}(x_\varepsilon, y)\right]'dS_\varepsilon,\ \sum_{l=r+1}^{m}F^l\right\rangle+$$

$$+\left\langle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon^{(r)}}\varphi(x_\varepsilon)\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)+h(x)\right]G^{(1)}(x_\varepsilon, y)\,dS_\varepsilon,\ R\right\rangle+$$

$$+\left\langle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(S\setminus S^{(r)})_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\,G^{(1)}(x_\varepsilon, y)\,dS_\varepsilon,\ R\right\rangle=$$

$$=\left\langle\frac{1}{2}\int_{S^{(r)}}\varphi(x)\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+h(x)\right]\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G^{(1)}(x, y)\right]'dS+\right.$$

$$\left.+\varphi(y),\ \sum_{l=r+1}^{m}F^l\right\rangle+\left\langle-\varphi(y)+\int_{S^{(r)}}\varphi(x)\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+h(x)\right]G^{(1)}(x, y)\,dS,\ R\right\rangle.$$

Построим обобщенную вектор-функцию P такую, что

$$\langle\varphi, P\rangle=\left\langle\varphi,\ \sum_{i=0}^{r}F^i\right\rangle-$$

$$-\left\langle\frac{1}{2}\int_{S^{(r)}}\varphi(x)\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+h(x)\right]\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G^{(1)}(x, y)\right]'dS,\ \sum_{l=r+1}^{m}F^l\right\rangle,$$

$$\forall\,\varphi\in D(S).$$

Из определения (6) и леммы следует, что

$$\left\langle-\varphi(y)+\int_{S^{(r)}}\varphi(x)\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+h(x)\right]G^{(1)}(x, y)\,dS,\ R\right\rangle=\langle\varphi, P\rangle$$

$$\forall\,\varphi\in D(S),$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\,B^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)u(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon=$$

$$=\left\langle\frac{1}{2}\int_{S^{(r)}}\varphi(x)\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+h(x)\right]\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G^{(1)}(x, y)\right]'dS,\ \sum_{l=r+1}^{m}F^l\right\rangle+$$

$$+\left\langle\varphi,\ \sum_{i=r+1}^{m}F^i\right\rangle+\left\langle\varphi,\ \sum_{i=0}^{r}F^i\right\rangle-$$

$$-\left\langle \frac{1}{2}\int\limits_{S^{(r)}} \varphi(x)\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+h(x)\right]\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G^{(1)}(x, y)\right]' dS,\ \sum_{i=r+1}^{m} F^i\right\rangle =$$

$$=\left\langle \varphi,\ \sum_{i=0}^{m} F^i\right\rangle = \langle \varphi, F\rangle \qquad \forall\, \varphi \in D(S).$$

Итак, вектор-функция (7) является решением задачи (1), (2).

Докажем единственность этого решения. Если $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — два решения задачи, то вектор-функция $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ удовлетворяет в области Ω системе (1) и граничному условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon)\, B^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = 0 \qquad \forall\, \varphi \in D(S),$$

или после преобразования $x_\varepsilon = x+\varepsilon\nu(x)$, $x\in S$ с якобианом $W_\varepsilon(x)$ условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S} \varphi(x)\, v_\varepsilon(x)\, dS = 0 \qquad \forall\, \varphi \in D(S), \tag{8}$$

где

$$v_\varepsilon(x) = B^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) u(x_\varepsilon)\, W_\varepsilon(x)\Big|_{x_\varepsilon = x+\varepsilon\nu(x)}.$$

Из результатов [2] следует, что каждое решение $u(z)$ системы (1) в области Ω можно представить в виде

$$u(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{S_\varepsilon^{(r)}} G^{(1)}(z, y_\varepsilon)\,\mu_\varepsilon(y_\varepsilon)\, dS_\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int\limits_{(S\setminus S^{(r)})_\varepsilon}\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y_\varepsilon}\right)G^{(1)}(z, y_\varepsilon)\right]' u(y_\varepsilon)\, dS_\varepsilon\right\}. \tag{9}$$

Здесь $\mu_\varepsilon(y_\varepsilon)$ — решение системы интегральных уравнений

$$-\mu_\varepsilon(y_\varepsilon) + \int\limits_{S_\varepsilon^{(r)}}\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y_\varepsilon}\right)+h(y)\right]G^{(1)}(y_\varepsilon, x_\varepsilon)\,\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon =$$

$$= \left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y_\varepsilon}\right)+h(y)\right]u(y_\varepsilon) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(S\setminus S^{(r)})_\varepsilon}\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y_\varepsilon}\right)+h(y)\right]\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)G^{(1)}(y_\varepsilon, x_\varepsilon)\right]' u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon. \tag{10}$$

Имеем

$$\mu_\varepsilon(x_\varepsilon) = f_\varepsilon(y_\varepsilon) + \int\limits_{S_\varepsilon^{(r)}} \Gamma(y_\varepsilon, x_\varepsilon)\, f_\varepsilon(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon, \tag{11}$$

где $\Gamma(y_\varepsilon, x_\varepsilon)$ — резольвента, соответствующая ядру системы интегральных уравнений (10), а $f_\varepsilon(y_\varepsilon)$ равно правой части этой системы.

Подставляя выражение (11) в (9), после ряда преобразований получаем

$$u(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S}\varphi_\varepsilon(z, x)\, v_\varepsilon(x)\, dS_x, \quad z\in\Omega. \tag{12}$$

Здесь

$$\varphi_\varepsilon(z, x) = \frac{1}{2}(1-\alpha(x))\left\{C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)G^{(1)}(z, x_\varepsilon) - \right.$$

$$-\int\limits_{S_\varepsilon^{(r)}} G^{(1)}(z, y_\varepsilon)\left[C^{(\nu(y))}\left(\frac{\partial}{\partial y_\varepsilon}\right)+h(y)\right]\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)G^{(1)}(y_\varepsilon, x_\varepsilon)\right]' dS_\varepsilon -$$

$$- \int_{S_\varepsilon^{(r)}} \left[G^{(1)}(z, y_\varepsilon) \int_{S_\varepsilon^{(r)}} \Gamma(y_\varepsilon, \eta_\varepsilon) \left[C^{(\nu(\eta))}\left(\frac{\partial}{\partial \eta_\varepsilon}\right) + h(\eta) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) G^{(1)}(\eta_\varepsilon, x_\varepsilon) \right]' dS_{\eta_\varepsilon} \right] dS_{y_\varepsilon} \Big\}_{x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)} +$$

$$+ \alpha(x) \left\{ G^{(1)}(z, x + \varepsilon\nu(x)) + \int_{S_\varepsilon^{(r)}} G^{(1)}(z, y_\varepsilon) \Gamma(y_\varepsilon, x + \varepsilon\nu(x)) dS_{y_\varepsilon} \right\},$$

$$z \in \Omega, \quad x \in S;$$

$\varphi_\varepsilon(z, x) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi(z, x) \in D(S)$ равномерно относительно $z \in \Omega$.

Тогда из выражения (12) согласно лемме работы [5, с. 95] получаем

$$u(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_S \varphi(z, x) v_\varepsilon(x) dS_x, \quad z \in \Omega,$$

а согласно условию (8) $u(z) \equiv 0$, $z \in \Omega$. Значит, $u_1(z) \equiv u_2(z)$, $z \in \Omega$.

Аналогичный результат справедлив для системы дифференциальных уравнений вариационного типа второго порядка с переменными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами при условии существования для нее во всем пространстве R^n фундаментальной матрицы.

1. *Бойко Г. П., Волошина М. С., Гупало А. С.* Обобщенная задача Дирихле для одного класса сильно эллиптических систем второго порядка.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 37—42.
2. *Волошина М. С.* Решение второй смешанной граничной задачи для одного класса сильно эллиптических систем в случае многосвязной области с помощью матрицы Грина.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1981, вып. 14, с. 3—6.
3. *Волошина М. С.* Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем.— Доп. АН УРСР, 1958, № 9, с. 913—916.
4. *Волошина М. С.* Розв'язок першої змішаної граничної задачі для одного класу сильно еліптичних систем у випадку багатозв'язної області за допомогою матриці Гріна.— Вісн. Льв. політехн. ін-ту. Математика і механіка, 1977, с. 27—30.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.
6. *Гупало Г. С.* Про узагальнену задачу Діріхле.— Доп. АН УРСР, 1966, № 7, с. 843—846.

Львовский политехнический институт
Львовский университет

Поступила в редколлегию 25.06.80

УДК 517.956

И. В. Коробчук

ОБ ОЦЕНКЕ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Рассмотрим один метод аппроксимации наименьшего собственного значения для задачи

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\partial D} = 0, \tag{2}$$

заданной в выпуклом многоугольнике $D \in R^2$. Как известно [2], для наименьшего собственного значения λ_1^2 задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\inf_D \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_i} - B_i^2 \right) \leqslant \lambda_1^2, \tag{3}$$

где функции B_i непрерывны с кусочно-непрерывными производными.