$$- \int_{S_\varepsilon^{(r)}} \left[G^{(1)}(z, y_\varepsilon) \int_{S_\varepsilon^{(r)}} \Gamma(y_\varepsilon, \eta_\varepsilon) \left[C^{(\nu(\eta))}\left(\frac{\partial}{\partial \eta_\varepsilon}\right) + h(\eta) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) G^{(1)}(\eta_\varepsilon, x_\varepsilon) \right]' dS_{\eta_\varepsilon} \right] dS_{y_\varepsilon} \Big\}_{x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)} +$$

$$+ \alpha(x) \left\{ G^{(1)}(z, x + \varepsilon\nu(x)) + \int_{S_\varepsilon^{(r)}} G^{(1)}(z, y_\varepsilon) \Gamma(y_\varepsilon, x + \varepsilon\nu(x)) dS_{y_\varepsilon} \right\},$$

$$z \in \Omega, \quad x \in S;$$

$\varphi_\varepsilon(z, x) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightarrow} \varphi(z, x) \in D(S)$ равномерно относительно $z \in \Omega$.

Тогда из выражения (12) согласно лемме работы [5, с. 95] получаем

$$u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_S \varphi(z, x) v_\varepsilon(x) dS_x, \quad z \in \Omega,$$

а согласно условию (8) $u(z) \equiv 0$, $z \in \Omega$. Значит, $u_1(z) \equiv u_2(z)$, $z \in \Omega$.

Аналогичный результат справедлив для системы дифференциальных уравнений вариационного типа второго порядка с переменными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами при условии существования для нее во всем пространстве R^n фундаментальной матрицы.

1. *Бойко Г. П., Волошина М. С., Гупало А. С.* Обобщенная задача Дирихле для одного класса сильно эллиптических систем второго порядка.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 37—42.
2. *Волошина М. С.* Решение второй смешанной граничной задачи для одного класса сильно эллиптических систем в случае многосвязной области с помощью матрицы Грина.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1981, вып. 14, с. 3—6.
3. *Волошина М. С.* Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем.— Доп. АН УРСР, 1958, № 9, с. 913—916.
4. *Волошина М. С.* Розв'язок першої змішаної граничної задачі для одного класу сильно еліптичних систем у випадку багатозв'язної області за допомогою матриці Гріна.— Вісн. Льв. політехн. ін-ту. Математика і механіка, 1977, с. 27—30.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.
6. *Гупало Г. С.* Про узагальнену задачу Діріхле.— Доп. АН УРСР, 1966, № 7, с. 843—846.

Львовский политехнический институт
Львовский университет

Поступила в редколлегию 25.06.80

УДК 517.956

И. В. Коробчук

ОБ ОЦЕНКЕ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Рассмотрим один метод аппроксимации наименьшего собственного значения для задачи

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\partial D} = 0, \tag{2}$$

заданной в выпуклом многоугольнике $D \in R^2$. Как известно [2], для наименьшего собственного значения λ_1^2 задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\inf_D \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_i} - B_i^2 \right) \leqslant \lambda_1^2, \tag{3}$$

где функции B_i непрерывны с кусочно-непрерывными производными.

В этой работе приведено конструктивное построение функций B_i и получены оценки снизу λ_1^2, например, для выпуклой области

$$\left(\frac{\pi L}{4S}\right)^2 \leqslant \lambda_1^2,$$

где S — площадь, а L — ее периметр.

Рассмотрим в описанном выпуклом многоугольнике D векторные поля: $\vec{t}$ — направленное от стороны к биссектрисе $Б$ [2] и $\vec{s} \perp \vec{t}$. Пусть $|\vec{t}| = t$, $|\vec{s}| = s$ (отсчитываемая от некоторой точки стороны); $q(s)$ — длина перпендикуляра от стороны к $Б$; φ_{i1}, φ_{i2} — углы между i-й стороной (длины l_i) и к ней прилегающих частей биссектрисы, которые разбивают весь многоугольник D на части D_i.

Функции $B_i(x)$ $(i = 1, 2)$ берем в виде

$$B_1 = v_1(t, s)\cos(\widehat{t, x_1}) + v_2(t, s)\cos(\widehat{s, x_1}),$$

$$B_2 = v_1(t, s)\cos(\widehat{t, x_2}) + v_2(t, s)\cos(\widehat{s, x_2}). \tag{4}$$

Предполагая, что функции v_1, v_2 непрерывны с кусочно-непрерывными производными и подставляя в (3), получаем

$$\inf_D\left\{\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial s} - v_1^2 - v_2^2\right\} \leqslant \lambda_1^2. \tag{5}$$

Направление векторных полей в каждой части D_i постоянно, значит, функции $B_i(x)$ терпят разрыв при переходе через биссектрису. Поэтому будем подбирать функции v_1, v_2 так, чтобы

$$B_i|_Б = 0. \tag{6}$$

Так как

$$q_i(s) = \left(s - \sum_{k=0}^{i-1} l_k\right)\operatorname{tg}\frac{\varphi_{i1}}{2}, \quad \text{либо} \quad q_i(s) = \left[l_i - s + \sum_{k=0}^{i-1} l_k\right]\operatorname{tg}\frac{\varphi_{i2}}{2},$$

то, обозначая

$$\delta^2 = \begin{cases} \operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi^*}{2}, & \text{если } \dfrac{\varphi^*}{2} = \min\dfrac{\varphi_{ik}}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{4} \quad (k = 1, 2), \\ 1, & \text{если } \dfrac{\varphi^*}{2} \geqslant \dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \tag{7}$$

берем функции v_1, v_2 соответственно в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{\pi}{4(\omega(0) - \omega(q(s)))}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\omega(0) - \omega(t))}{2(\omega(0) - \omega(q(s)))}, \\ v_2 &= \frac{\pi\delta}{2(\omega(0) + \omega(t))}\operatorname{tg}\pi\frac{\omega(0) + \omega(q(s))}{\omega(0) + \omega(t)}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\omega(t) = S(t)/L(t)$; $S(t)$ — площадь; $L(t)$ — периметр многоугольника $D(t)$, смещенного параллельно внутрь на расстояние t [2].

Подставляя функции (8) в неравенство (5) и используя результаты [2], получаем

$$\left(\frac{\pi L}{4S}\right)^2(1 + \delta^2) \leqslant \lambda_1^2. \tag{9}$$

Из соотношения [1]

$$\lambda_1^2 \leqslant \frac{\mu^2 B}{2S}, \tag{10}$$

где μ — первый корень функции Бесселя нулевого порядка, а

$$B = \frac{2\Sigma l_k}{d_D},$$

d_D — внутренний диаметр многоугольника [2], можно записать

$$\lambda_1^2 \leqslant \frac{\mu^2 L}{d_D S} = \frac{\mu^2 L}{S L d_D} = \frac{\mu^2}{4}\left(\frac{L}{S}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\pi L}{4S}\right)^2 (1+\delta^2) \leqslant \lambda_1^2 \leqslant \left(\frac{\mu L}{2S}\right)^2. \tag{11}$$

Обобщим теперь результаты на произвольные выпуклые многоугольники. Пусть O — центр, d_D — внутренний диаметр наибольшей окружности K, которую можно поместить в многоугольник D. Обозначим через h_i расстояние от точки O к i-й стороне, через L^*, S^* периметр и площадь многоугольника D^*, описанного вокруг окружности K со сторонами, параллельными соответственным сторонам многоугольника D. Тогда в каждой части D_i, прилегающей к i-й стороне, можно ввести новые переменные

$$\tau = p_i t = \frac{d_D}{2h_i} t, \quad r = k_i s = \frac{d_D}{2l_i}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi_{i1}}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\varphi_{i2}}{2}\right) s \tag{12}$$

и неравенство (5) запишется так:

$$\inf_{D^*}\left\{p_i \frac{\partial v_1}{\partial \tau} - v_1^2 + k_i \frac{\partial v_2}{\partial r} - v_2^2\right\} \leqslant \lambda_1^2. \tag{13}$$

Функции v_1, v_2 берем в виде

$$v_1 = -\frac{\pi p_i}{4(\omega(0) - \omega(q(r)))} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\omega(0) - \omega(\tau))}{2(\omega(0) - \omega(q(r)))},$$

$$v_2 = \frac{\pi k_i \delta_i}{2(\omega(0) + \omega(\tau))} \operatorname{tg} \pi \frac{\omega(0) + \omega(q(r))}{\omega(0) + \omega(\tau)},$$

где

$$\omega(\tau) = \frac{S^*(\tau)}{L^*(\tau)};$$

$$\delta_i = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\min\left\{\frac{\varphi_{i1}}{2}; \frac{\varphi_{i2}}{2}\right\}\right), & \text{если } \min\left\{\frac{\varphi_{i1}}{2}; \frac{\varphi_{i2}}{2}\right\} \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{если } \min\left\{\frac{\varphi_{i1}}{2}; \frac{\varphi_{i2}}{2}\right\} \geqslant \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Подставляя их в неравенство (13), получаем

$$\left(\frac{\pi d_D L^*}{8S^*}\right)^2 \min_i \left\{\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{l_i^2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi_{i1}}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\varphi_{i2}}{2}\right)^2 \delta_i^2\right\} \leqslant \lambda_1^2. \tag{14}$$

Из неравенства (10) записываем

$$\lambda_1^2 \leqslant \frac{\mu^2 \sum_i \frac{l_i}{h_i}}{2S^*} = \frac{4\mu^2 \sum_i l_i h_i p_i^2}{d_D^2 \sum_i l_i h_i} \leqslant \left(\frac{\mu L^*}{2S^*}\right)^2 \max_i p_i^2. \tag{15}$$

Оценки (14), (15) дают двустороннее приближение первого собственного значения для задачи (1), (2).

1. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике.— М.: Наука, 1962.— 336 с.
2. *Скоробогатько В. Я.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.— К.: Наук. думка, 1972.— 176 с.

Луцкий филиал Львовского политехнического института

Поступила в редколлегию 28.03.80