УДК 517.95

А. П. Поддубняк, В. Ф. Емец

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В БЕСКОНЕЧНОМ $n+1$-МЕРНОМ СЛОЕ

Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе изучена методом регуляризации в работе [2]. В статье [1] результаты двухмерной задачи перенесены на трехмерный случай. Здесь предлагается n-мерный аналог метода регуляризации, описанного в работах [2, 3], с помощью которого найдено приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа в $n+1$-мерном слое.

Пусть $Q = [0,\ h] \times R^n$ $(n \geqslant 1)$ — область действительных переменных $(x_0,\ x)$, $0 \leqslant x_0 \leqslant h$, $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in R^n$; $\Delta = \sum\limits_{k=0}^{n} \partial^2/\partial x_k^2$ — оператор Лапласа; $f(x)$, $g(x)$ — вещественные абсолютно интегрируемые функции на R^n.

Рассмотрим задачу: найти в области Q решение уравнения Лапласа

$$\Delta u(x_0,\ x) = 0 \tag{1}$$

при следующих граничных условиях:

$$u(0,\ x) = f(x), \quad u_x(0,\ x) = g(x). \tag{2}$$

Предполагаем также, что функции $f(x)$, $g(x)$ аналитически продолжимы внутрь области Q.

Пусть вначале функции f и g заданы точно. Применяя к задаче (1), (2) преобразование Фурье

$$(Fu)(\xi) = \hat{u}(x_0,\ \xi) = \int e^{-i\langle x, \xi\rangle} u(x_0,\ x)\, dx,$$

где $\xi \in R^n$; $\langle x,\ \xi\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$; $dx = dx_1 \ldots dx_n$ — мера Лебега в R^n (интеграл здесь и далее, если не оговорено, берется по R^n), получаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения относительно $\hat{u}$, единственное решение которой имеет вид

$$\hat{u}(x_0,\ \xi) = \hat{f}(\xi)\operatorname{ch}(x_0|\xi|) + \hat{g}(\xi)\frac{\operatorname{sh}(x_0|\xi|)}{|\xi|}, \quad |\xi| = \sqrt{\langle\xi,\ \xi\rangle}. \tag{3}$$

При этом единственность и неустойчивость решения исходной задачи следуют из выражения (3) и формулы

$$u(x_0,\ x) = (F^{-1}\hat{u})(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x, \xi\rangle}\hat{u}(x_0,\ \xi)\, d\xi. \tag{4}$$

Здесь $d\xi = d\xi_1 \ldots d\xi_n$.

В силу результатов работы [2] регуляризацию задачи проведем в виде

$$\hat{u}_\alpha(x_0,\ \xi) = e^{-\alpha^2|\xi|^2}\hat{u}(x_0,\ \xi), \tag{5}$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Применяя к (5) формулу обращения (4), получаем

$$u_\alpha(x_0,\ x) = \int B_\alpha(x-\xi)\, u(x_0,\ \xi)\, d\xi,$$

$$B_\alpha(x) = (F^{-1}e^{-\alpha^2|\xi|^2})(x) = (4\pi\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha^2}}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. Регуляризованное решение задачи имеет вид

$$u_\alpha(x_0,\ x) = \int R_\alpha(x_0,\ x-\xi) f(\xi)\, d\xi + \int T_\alpha(x_0,\ x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

где

$$R_\alpha(x_0,\ x) = (2\alpha\sqrt{\pi})^{-n}\,|x|^{\frac{1-n}{2}}\,(x_0^2 + |x|^2)^{\frac{n-1}{4}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{x_0^2 - |x|^2}{4\alpha^2}\right)\cos\left(\frac{x_0|x|}{2\alpha^2} - \frac{n-1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x_0}{|x|}\right) + 0\left[(\alpha|x|)\,2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right];$$

$$T_\alpha(x_0,\ x) = \int_0^{x_0} R_\alpha(s,\ x)\,ds.$$

Доказательство леммы вытекает из обратного преобразования Фурье от выражений (5), (3) и последующего вычисления интегралов по методу Лапласа [6].

Теорема 1. Функция $u_\alpha(x_0,\ x) \in C^\infty$ есть приближенное решение задачи, равномерно в Q стремящееся к точному при $\alpha \to 0$, причем справедливо неравенство

$$|u_\alpha(h,\ x) - u(h,\ x)| \leqslant \omega(\alpha)\left[1 + 2\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right], \tag{7}$$

где $\omega(b)$ — модуль непрерывности [4] функции $u(h,\ x)$; $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Доказательство теоремы проводится аналогично, как и в статье [2].

Предположим, что вместо точных данных $f(x)$, $g(x)$ заданы их непрерывные приближения $f_\delta(x)$, $g_\delta(x)$, причем

$$|f(x) - f_\delta(x)| \leqslant \delta, \quad |g(x) - g_\delta(x)| \leqslant \delta. \tag{8}$$

Подставив в (6) вместо f, g функции f_δ, g_δ, вместо $u_\alpha(x_0,\ x)$ получим

$$u_{\alpha\delta}(x_0,\ x) = \int R_\alpha(x_0,\ x-\xi) f_\delta(\xi)\,d\xi + \int T_\alpha(x_0,\ x-\xi) g_\delta(\xi)\,d\xi. \tag{6'}$$

Эта функция есть приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа в $n+1$-мерном слое, когда исходные данные заданы приближенно [2, 3, 5]. Оценим его уклонение от точного решения u в плоскости $x_0 = h$ по формуле

$$|u(h,\ x) - u_{\alpha\delta}(h,\ x)| \leqslant \Delta_{1n}(\alpha) + \Delta_{2n}(\alpha,\ \delta). \tag{9}$$

Здесь

$$\Delta_{1n}(\alpha) = |u(h,\ x) - u_\alpha(h,\ x)|; \quad \Delta_{2n}(\alpha,\ \delta) = |u_\alpha(h,\ x) - u_{\alpha\delta}(h,\ x)|. \tag{10}$$

Оценка для $\Delta_{1n}(\alpha)$ следует из теоремы 1. Для $\Delta_{2n}(\alpha,\ \beta)$ имеем неравенство

$$\Delta_{2n}(\alpha,\ \delta) \leqslant \delta\int|R_\alpha(h,\ x)|\,dx + \delta\int|T_\alpha(h,\ x)|\,dx =$$

$$= \delta\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[F\left(\frac{h}{2\alpha}\right) + 2\alpha\int_0^{h/2\alpha} F(s)\,ds\right]; \tag{11}$$

$$F(z) = z^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{3}{2}z^2}\, W_{\frac{1}{4},\frac{n}{4}}(z^2) \tag{12}$$

($W_{\beta,\gamma}(t)$ — функция Уиттекера [7]).

Теорема 2. Пусть задача Коши для уравнения Лапласа в $n+1$-мерном слое имеет непрерывное решение при точно заданных краевых условиях. Пусть, далее, $f_\delta(x)$, $g_\delta(x)$ — непрерывные приближения к точно заданным начальным функциям $f(x)$, $g(x)$, удовлетворяющие при фиксированном $\delta >$

> 0 неравенствам (8). Если $\alpha = \alpha(\delta)$ есть решение уравнения

$$F\left(\frac{h}{2\alpha}\right) + 2\alpha \int_0^{h/2\alpha} F(s)\,ds = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)}\,\mu(\delta), \tag{13}$$

где $\mu(\delta) \to \delta^{\gamma-1}$ $(0 < \gamma < 1)$ при $\delta \to 0$ и $u_{\alpha\delta}(x_0, x)$ определено по формуле (6′), то

$$\lim_{\delta\to 0} u_{\alpha\delta}(x_0, x) = u(x_0, x) \tag{14}$$

равномерно в Q.

Доказательство. Из равенства (13), формулы (12) и свойств функции Уиттекера [7] вытекает, что $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Поэтому из выражений (7), (10) имеем $\lim \Delta_{1n}(\alpha(\delta)) = 0$. При выполнении соотношения (13) из неравенства (11) следует, что $\lim\limits_{\delta\to 0} \Delta_{2n}(\alpha(\delta), \delta) = 0$. Поэтому на основании неравенства (9)

$$\lim_{\delta\to 0} u_{\alpha\delta}(h, x) = u(h, x) \quad (\alpha = \alpha(\delta))$$

равномерно относительно $x \in R^n$. Отсюда, как следствие, вытекает равенство (14).

Замечание 1. Соотношение (13), позволяющее определить параметр регуляризации α, упрощается, если воспользоваться асимптотическим представлением функции Уиттекера $W_{\beta,\gamma}(t)$ при больших (t) [8]. При этом

$$F(z) \approx z^{\frac{n-1}{2}} e^{z^2}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!\,z^{2k}} \prod_{m=1}^{k}\left[\left(\frac{n}{4}\right)^2 - \left(m - \frac{3}{4}\right)^2\right]\right\}. \tag{15}$$

Ограничиваясь главным членом асимптотики (15), из соотношения (13) получаем

$$\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{h^2}{4\alpha^2}} + 2\alpha \int_0^{h/2\alpha} s^{\frac{n-1}{2}} e^{s^2} ds = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)}\,\mu(\delta). \tag{13′}$$

Если $n = 4p + 1$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, то разложение (15) является конечным и точным; в соответствии с этим уточняется и формула (13).

Замечание 2. При $n = 1$ и $\mu(\delta) = \delta^{-1/2}$ приходим к результатам работы [2] (если исправить имеющиеся там опечатки). В случае трехмерного слоя $(n = 2)$ формулы (7) и (13) существенно улучшают аналогичные результаты статьи [1].

1. *Атаходжаев М. А., Кобилов У. Э.* Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечном трехмерном слое.— В кн.: Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения. Ташкент : Фан, 1978, с. 62—75.
2. *Иванов В. К.* Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе.— Дифференц. уравнения, 1965, 1, № 1, с. 131—136.
3. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М. : Наука, 1978.— 206 с.
4. *Коровкин П. П.* Линейные операторы и теория приближений.— М. : Физматгиз, 1959.— 212 с.
5. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.— М. : Наука, 1979.— 288 с.
6. *Федорюк М. В.* Метод перевала.— М. : Наука, 1977.— 368 с.
7. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа.— М. : Физматгиз, 1963.— Т. 2. 516 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 28.03.80