В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К. : Ін-т математики АН УРСР, 1978, с. 7—8.
3. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions.— New York : D. Van Nostrand comp., 1948.— 433 p.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
29.09.80

УДК 514.752.6

Р. Я. Мацюк

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ВИНТОВЫХ ЛИНИЙ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $T^{(n)}\mathrm{E}$ обозначает пространство n-скоростей над (псевдо)евклидовым пространством E размерности n. Если $x^1, \ldots, x^n$ суть канонические координаты в E, при которых последняя компонента вектор-столбца $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ входит с положительным знаком в его скалярный квадрат, то пусть $x^{(0)}, \ldots, x^{(n)}$ обозначают естественные координаты в $T^{(n)}\mathrm{E}$, где каждое $x^{(s)}$ — это столбец высоты n, а $x^{(0)}$ совпадает с $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$. Любой элемент пространства $T^{(n)}\mathrm{E}$ можно получить, рассматривая параметрически заданную кривую $x(\tau)$ класса C^∞ в пространстве E и полагая $x^{(0)} = x(0), \ldots, x^{(n)} = \frac{d^n x}{d\tau^n}(0)$, если 0 принадлежит интервалу изменения параметра. Пусть теперь открытое множество U в $T^{(n)}\mathrm{E}$ определяется совокупностью условий:

$$\begin{gathered} \| x^{(1)} \| \neq 0, \\ \| x^{(1)} \wedge x^{(2)} \| \neq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \| x^{(1)} \wedge \ldots \wedge x^{(n-1)} \| \neq 0. \end{gathered}$$

Здесь и далее для столбцов типа $a^{(s)} = \begin{pmatrix} a^{(s)1} \\ \vdots \\ a^{(s)n} \end{pmatrix}$, $b^{(s)} = \begin{pmatrix} b^{(s)1} \\ \vdots \\ b^{(s)n} \end{pmatrix}$ использована сокращенная запись

$$a^{(1)} \wedge \cdots \wedge a^{(l)} \cdot b^{(1)} \wedge \cdots \wedge b^{(l)} = \det \begin{pmatrix} a^{(1)}\, b^{(1)} & \ldots & a^{(1)}\, b^{(l)} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{(l)}\, b^{(1)} & \ldots & a^{(l)}\, b^{(l)} \end{pmatrix},$$

где произведение столбцов $a^{(s)} \cdot b^{(s)}$ понимается в метрике пространства E и, как всегда, $\| \mathbf{A} \| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ для произвольной матрицы $\mathbf{A}$.

На множестве U рассмотрим функции

$$K_1 = \frac{\| x^{(1)} \wedge x^{(2)} \|}{\| x^{(1)} \|^3},$$

$$K_l = \frac{\| x^{(1)} \wedge \cdots \wedge x^{(l+1)} \| \cdot \| x^{(1)} \wedge \cdots \wedge x^{(l-1)} \|}{\| x^{(1)} \wedge \cdots \wedge x^{(l)} \|^2 \cdot \| x^{(1)} \|} \quad (l = 2, \ldots, n-1),$$

которые можно интерпретировать как кривизны в точке $x(0)$ той кривой $x(\tau)$, которая определяет элемент $\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix}$ пространства $T^{(n)}$ E [2]. Функции $K_1, \ldots, K_{n-1}$ не зависят от параметризации кривой $x(\tau)$ и поэтому определяют некоторую совокупность функций $k_1, \ldots, k_{n-1}$ на некотором подмножестве V многообразия контактных элементов порядка n $C^{(n)}$E следующим образом. Пусть t, $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)}$ обозначают естественные координаты в

$$C^{(n)}\mathrm{E}, \text{ где } t = x^n; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p}^{(s)} = \begin{pmatrix} p^{(s)1} \\ \vdots \\ p^{(s)n-1} \end{pmatrix} \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Элемент пространства $C^{(n)}$E можно интерпретировать как класс эквивалентных элементов пространства $\tilde{T}^{(n)}\mathrm{E} \equiv T^{(n)}\mathrm{E} \setminus \{x^{(0)}, 0, \ldots, 0\}$, если считать две n-скорости эквивалентными в том случае, когда определяющие их кривые могут быть получены одна из другой заменой параметра. Естественные координаты в $C^{(n)}$E некоторого класса эквивалентных n-скоростей совпадают тогда с координатами в $\tilde{T}^{(n)}$E той n-скорости из упомянутого класса, для которой $x^{(1)n} = 1$, а $x^{(2)n} = \ldots = x^{(n)n} = 0$. Соотношения, определяющие множество U и функции $K_1, \ldots, K_{n-1}$ на нем, согласованы с указанным отношением эквивалентности, поэтому для определения множества V в $C^{(n)}$E и функций $k_1, \ldots, k_{n-1}$ на нем достаточно в этих соотношениях положить $x^{(1)n} = 1$, $x^{(2)n} = \ldots = x^{(n)n} = 0$, $x^{(s)\alpha} = p^{(s)\alpha}$ ($s = 1, \ldots, n$; $\alpha = 1, \ldots, n-1$). Выражение $\| \mathbf{x}^{(1)} \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}^{(l)} \|^2$ преобразуется при этом следующим образом (подстановки σ действуют на множестве $\{1, \ldots, l\}$):

$$\mathbf{x}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}^{(l)} \cdot \mathbf{x}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}^{(l)} = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\, \mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{x}^{(\sigma 1)} \cdots \mathbf{x}^{(l)} \cdot \mathbf{x}^{(\sigma l)} =$$

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\, (\mathbf{p}^{(1)} \cdot \mathbf{p}^{(\sigma 1)} + \delta_{1,\sigma 1})\, \mathbf{p}^{(2)} \cdot \mathbf{p}^{(\sigma 2)} \cdots \mathbf{p}^{(l)} \cdot \mathbf{p}^{(\sigma l)} =$$

$$= \| \mathbf{p}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}^{(l)} \|^2 + \| \mathbf{p}^{(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}^{(l)} \|^2.$$

Здесь произведение столбцов $\mathbf{p}^{(s)} \cdot \mathbf{p}^{(s)}$ понимается в метрике гиперплоскости $x^{(n)} = 0$ пространства E, индуцированной метрикой пространства E. Таким образом, функции $k_1, \ldots, k_{n-1}$ задаются выражениями

$$k_1 = \frac{\sqrt{(\mathbf{p}^{(1)} \wedge \mathbf{p}^{(2)})^2 + \mathbf{p}^{(2)2}}}{\sqrt{(\mathbf{p}^{(1)2} + 1)^3}},$$

$$k_l = \frac{\sqrt{(\mathbf{p}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}^{(l+1)})^2 + (\mathbf{p}^{(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}^{(l+1)})^2} \times \sqrt{(\mathbf{p}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}^{(l-1)})^2 + (\mathbf{p}^{(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}^{(l-1)})^2}}{\sqrt{\mathbf{p}^{(1)2} + 1}\, \sqrt{(\mathbf{p}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}^{(l)})^2 + (\mathbf{p}^{(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}^{(l)})^2}}$$

$$(l = 2, \ldots, n-1)$$

и определены на множестве $V \subset C^{(n)}$ E, заданном соотношениями

$$\mathbf{p}^{(1)2} + 1 \neq 0, \quad (\mathbf{p}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}^{(l)})^2 + (\mathbf{p}^{(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}^{(l)})^2 \neq 0 \qquad (i)$$

$$(l = 2, \ldots, n).$$

Для дальнейшего сузим V, положив $l = 2, \ldots, n+1$.

Винтовые линии и только они являются интегральными линиями класса C^{n+1} системы внешних дифференциальных уравнений $dk_l = 0$ ($l = 1, \ldots, n-1$), определенных на множестве V. Нас интересуют, таким образом, инфинитезимальные симметрии этой системы [3].

Если X обозначает генератор некоторой однопараметрической группы преобразований пространства E и $X = \tau\partial_t + \xi\partial_x$, то генератор Z продолженной группы, действующей в пространстве $C^{(n)}E$, задается формулами [1]

$$Z = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \sum_{s=1}^{n} \pi^{(s)}\partial_{p(s)},$$
$$\pi^{(s)} = -D^s\varphi + p^{(s+1)}\tau \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{ii}$$

где $\varphi = p^{(1)}\tau - \xi$, а $D^{(s)}$ обозначает s-ю степень оператора полного дифференцирования D:

$$D = \partial_t + p^{(1)}\partial_x + p^{(2)}\partial_{p(1)} + \cdots + p^{(s+1)}\partial_{p(s)} + \cdots$$

Пусть $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ обозначают контактные формы на пространстве $C^{(n)}E$:

$$\Theta_s = dp^{(s-1)} - p^{(s)}dt.$$

Тогда Z будет инфинитезимальной симметрией системы $dk_1 = 0, \ldots, dk_{n-1} = 0$ в том и только в том случае, если везде на V выполнено следующее условие [3]:

$$Zdk_l = \sum_{m=1}^{n-1} h_{lm}dk_m + \sum_{s=1}^{n} l_{ls}\Theta_s \quad (l = 1, \ldots, n-1), \tag{iii}$$

где h_{lm} и l_{ls} обозначают некоторые непрерывные на V функции, а запись $Z\omega$ означает операцию взятия производной Ли от внешней дифференциальной формы ω по направлению поля Z.

Пусть $w_{(t)}$, $w_{(x)}$, $w_{(s)}$ обозначают соответственно строки из коэффициентов, стоящих при дифференциалах dt, dx^α, $dp^{(s)\alpha}$ $(s = 1, \ldots, n)$ в выражении

$$\omega = w_{(t)}dt + w_{(x)\alpha}dx^\alpha + w_{(1)\alpha}dp^{(1)\alpha} + \cdots + w_{(n)\alpha}dp^{(n)\alpha}$$

для произвольной 1-формы ω. Пусть, кроме того, используются обозначения: $p = p^{(1)}$, $q = p^{(2)}$, $r = p^{(3)}$. Тогда условие (iii) при $l = 1$ следующим образом распадается на тождества в переменных $t, x, p, \ldots, p^{(n)}$, получающиеся приравниванием выражений, которые включают дифференциалы одинаковых переменных:

$$\begin{aligned}
(Zdk_1)_{(t)} &= h_{11}dk_{1(t)} + h_{12}dk_{2(t)} + \cdots + h_{1n-1}dk_{n-1(t)} - l_{11}p - \\
&\quad - l_{12}q - l_{13}r - \cdots - l_{1n}p^{(n)},\\
(Zdk_1)_{(x)} &= h_{11}dk_{1(x)} + h_{12}dk_{2(x)} + \ldots + h_{1n-1}dk_{n-1(x)} + l_{11},\\
(Zdk_1)_{(p)} &= h_{11}dk_{1(p)} + h_{12}dk_{2(p)} + \ldots + h_{1n-1}dk_{n-1(p)} + l_{12},\\
(Zdk_1)_{(q)} &= h_{11}dk_{1(q)} + h_{12}dk_{2(q)} + \ldots + h_{1n-1}dk_{n-1(q)} + l_{13},\\
0 &= h_{12}dk_{2(r)} + \ldots + h_{1n-1}dk_{n-1(r)} + l_{14},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= h_{1s-1}dk_{s-1(s)} + \ldots + h_{1n-1}dk_{n-1(s)} + l_{1s+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= h_{1n-2}dk_{n-2(n-1)} + h_{1\,n-1}dk_{n-1(n-1)} + l_{1n},\\
0 &= h_{1n-1}dk_{n-1(n)}.
\end{aligned}$$

Из последних $n + 1$ тождества можно найти функции $l_{11}, \ldots, l_{1n}$ и подставить в первое, которое тогда примет вид

$$\begin{aligned}
(Zdk_1)_{(t)} &= h_{11}\,[dk_{1(t)} + p\,dk_{1(x)} + q\,dk_{1(p)} + r\,dk_{1(q)}] + \cdots\\
&\cdots + h_{1n-2}\,[dk_{n-2(t)} + p\,dk_{n-2(x)} + q\,dk_{n-2(p)} + r\,dk_{n-2(q)} + \cdots\\
&\cdots + p^{(n)}dk_{n-2(n-1)}] - p\,(Zdk_1)_{(x)} - q\,(Zdk_1)_{(p)} - r\,(Zdk_1)_{(q)}.
\end{aligned}$$

Тождество это можно рассматривать на подмногообразии в V, определяемом требованием, чтобы коэффициенты при функциях $h_{11}, \ldots, h_{1n-2}$ обращались в нуль. Тогда для определения поля Z остается уравнение

$$(Zdk_1)_{(t)} + \mathbf{p}\,(Zdk_1)_{(x)} + \mathbf{q}\,(Zdk_1)_{(p)} + \mathbf{r}\,(Zdk_1)_{(q)} = 0, \tag{1}$$

в котором переменные $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ связаны условием

$$\mathbf{q}dk_{1(p)} + \mathbf{r}dk_{1(q)} = 0. \tag{2}$$

Легко подсчитать внешний дифференциал dk_1. Если ввести обозначение $\mathbf{a} = (\mathbf{p}^2 + 1)\,\mathbf{q} - \mathbf{p}\,(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$ и для всякого столбца $\mathbf{b}$ под символом $d\mathbf{b}$ понимать столбец, составленный из дифференциалов компонент столбца $\mathbf{b}$, тогда для dk_1 получим следующее выражение:

$$dk_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot [-(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\,d\mathbf{p} - 2\mathbf{q}\,(\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}) + (1 + \mathbf{p}^2)\,d\mathbf{q}]}{(1 + \mathbf{p}^2)^{5/2}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})^{1/2}}.$$

Условие (2) перепишется следующим образом:

$$(1 + \mathbf{p}^2)\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = 3\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})\,(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}). \tag{3}$$

Пусть $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$. Уравнение (1) можно умножить на величину $(1 + \mathbf{p}^2)\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$ и в полученном выражении использовать (3). Тогда

$$(1 + \mathbf{p}^2)\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\,(Zdk_1)_{(t)} + (1 + \mathbf{p}^2)\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{p}\,(Zdk_1)_{(x)} +$$
$$+ (1 + \mathbf{p}^2)\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{q}\,(Zdk_1)_{(p)} + 3\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})\,(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\,\mathbf{r}\,(Zdk_1)_{(q)} = 0. \tag{4}$$

Поскольку теперь уже единичный вектор $\mathbf{r}$ совершенно произвольный, можно приравнять к нулю коэффициент при нем. Умножая полученное выражение внешним образом на столбец $\mathbf{a}$, приходим к уравнению

$$\mathbf{a} \wedge (Zdk_1)^{(q)} = 0, \tag{5}$$

где $(Zdk_1)^{(q)}$ обозначает столбец, полученный из строки $(Zdk_1)_{(q)}$ поднятием индекса с помощью рассматриваемой метрики. Производную Ли Zdk_1 подсчитать просто, и уравнение (5) приведется к следующему:

$$\mathbf{a} \wedge Z\,[-(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\,(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{p}) - 2\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})\,(\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}) + (1 + \mathbf{p}^2)\,(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{q})]^{(q)}] = 0,$$

которое с использованием формулы (*ii*) * поля Z примет вид

$$(1 + \mathbf{p}^2)\,\mathbf{a} \wedge Z\mathbf{a} - 2\,(1 + \mathbf{p}^2)\,(\partial_t + \mathbf{p}\partial_x)\,\mathbf{a} \wedge \overset{*}{\partial}_p\,(\mathbf{a} \cdot \overset{\downarrow}{\varphi}) -$$
$$-(1 + \mathbf{p}^2)\,\mathbf{a} \wedge \overset{*}{\partial}_x\,(\mathbf{a} \cdot \varphi) = 0,$$

где звездочкой обозначено поднятие индекса в строке ∂_x или ∂_p. Оператор ∂_p во втором слагаемом не должен действовать на столбец $\mathbf{a}$, и оно преобразовывается дальше: $\mathbf{a} \wedge \overset{*}{\partial}_p\,(\mathbf{a} \cdot \overset{\downarrow}{\varphi}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}\tau = 0$. Тогда исходное уравнение (1) приобретает окончательный вид

$$\mathbf{a} \wedge Z\mathbf{a} - \mathbf{a} \wedge \overset{*}{\partial}_x\,(\mathbf{a} \cdot \varphi) = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) должно выполняться тождественно по переменным $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и приводит к следующим условиям:

$$\overset{*}{\partial}_x + \partial_t\xi = 0, \tag{7}$$

$$\mathbf{p}^2\partial_t\tau - \mathbf{p}\partial_x\,(\mathbf{p} \cdot \xi) = 0, \tag{8}$$

$$\partial_{tt}\xi = 0, \tag{9}$$

$$\mathbf{p}\partial_{tt}\tau - 2\mathbf{p}\partial_x\partial_t\xi = 0, \tag{10}$$

$$2\mathbf{p}\,(\mathbf{p}\partial_x)\,\partial_t\tau - (\mathbf{p}\partial_x)^2\,\xi = 0, \tag{11}$$

$$(\mathbf{p}\partial_x)^2\,\tau = 0. \tag{12}$$

---

* Если $D_{(1)} = \partial_t + \mathbf{p}\partial_x$, то $\pi^{(1)} = -D_{(1)}\varphi$, а $\pi^{(2)} = -D_{(1)}^2\varphi - (q\partial_x)\varphi - 2D_{(1)}q\tau$.

Продифференцируем (7) и (8) по переменной t и примем во внимание (9) и (10), умноженное на р. Тогда получим, что $\partial_x \partial_t \tau = 0$ и $\mathrm{p}\partial_x (\mathrm{p} \cdot \partial_t \xi) = 0$. Если подставить эти результаты соответственно в (11) и (10), то получим, что $(\mathrm{p}\partial_x)^2 \xi = \mathbf{0}$ и $\partial_{tt}\tau = 0$. Учитывая условие (12), видим, что все вторые производные от τ и ξ равны нулю. Из тождеств (8) и (7) следует, что

$$2\delta_\alpha^\beta \partial_t \tau = \xi_\alpha^{;\beta} + \xi^\beta_{,\alpha}, \tag{13}$$

$$\tau_{,\alpha} + \partial_t \xi_\alpha = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ \ldots, \ n-1), \tag{14}$$

откуда сразу видно, что искомый генератор X симметрии системы $dk_l = 0$ ($l = 1, \ldots, n-1$) разлагается по генераторам псевдоевклидовой группы пространства E и по генератору однородных растяжений $X_d = \mathrm{x} \cdot \partial_x$.

Выполнение соотношения (iii) для генератора X_d следует из того, что $Z_d k_l = k_l$ ($l = 1, \ldots, n-1$). При этом используется формула

$$Z_d [(\mathrm{p}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}^{(l)})^2 + (\mathrm{p}^{(2)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}^{(l)})^2] =$$

$$= 2 \sum_{m=1}^{l-1} m [(\mathrm{p}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}^{(l)})^2 + (\mathrm{p}^{(2)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}^{(l)})^2]. \tag{15}$$

То, что соотношения (i) инвариантны относительно растяжений, также следует из (15).

Если $\dim \mathrm{E} = 2$, то правая часть уравнения (5) равна нулю тождественно. В этом случае необходимо использовать непосредственно уравнение (4). Инфинитезимальные симметрии окажутся тогда генераторами конформной группы пространства E.

Рассуждения остаются в силе, если в системе $dk_1 = \ldots = dk_{n-1} = 0$ отбросить все уравнения, кроме первого. Таким образом, инфинитезимальные симметрии линий постоянной первой кривизны также натянуты на генераторы однородных растяжений (и псевдоевклидовых движений).

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
2. *Шилов Г. Е.* Математический анализ : Функции одного переменного.— М. : Наука, 1970.— Ч. 3. 352 с.
3. *Hermann R.* Geometry, physics, and systems.— New York : Dekker, 1973.— 306 p.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
25.06.80

УДК 517.968.23

А. И. Песчанский, В. В. Шевчик

О ПЛОЩАДНОЙ ЗАДАЧЕ СО СДВИГОМ

Площадной задачей со сдвигом в работе [5] названа задача с аналитическим сдвигом для полуплоскости:

$$G^+(z)\,\Phi^+(z + \beta i) - \lambda\Phi^+(z) = H^+(z) \quad (\beta > 0), \tag{1}$$

где $G^+(z)$, $H^+(z)$ — заданные функции, аналитические в верхней полуплоскости; $\Phi^+(z)$ — искомая функция, удовлетворяющая соотношению (1).

Задача (1) — частный случай сложной, более общей задачи

$$G^+(z)\,\Phi^+(a^+(z)) - \lambda\Phi^+(z) = H^+(z) \tag{2}$$

с произвольным сдвигом $a^+(z)$ верхней полуплоскости на себя. Нам неизвестны какие-либо попытки провести исследование задачи (2) при общих предположениях относительно функции $a^+(z)$. Что касается задачи (1), то при значительных ограничениях она рассматривалась в работах [3, 6], а в