

Но матричный многочлен $I(x)$ можно представить в виде

$$I(x) = \prod_{i=1}^s (Ex - D_i),$$

где $D_i = \text{diag}(\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_n^{(i)})$ и $D_i D_j = D_j D_i$, $i, j = 1, \dots, s$.

Преобразованием при помощи матрицы P^{-1} перейдем обратно к матричному многочлену $A(x)$, т. е.

$$A(x) = P^{-1} I(x) P = \prod_{i=1}^s P^{-1} (Ex - D_i) P.$$

Очевидно, матрицы $B_i = P^{-1} D_i P$, $i = 1, \dots, s$ имеют простую структуру и $B_i B_j = B_j B_i$, $i, j = 1, \dots, s$. Теорема доказана.

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1966.— 576 с.
2. Зелиско В. Р. О строении одного класса обратимых матриц.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 14—21.
3. Казімірський П. С. Необхідність умов розкладу матричного многочлена на лінійні множники.— Укр. мат. журн., 1977, 29, № 5, с. 653—658.
4. Казимирский П. С. Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1976, с. 29—40.
5. Казімірський П. С., Петричкович В. М. Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К.: Наук. думка, с. 61—66.
6. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы.— Минск: Наука и техника, 1966.— 104 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
29.01.80

УДК 531

Р. И. Мокрик, Ю. А. Пырьев

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

При решении задач математической физики часто используются аналитические свойства выражений, которые содержат многозначные функции. Среди многозначных функций особую роль играют радикалы, аналитические свойства которых в несвязанных задачах изучены в работах [2, 5]. Однако сколь-нибудь полные исследования радикалов, играющих важную роль в построении аналитико-численных методов решения связанных задач обобщенной термоупругости, до сих пор в литературе отсутствуют.

В данной работе изучаются аналитические свойства характеристических параметров обобщенной связанной термоупругой среды, которые являются многозначными функциями комплексной переменной ω и через которые выражаются трансформанты интегральных преобразований [4]:

$$\lambda_{1,2} = \frac{c_1}{\kappa} \sqrt{\frac{\chi}{2}} \gamma_{1,2}, \quad \gamma_{1,2} = \sqrt{\chi [1 + M^2(1 + \varepsilon)] + i(1 + \varepsilon) \pm \Omega}, \quad (1)$$

$$\Omega = \sqrt{\{\chi [1 + M^2(1 + \varepsilon)] + i(1 + \varepsilon)\}^2 - 4\chi(\chi M^2 + i)}, \quad (2)$$

где

$$\chi = \frac{\omega}{\omega^*}; \quad \omega^* = \frac{c_1^2}{\kappa}; \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; \quad c_q^2 = \frac{\kappa}{\tau_r}; \quad M = \frac{c_1}{c_q};$$

λ, μ — коэффициенты Ламе; ρ — плотность среды; κ — коэффициент температуропроводности; τ_r — время релаксации теплового потока; ε — коэффициент связанности.

Общие свойства радикалов γ и α . Исследуем аналитические свойства функции

$$\gamma = \sqrt{\chi[1 + M^2(1 + \varepsilon)] + i(1 + \varepsilon) + \sqrt{\rho(\chi - \chi_+)(\chi - \chi_-)}}, \quad (3)$$

где $\chi_{\pm} = \frac{-iq \pm 2\sqrt{\varepsilon}}{\rho}$; $\rho = M^4(1 + \varepsilon)^2 + 2M^2(\varepsilon - 1) + 1$; $q = M^2(1 + \varepsilon)^2 - 1 + \varepsilon$; $M > 0$; $0 < \varepsilon < 1$.

Лемма 1. В каждой точке $\chi = \chi_{\pm}$ функция γ имеет две различные точки ветвления первого порядка.

Доказательство. В точках $\chi = \chi_{\pm}$ внутренний корень функции γ имеет точки ветвления первого порядка. Если в окрестности $U_+ = \{0 < |\chi - \chi_+| < r_1\}$, $r_1 = \min\{|\chi_{\pm}|, |\chi_{\pm} - \chi_M|, |\chi_+ - \chi_-|\}$, $\chi_M = -i/M^2$ выбрать круг $U_+ = \{|\chi - \chi_+ - 0,5r_1e^{it_0}| < 0,5r_1\}$, $t_0 = \text{const}$, то в U_+ можно выделить четыре различные ветви f_v функции γ , характеризующиеся различными знаками обоих корней. Пусть f_1 — одна из этих ветвей. Элемент $F_1 = (U_+, f_1)$ после продолжения вдоль окружности $\Gamma_1: \chi = \chi_+ + 0,5r_1e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ перейдет в элемент $F_2 = (U_+, f_2)$, где f_2 — другая ветвь, ибо внутренний корень при таком обходе изменит знак. Повторный обход Γ_1 снова приведет к элементу F_1 , так как обходы Γ_1 не изменяют ветвей корня $\sqrt{\chi - \chi_-}$ и ветвей внешнего корня, точками ветвления которого являются точки $\chi = \chi_M, \chi = 0$. Точно в таком же отношении находятся две остальные ветви $f_3 = -f_1, f_4 = -f_2$. Для точки $\chi = \chi_-$ исследования проводятся аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. В точке $\chi = \chi_M = -i/M^2$ функция γ имеет одну точку ветвления первого порядка и два правильных, неразветвленных элемента.

Доказательство. Пусть $V' = \{0 < |\chi - \chi_M| < r_2\}$, $r_2 = \min\{|\chi_M - \chi_{\pm}|, |\chi_M|\}$, $V = \{|\chi - \chi_M - 0,5r_2e^{it_0}| < 0,5r_2\}$ и g_v четыре ветви функции γ в круге V . Пусть g_1 и g_2 ($g_2 = -g_1$) ветви, для которых внутренний корень равен i/M^2 при $\chi = -i/M^2$. Обход окружности $\Gamma_2: \chi = -i/M^2 + 0,5r_2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ не изменит ветви внутреннего корня, но изменит знак у внешнего корня (когда χ описывает окружность Γ_2 , точка $z = [1 + M^2(1 + \varepsilon)]\chi + i(1 + \varepsilon) + \Omega$ там, где рассматривается выбранная ветвь внутреннего корня, описывает в плоскости z замкнутый жорданов путь, содержащий внутри точку $z = 0$), поэтому при таком обходе элемент (V, g_1) перейдет в (V, g_2) . Вторичный обход Γ_2 снова изменит знак внешнего корня и поэтому снова приведет к элементу (V, g_1) . Оставшиеся две ветви g_3 и g_4 ($g_4 = -g_3$), для которых внутренний корень равен $-i/M^2$ при $\chi = -i/M^2$, при обходе Γ_2 не изменятся (при этом точка z с выбранной ветвью корня описывает замкнутый жорданов путь, охватывающий точку $z = -i/M^2$ и не охватывающий точки $z = 0$), следовательно, такой обход переводит каждый из элементов (V, g_3) и (V, g_4) в себя, т. е. они являются неразветвленными элементами. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. В точке $\chi = 0$ функция γ имеет два правильных неразветвленных элемента и одну точку ветвления первого порядка.

Доказательство. Рассмотрим $W' = \{0 < |\chi| < r_3\}$, $r_3 = \min\{|\chi_{\pm}|, |\chi_M|\}$, $W = \{|\chi - 0,5r_3e^{it_0}| < r_3/2\}$ и φ_v четыре ветви функции γ в круге W . Пусть φ_1 и φ_2 ($\varphi_2 = -\varphi_1$) ветви, для которых внутренний корень равен $+i(1 + \varepsilon)$ при $\chi = 0$. При обходе окружности $\Gamma_3: \chi = 0,5r_3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ветви не изменятся, т. е. такой обход переводит каждый из элементов $(W; \varphi_1)$, (W, φ_2) в себя. Две ветви φ_3 и φ_4 ($\varphi_3 = -\varphi_4$), для которых внутренний корень равен $-i(1 + \varepsilon)$ при $\chi = 0$, при обходе окружности Γ_3 изменятся, так что элемент (W, φ_3) переходит в (W, φ_4) и при вторичном обходе вновь возвращается к элементу (W, φ_3) . Лемма 3 доказана.

Для изучения функции γ в точке $\chi = \infty$ возьмем приколотую окрестность $D' = \{r_4 < |\chi| < \infty\}$, $r_4 = \max\{|\chi_{\pm}|, |\chi_M|\}$ и в ней круг $D = \{|\chi - 2r_4e^{it_0}| < r_4\}$. Пусть (D, h_1) — какой-либо из четырех элементов

функции γ в круге D . Обход окружности $\Gamma_4 : \chi = 2r_4 e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ приводит к изменению знака у внешнего корня, поэтому он приведет к другому элементу (D, h_2) . Вторичный обход приведет опять к элементу (D, h_1) . Две ветви h_3 и h_4 ($h_3 = -h_4$) ведут себя аналогично. Отсюда следует такая лемма.

Лемма 4. В точке $\chi = \infty$ функция γ имеет две различные точки ветвления первого порядка.

Остальные точки комплексной плоскости χ являются правильными точками аналитической функции γ . Пользуясь биномиальным рядом, нетрудно написать обобщенные лорановы разложения аналитической функции γ .

В кольце $U'_+ = \{0 < |\chi - \chi_+| < r_1\}$ имеет место представление

$$\gamma = \pm [a_0 + a_1 \sqrt{\chi - \chi_+} + O(\chi - \chi_+)],$$

$$a_0 = \sqrt{\chi_+ [1 + M^2(1 + \varepsilon)] + i(1 + \varepsilon)}, \quad a_1 = \sqrt[4]{\varepsilon/a_0};$$

в кольце $V' = \{0 < |\chi - \chi_m| < r_2\}$

$$\gamma = \begin{cases} \sqrt{2} M \sqrt{\chi + \frac{i}{M^2}} \left[1 + O\left(\chi + \frac{i}{M^2}\right) \right], \\ \pm \frac{\sqrt{2}}{M} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[1 + O\left(\chi + \frac{i}{M^2}\right) \right]; \end{cases}$$

в кольце $W' = \{0 < |\chi| < r_3\}$

$$\gamma = \begin{cases} \pm \sqrt{2(1 + \varepsilon)} e^{i\frac{\pi}{4}} [1 + O(\chi)], \\ \sqrt{\chi} \sqrt{\frac{2}{1 + \varepsilon}} [1 + O(\chi)]; \end{cases}$$

в кольце $D' = \{r_3 < |\chi| < \infty\}$

$$\gamma = \sqrt{\chi} [\sqrt{1 + M^2(1 + \varepsilon)} \pm \sqrt{p} + O(\chi^{-1})].$$

Эти результаты хорошо иллюстрируют проведенный выше анализ точек ветвления рассматриваемой функции γ .

Для полного определения четырехзначной функции γ необходимо ввести четырехлиственную риманову поверхность комплексной переменной χ , причем переход с одного листа на другой должен осуществляться при пересечении линии ветвления или разреза. Риманова поверхность функции γ строится с использованием свойств, приведенных в леммах 1—4. Для этого, например, четыре листа плоскости χ разрезаются вдоль отрезков $(\chi_+, 2\sqrt{\varepsilon/p} - i\infty)$, $(\chi_-, -2\sqrt{\varepsilon/p} - i\infty)$, первые два листа разрезаются также вдоль отрезка $(-i/M^2, -i\infty)$, на третьем и четвертом листах проводятся разрезы вдоль отрезка $(0, -i\infty)$ и соединяются левый (правый) край первого листа с правым (левым) краем четвертого вдоль отрезков $(\chi_{\pm}, \pm 2\sqrt{\varepsilon/p} - i\infty)$. Аналогичное построение производится со вторым и третьим листами на тех же разрезах. На каждом из остальных разрезов $(-i/M^2, -i\infty)$, $(0, -i\infty)$ соединяются также вместе первый и второй, третий и четвертый листы. На построенной таким образом поверхности Римана функция γ будет уже однозначной.

Перейдем к исследованию функции $\alpha(\chi) = \frac{c_1}{\chi} \sqrt{\frac{\chi}{2}} \gamma(\chi)$. Легко видеть, что функция α обладает в точках $\chi = \chi_{\pm}$ теми же свойствами, что и функция γ , указанными в лемме 1.

Лемма 5. В каждой точке $\chi = 0$ и $\chi = -i/M^2$ функция $\alpha(\chi)$ имеет одну точку ветвления первого порядка и два правильных неразветвленных элемента.

Лемма 6. В точке $\chi = \infty$ функция $\alpha(\chi)$ имеет четыре правильных неразветвленных элемента.

Справедливость лемм 5 и 6 вытекает из лемм 2—4 и представления (1).

Знание аналитических свойств функции $\alpha(\chi)$ позволяет определить (конкретизировать) функции λ_1 и λ_2 , задаваемые представлением (1).

Определение. Однозначную функцию $\alpha(\chi)$ на четырехлистной римановой поверхности, принимающую при $\chi = i\chi_2$ и $\chi_2 \rightarrow \infty$ на первом листе значение $\alpha(\chi) \sim i \frac{c_1}{\chi} \chi_2 \sqrt{1 + M^2(1 + \varepsilon) + \sqrt{\rho}}$, будем называть функцией $\lambda_1(\chi)$, а функцию $\alpha(\chi)$, принимающую при этих же условиях значение $\alpha(\chi) \sim i \frac{c_1}{\chi} \chi_2 \sqrt{1 + M^2(1 + \varepsilon) - \sqrt{\rho}}$, будем называть функцией $\lambda_2(\chi)$.

На рис. 1, 2 показаны первые и вторые (третье и четвертые) листы соответственно функций $\lambda_1(\chi)$, $\lambda_2(\chi)$ [$\lambda_2(\chi)$, $\lambda_1(\chi)$]. Волнистой линией изображены разрезы, соединяющие точки ветвлений. При непрерывном переходе через разрезы 1, т. е. при переходе с первого (второго) листа на четвертый (третий), значения функций λ_1 и λ_2 переходят одно в другое. При переходе через разрез 2, т. е. при переходе с первого (третьего) листа на второй (четвертый), значение функции λ_1 (λ_2) меняет знак.

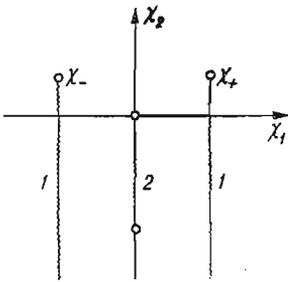


Рис. 1

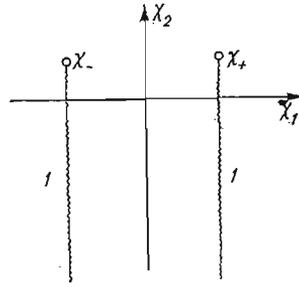


Рис. 2

На первых листах у функций λ_1 и λ_2 действительные и мнимые части имеют выражения, которые согласуются с проведенными разрезами на рис. 1, 2:

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 2^{-3/2} a (\sqrt{Z_{\pm} + X_{\pm}} \sqrt{z - \chi_2} + \sqrt{Z_{\pm} - X_{\pm}} \sqrt{z + \chi_2}) \frac{c_1}{\chi}, \quad (4)$$

$$\operatorname{Im} \lambda_{1,2} = 2^{-3/2} (\sqrt{Z_{\pm} + X_{\pm}} \sqrt{z + \chi_2} - \sqrt{Z_{\pm} - X_{\pm}} \sqrt{z - \chi_2}) \frac{c_1}{\chi}, \quad (5)$$

где $a = \pm 1$ при $\chi_1 \geq 0$;

$$Z_{\pm} = \sqrt{X_{\pm}^2 + Y_{\pm}^2}; \quad z = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2};$$

$$X_{\pm} = \chi_2 [1 + M^2(1 + \varepsilon)] + 1 + \varepsilon \pm \sqrt{\rho} J;$$

$$Y_{\pm} = \chi_1 [1 + M^2(1 + \varepsilon)] \pm \sqrt{\rho} R;$$

$$R = -L_- N_+ - N_- L_+; \quad J = L_+ N_+ - L_- N_- \quad \text{при } \chi_1 < -2\sqrt{\varepsilon/p};$$

$$R = L_- N_+ - N_- L_+; \quad J = L_+ N_+ + L_- N_- \quad \text{при } |\chi_1| < 2\sqrt{\varepsilon/p};$$

$$R = L_- N_+ + N_- L_+; \quad J = L_+ N_+ - L_- N_- \quad \text{при } \chi_1 > 2\sqrt{\varepsilon/p};$$

$$L_{\pm} = 2^{-1/2} \sqrt{x_2 \pm \left(\chi_2 + \frac{q}{p}\right)}; \quad N_{\pm} = 2^{-1/2} \sqrt{x_1 \pm \left(\chi_2 + \frac{q}{p}\right)};$$

$$x_n = \sqrt{\left(\chi_2 + \frac{q}{p}\right)^2 + \left[\chi_1 + (-1)^n \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{p}\right]^2}, \quad n = 1, 2.$$

Отметим, что точки ветвления первого порядка функций λ_1 и λ_2 лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} \chi > 0$ при условии

$$M^2 < \frac{1 - \varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2}. \quad (6)$$

На основе изложенного можно утверждать следующий важный для практики результат.

Теорема. На первом листе римановой поверхности $\text{Im } \lambda_{1,2} > 0$ в полуплоскости $\text{Im } \chi > 0$ независимо от того, выполняется неравенство (6) или нет, а $\text{Re } \lambda_{1,2} \approx 0$ при $\text{Re } \chi \approx 0$.

В случае $M = 0$ аналогичное утверждение доказано в работе [3]. Отметим, что в работе [1] доказана первая часть теоремы в случае бесконечной скорости распространения тепла $M = 0$ при $\text{Im } \chi > \text{Im } \chi_{\pm}$.

1. Купрадзэ В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.— М.: Наука, 1976.— 664 с.
2. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов.— М.: Мир, 1974.— 324 с.
3. Мокрик Р. И., Пырьев Ю. А. Динамические свойства решений задач термоупругости.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 4, с. 42—45.
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика.— Киев: Наук. думка, 1976.— 312 с.
5. Davies B. Integral transforms and their applications.— New York: Springer, 1978.— 410 p.

Львовский университет
Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
22.10.79

УДК 539.377

Б. С. Воробец

ДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ В СФЕРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Постановка задачи. Рассмотрим упругое полупространство $z \geq 0$, отнесенное к цилиндрической системе координат r, φ, z (рисунок). На внешней поверхности полупространства $z = 0$ происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} - \varepsilon_c t = 0, \quad (1)$$

где t — температура; λ, ε_c — коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи; температуру внешней среды полагаем равной нулю. Поверхность $z = 0$ свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0. \quad (2)$$

В полупространстве на расстоянии d от плоской поверхности $z = 0$ расположена упругая сферическая оболочка, внутри которой имеется теплопроводный наполнитель с равномерно распределенными источниками тепла

$$q(\tau) = q_1 \exp(i\omega\tau), \quad \omega, q_1 = \text{const}, \quad (3)$$

(τ — время). На контактирующих поверхностях (полупространство — оболочка, оболочка — включение) выполняются условия идеального теплового и механического контактов. При таких условиях и распределении источников тепла (3) термоупругое состояние системы не будет зависеть от координаты φ .

Введем сферическую систему координат ρ, φ, θ (см. рисунок). Считаем материал включения «мягким» (жесткость включения мала по сравнению с жесткостью полупространства и оболочки). Тогда, используя результаты