$$= -[L_n^{(1)}(j)\,a_n^{(2j+1)} + L_n^{(2)}(j)\,b_n^{(2j+1)} + M_n(j)\,d_n^{(2j+1)}], \tag{23}$$

$$a_n^{(2j+2)} = -N_n(j)\,N_n^{-1}(h)\,a_n^{(2j+1)},\ \ a_n^{(2j+1)} = \int\limits_0^\infty A_j(\xi)\,q_n^{(1)}\xi d\xi,\ \ d_0^{(2j+2)} = 0,$$

$$b_n^{(2j+1)} = \int\limits_0^\infty B_j(\xi)\,q_n^{(2)}\xi d\xi,\ \ c_n^{(2j+1)} = \int\limits_0^\infty C_j(\xi)\,q_n^{(3)}\xi d\xi,\ \ d_0^{(2j+1)} = 0,$$

$$q_n^{(p)} = (2n+1)\,i^n\mu_p^{-1}\exp(-\mu_p d)\,P_n(i\mu_p/m_p),\quad p = 1,\ 2,\ 3.$$

Здесь величины $A_n^{(i)}(j)$, $B_n(j)$, $L_n^{(i)}(j)$, $M_n(j)$ и $N_n(j)$ определяются формулами (19), если в них функции $h_n(x)$ заменить сферическими функциями Бесселя $j_n(x)$.

Уравнения (23) служат для определения коэффициентов $a_n^{(2j+2)}$, $b_n^{(2j+2)}$ и $d_n^{(2j+2)}$ по коэффициентам предыдущего приближения; если они найдены, то из (20) следует, что известно и значение $c_n^{(2j+2)}$. Этим согласно (15) функции F_{2j+2}, H_{2j+2} и Ψ_{2j+2} полностью определяются.

Таким образом, соотношения (21) — (23) дают возможность определить любое приближение для функций F, H и Ψ, построенных в виде рядов (14). С использованием этих функций, а также соотношений (6), (7), (10) и (13) можно получить формулы для определения температуры, перемещений, напряжений в полупространстве и усилий в оболочке (ввиду громоздкости указанных формул приводить их не будем).

Отметим, что нулевое приближение (21) рядов (14) соответствует решению задачи теплопроводности и динамической задачи термоупругости для пространства с рассматриваемым сферическим включением.

1. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— 364 с.
2. *Подстригач Я. С., Воробец Б. С., Чернуха Ю. А.* О термоупругом равновесии неоднородных тел.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1976, вып. 16, с. 23—28.
3. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* О напряженно-деформированном состоянии нагреваемых упругих тел, содержащих включения в виде тонких оболочек.— Прикл. механика, 1967, 3, вып. 6, с. 8—16.
4. *Fox N.* Torsion-free stress systems in a thick plate containing a spherical cavity.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1960, 13, N 2, p. 228—246.
5. *Kulshrestha P. K., Puri P.* Coupled thermoelastic problem for an elastic half-space with an embedded spherical cavity.— Arch. Mech., 1971, 23, N 2, p. 249—263.
6. *Thiruvenkatachar V. R., Viswanathan K.* Dynamic response of an elastic half-space to timedependent surface tractions over an embedded spherical cavity.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1965, 287, N 1411, p. 549—567.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
28.05.80

УДК 539.3

В. С. Колесов, Л. Г. Смирнов

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассмотрим упругое изотропное тело с включением из материала, обладающего теми же упругими свойствами, но другим коэффициентом линейного расширения. Пусть тело от начальной нулевой температуры нагревается до постоянной температуры T_0. Возникающее при этом напряженное состояние аналогично тому, которое имеет место в однородном теле, если область включения нагревается до T_0, а остальное тело сохраняет температуру, равную нулю. Задачи такого рода впервые были исследованы Дж. Гудьером [4], получившим ряд общих результатов и рассмотревшим некоторые формы включений (прямоугольник и эллипс) в бесконечном упругом слое. Обобщению этих задач на случай неограниченного пространства, полупространства и полуплоскости, а также решению задач для других видов включений посвящены работы [1, 5—9]. В настоящей статье строится решение для полуплоскости с произвольным включением. В качестве примера исследуется напряженное состояние полуплоскости с эллиптическим включением.

Пусть в полуплоскости $y \leqslant 0$ имеется включение, занимающее область D, ограниченную замкнутой кривой L. Используя комплексное представление функции напряжений и обозначения работы [2], граничные условия записываем следующим образом:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = 0 \quad \text{на прямой } y = 0, \tag{1}$$

$$\varphi^+(t) + t\overline{\varphi'^+(t)} + \overline{\psi^+(t)} = \varphi^-(t) + t\overline{\varphi'^-(t)} + \overline{\psi^-(t)} \quad \text{на } L, \tag{2}$$

$$\varkappa\varphi^+(t) - t\overline{\varphi'^+(t)} - \overline{\psi^+(t)} = \varkappa\varphi^-(t) - t\overline{\varphi'^-(t)} - \overline{\psi^-(t)} + 2\mu g(t) \quad \text{на } L, \tag{3}$$

где $\varkappa = 3 - 4\nu$; ν — коэффициент Пуассона; μ — модуль сдвига, а функция $g(t)$ задается выражением

$$g(t) = g_2(t) - g_1(t), \tag{4}$$

причем $g_1(t)$ — перемещения точек контура L, которые имели бы место в отсутствие дополнения D до полуплоскости, а $g_2(t)$ — перемещения точек контура L, которые имели бы место в отсутствие области D. Обозначения $\varphi^+(t)$, $\psi^+(t)$, $\varphi^-(t)$ и $\psi^-(t)$ относятся к граничным значениям функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на контуре L соответственно при приближении извне и изнутри к контуру L.

В работе [3] предложен эффективный прием, позволяющий свести плоскую задачу для тела с включениями к некоторой вспомогательной задаче для тела без включений с фиктивными нагрузками на внешнем контуре.

Сложим равенства (2), (3). В результате получим

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = \frac{2\mu g(t)}{1+\varkappa} \quad \text{на } L. \tag{5}$$

Далее, переходя в условии (2) к сопряженным значениям и учитывая равенство (5), находим

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = -\frac{2\mu h(t)}{1+\varkappa} \quad \text{на } L, \tag{6}$$

где положено

$$h(t) = -\overline{g(t)} - \bar{t}g'(t), \quad g'(t) = \frac{dg(t)}{dt}.$$

Из условий (5), (6) на основании теории интегралов Коши имеем

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \frac{\mu}{\pi i(1+\varkappa)}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}, \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \frac{\mu}{\pi i(1+\varkappa)}\int\limits_L \frac{h(t)\,dt}{t-z}, \tag{7}$$

где $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функции, голоморфные в полуплоскости $y \leqslant 0$.

Полагая

$$\varphi_*(z) = \frac{\mu}{\pi i(1+\varkappa)}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}, \quad \psi_*(z) = \frac{\mu}{\pi i(1+\varkappa)}\int\limits_L \frac{h(t)\,dt}{t-z}, \tag{8}$$

после подстановки (7) в (1) получаем

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = -\varphi_*(t) - t\overline{\varphi_*'(t)} - \overline{\psi_*(t)}, \tag{9}$$

причем правая часть этого выражения — известная функция. Таким образом, мы пришли к обычной первой основной задаче теории упругости для полуплоскости. Решение такой задачи известно [2]:

$$
\Phi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N-iT}{x-z}\,dx,
$$
$$
\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N+iT}{x-z}\,dx - \Phi_0(z) - z\Phi_0'(z), \tag{10}
$$

где введены обозначения:

$$
\Phi(z) = \varphi'(z),\quad \Psi(z) = \psi'(z),
$$
$$
N - iT = \Phi_*(z) + \overline{\Phi_*(z)} + z\overline{\Phi_*'(z)} + \overline{\Psi_*(z)}, \tag{11}
$$
$$
N + iT = \Phi_*(z) + \overline{\Phi_*(z)} + \bar{z}\Phi_*'(z) + \Psi_*(z).
$$

Из обозначений (8) и (11) получим

$$
\Phi_*(z) = \frac{\mu}{\pi i(1+\varkappa)}\int_L \frac{g'(t)\,dt}{t-z},\quad \Phi_*'(z) = \frac{\mu}{\pi i(1+\varkappa)}\int_L \frac{g''(t)\,dt}{t-z},
$$
$$
\Psi_*(z) = \frac{\mu}{\pi i(1+\varkappa)}\int_L \frac{h'(t)\,dt}{t-z}.
$$

Далее, вычисляя значения $N \pm iT$ на границе полуплоскости и подставляя их в решения (10), находим

$$
\Phi_0(z) = \frac{\mu}{2\pi i(1+\varkappa)}\int_L \frac{2g'(t) + (\bar{t}+z) + 2h'(t)}{\bar{t}-\bar{z}}\,d\bar{t},
$$
$$
\Psi_0(z) = \frac{\mu}{2\pi i(1+\varkappa)}\left[\int_L g''(t)\,dt + 2\int_L \frac{g'(t)\,dt}{\bar{t}-\bar{z}}\right] - \Phi_0(z) - z\Phi_0'(z). \tag{12}
$$

До сих пор во всех рассуждениях нигде не использовалась специфика сформулированной выше задачи. Очевидно, что при нагреве всей полуплоскости до температуры T_0 функции $g(t)$ и $h(t)$ имеют вид

$$
g(t) = \lambda t,\quad h(t) = -2\lambda t,\quad \lambda = (1+\nu)(\alpha_2-\alpha_1)T_0.
$$

Подставляя эти выражения в (12), получаем

$$
\Phi_0(z) = -\frac{2\lambda\mu}{\pi i(1+\varkappa)}\int_L \frac{dt}{\bar{t}-z},\quad \Psi_0(z) = -\Phi_0(z) - z\Phi_0'(z). \tag{13}
$$

Выражения для $\Phi_*(z)$, $\Psi_*(z)$ примут вид

$$
\Phi_*(z) = \begin{cases} \dfrac{2\lambda\mu}{1+\varkappa}, & z\in D, \\ 0, & z\notin D, \end{cases}\quad \Psi_*(z) = -\frac{2\lambda\mu}{\pi i(1+\varkappa)}\int_L \frac{d\bar{t}}{t-z}. \tag{14}
$$

Поскольку

$$
\int_L \frac{dt}{\bar{t}-z} = \overline{\int_L \frac{d\bar{t}}{t-\bar{z}}},
$$

то для определения потенциалов $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ достаточно вычислить $\int_L d\bar{t}/(t-z)$.

Пусть $z = \omega(\xi)$ — функция, конформно отображающая внешность единичного круга плоскости ξ на внешность контура L плоскости z. Наиболее общая функция такого рода имеет вид

$$
\omega(\xi) = a_0\xi + \sum_{n=1}^{\nu} a_n\xi^{-n}.
$$

На окружности единичного радиуса справедливы равенства

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\tau}; \quad d\bar{\tau} = -\frac{1}{\tau^2}\,d\tau.$$

Тогда

$$\int\limits_L \frac{d\bar{t}}{t-z} = \int\limits_C \frac{\overline{\omega'(\tau)}\,d\bar{\tau}}{\omega(\tau)-z} = -\int\limits_C \frac{\left(a_0 - \sum\limits_{n=1}^{N} n\bar{a}_n\tau^{n+1}\right)d\tau}{\tau^2[\omega(\tau)-z]}. \tag{15}$$

Здесь C — окружность единичного радиуса с центром в начале координат; τ — произвольная точка окружности.

Подынтегральная функция в (15) вне единичного круга C аналитическая всюду, за исключением точки $\xi = \xi_0$, являющейся корнем уравнения $\omega(\xi) - z = 0$, и точки $\xi = \infty$, в которых она имеет полюсы первого порядка. Таким образом, если $z \notin D$, т. е. вне единичного круга, то

$$\int\limits_L \frac{d\bar{t}}{t-z} = 2\pi i \left\{ \frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi_0}\right)}{\omega'(\xi_0)} \frac{1}{\xi_0^2} + \frac{\bar{a}_1}{a_0} \right\}. \tag{16}$$

Если же $z \in D$, т. е. ξ_0 внутри единичного круга, то

$$\int\limits_L \frac{d\bar{t}}{t-z} = 2\pi i \frac{\bar{a}_1}{a_0}. \tag{17}$$

В качестве примера определим напряженное состояние полуплоскости с эллиптическим включением, имеющим центр в точке $z_0 = -id$, полуоси a и b, а угол между направлением полуоси a и осью Ox равен θ. Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность включения, в этом случае имеет вид

$$z = \omega(\xi) = \alpha_1\xi + \beta_1\xi^{-1} - id, \tag{18}$$

где

$$\alpha_1 = \alpha e^{i\theta}, \; \beta_1 = \beta e^{i\theta}, \; \alpha = \frac{a+b}{2}, \; \beta = \frac{a-b}{2}.$$

Теперь согласно выражению (16)

$$\int\limits_L \frac{d\bar{t}}{t-z} = -2\pi i e^{-2i\theta} \left\{ \frac{\beta\xi_0^2 - \alpha}{\alpha\xi_0^2 - \beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right\}, \tag{19}$$

причем ξ_0 — корень уравнения $\alpha_1\xi + \beta_1\xi^{-1} - id - z = 0$, т. е.

$$\xi_0 = \frac{z+id}{2\alpha} e^{-i\theta} + \sqrt{\left(\frac{z+id}{2\alpha} e^{-i\theta}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}. \tag{20}$$

Подставляя выражения (19), (20) в (13), (14), после некоторых преобразований получаем следующие значения потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\Phi_0(z) = -\frac{2\lambda\mu}{1+\varkappa} e^{2i\theta} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta} \left\{ 1 - \frac{(z+z_0)e^{i\theta}}{\sqrt{(z+z_0)^2 e^{2i\theta} - 4\alpha\beta}} \right\},$$

$$\overline{\Phi}_*(z) = \begin{cases} \dfrac{2\lambda\mu}{1+\varkappa}, & z \in D, \\ 0, & z \notin D, \end{cases} \tag{21}$$

$$\Phi_0'(z) = -\frac{2\lambda\mu}{1+\varkappa} e^{3i\theta} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta} \left\{ \frac{4\alpha\beta}{[(z+z_0)^2 e^{2i\theta} - 4\alpha\beta]^{3/2}} \right\},$$

$$\Phi_*(z) = 0, \quad \Psi_0(z) = -\Phi_0(z) - z\Phi_0'(z),$$

$$\Psi_*(z)=\begin{cases}\dfrac{2\lambda\mu}{1+\varkappa}e^{-2i\theta}\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}\left\{1-\dfrac{(z-z_0)e^{-i\theta}}{\sqrt{(z-z_0)^2e^{-2i\theta}-4\alpha\beta}}\right\}, & z\in D,\\ \dfrac{2\lambda\mu}{1+\varkappa}e^{-2i\theta}\dfrac{2\beta}{\alpha}, & z\notin D.\end{cases}$$

Далее напряжения определяются по известным формулам Колосова — Мусхелишвили [2]

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=4\operatorname{Re}\Phi(z)=4\operatorname{Re}\{\Phi_0(z)+\Phi_*(z)\},\tag{22}$$
$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}-2i\sigma_{xy}=2\{\bar z\Phi'(z)+\Psi(z)\}=2\{\bar z[\Phi_0'(z)+\Phi_*'(z)]+$$
$$+\Psi_0(z)+\Psi_*(z)\}.$$

Исследуем характер напряженного состояния в наиболее интересных случаях: на границе полуплоскости, на оси симметрии ($x=0$) и на границе включения. На границе полуплоскости напряжения σ_{yy} и σ_{xy} равны нулю, а напряжение σ_{xx} легко получить из первой формулы (22) с учетом выражений (21):

$$\sigma_{xx}|_{y=0}=-\frac{2\lambda\mu}{1+\varkappa}\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}\,4\operatorname{Re}\left\{e^{2i\theta}\left[1-\frac{(x-id)e^{i\theta}}{\sqrt{(x-id)^2e^{2i\theta}-4\alpha\beta}}\right]\right\}.$$

На рис. 1 для значений геометрических параметров $a=1$, $b=0{,}5$ и $d=1{,}1$ приведены графики безразмерного напряжения $\bar\sigma_{xx}=\sigma_{xx}/\dfrac{2\lambda\mu}{1+\varkappa}$ на границе полуплоскости в зависимости от угла θ. Кривые *1*—*6* соответствуют величине $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{10},\ \dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}$. Из графиков следует, что с ростом угла θ координата максимального напряжения σ_{xx} вначале возрастает, а начиная с величины $\theta=\pi/4$, убывает до нуля. На рис. 2 приведены значения максимальных напряжений $\bar\sigma_{xx}$ (кривая *1*) и координат (кривая *2*), в которых они реализуются, в зависимости от угла θ.

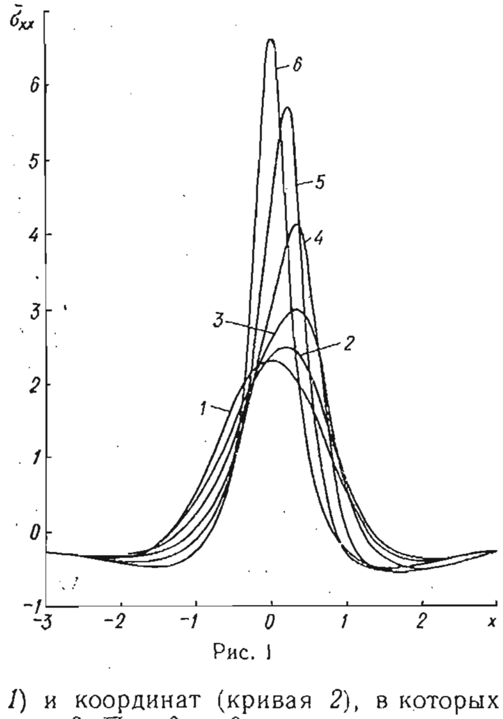

Рис. 1

Рис. 2

При $\theta=0$ напряжение σ_{xx} на границе полуплоскости достигает максимальной величины в силу симметрии задачи в точке $x=0$ и определяется формулой

$$\bar\sigma_{xx}^{\text{макс}}=\frac{16ab}{a^2-b^2}\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2+a^2-b^2}}\right).\tag{23}$$

Определим концентрацию напряжения σ_{xx} в точке $x=0$, понимая под этим отношение (23) к соответствующему значению напряжения σ_{xx} в неограниченной плоскости с эллиптическим включением. Используя результаты работы [4], получаем, что коэффициент концентрации равен 4. Интересно, что такая же концентрация напряжения σ_{xx} и для полуплоскости с круговым включением [8].

Выражения для напряжений на мнимой оси и на границе включения ввиду громоздкости здесь не приводятся. На рис. 3 для случая $\theta = 0$ и тех же значений геометрических параметров, что и выше, показан характер распределения напряжений $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\sigma}_{yy}$ на оси Oy (напряжение σ_{xy}, очевидно, равно нулю). Из расчетов следует, что максимальное значение напряжения σ_{xx} на перемычке между границей полуплоскости и включением наблюдается или на границе полуплоскости или на границе включения, а не в какой-либо

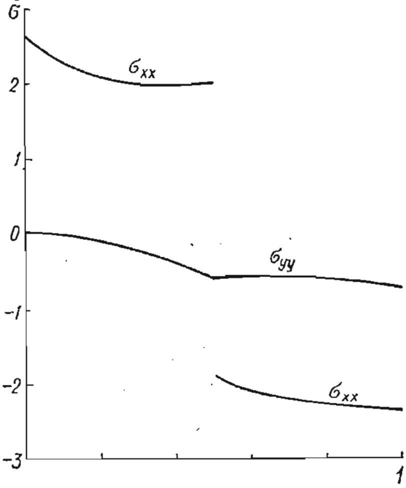

Рис. 3

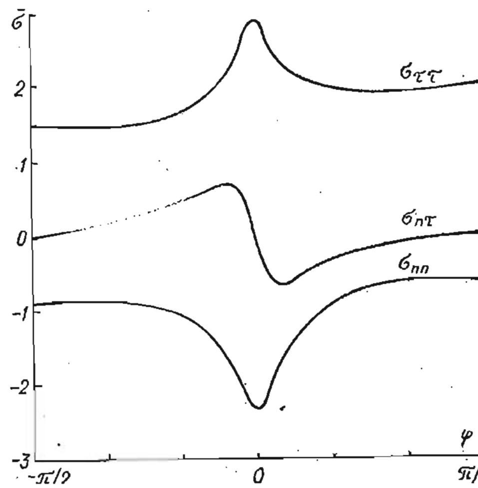

Рис. 4

промежуточной точке. На границе с включением напряжение $\bar{\sigma}_{xx}$ со стороны основного материала равно

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}\left\{4 - \frac{b}{a} - \frac{3(2d - b)}{\sqrt{4d^2 - 4bd + d^2}}\right\}. \tag{24}$$

Приравнивая выражения (23) и (24), находим условие, которому должны удовлетворять величины a, b и d, чтобы значения напряжения σ_{xx} в точках $x = 0$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = b - d$ совпадали:

$$\frac{b}{a} + \frac{3(2d - b)}{\sqrt{4d^2 - 4bd + a^2}} - \frac{4d}{\sqrt{d^2 + a^2 - b^2}} = 0. \tag{25}$$

Если для некоторых a и b величина $d < d^*$, где d^* — корень уравнения (25), то максимальное значение напряжения σ_{xx} достигается на границе полуплоскости, если же $d > d^*$, — то на границе включения.

Провести обстоятельный анализ напряженного состояния на границе контакта в зависимости от геометрических параметров затруднительно. В качестве примера на рис. 4 для значений $\theta = 0$, $a = d = 1$ и $b = 0{,}5$ приведены графики изменения напряжениий $\bar{\sigma}_n$, $\bar{\sigma}_{n\tau}$ и $\bar{\sigma}_{\tau\tau}$ на границе включения в зависимости от полярного угла φ, который отсчитывается от большей полуоси включения против часовой стрелки (n, τ — внешняя нормаль и касательная к границе включения). Характерным является наличие концентрации напряжений в окрестности большой полуоси, которая тем больше, чем больше отношение a/b. Влияние границы полуплоскости практически перестает сказываться на распределении напряжений в контакте, начиная с величины $d - 4a$.

1. *Игначак Ю., Новацкий В.* Два случая разрывного температурного поля в упругом пространстве и полупространстве.— Bull. Akad. pol. sci., 1958, 4, N 6, p. 81—92.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.—708 с.
3. *Шерман Д. Ш.* Об одной задаче теории упругости.— Докл. АН СССР, 1940, 27, № 9, с. 907—910.
4. *Goodier I. N.* On the integration of the thermo elastic eguations.— Phil. Mag., 1937, 7, N 23, p. 1017—1032.
5. *Hiecke M.* Über ein ebenes unstetiges Temperaturspannungsproblems.— Zeits. Angew. Math. Mech., 1954, 39, s. 25—32.
6. *Mindlin R. D., Cooper M. L.* Thermoelastic stress around a cylindrical inclusion of elliptic cross section.— J. Appl. Mech., 1960, 17, p. 265—275.
7. *Myklstad N. O.* Two problems of thermal stress in the infinite-Solid.— J. Appl. Mech., 1942, p. 136—151.
8. *Richardson M. K.* Interference stresses in a half plane containing an elastic disk of the same material.— Trans. ASME. Ser. E.— J. Appl. Mech., 1969, 36, N 1. Рус. пер.: Тр. Амер. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1969, 36, № 1, с. 122—126.
9. *Sen B.* Note on the stresses produced by nycki of thermoelastic strarin a semi-infinite elastic solid.— Quart Appl. Math., 1957, 8, p. 365—380.

г. Москва

Поступила в редколлегию 22.10.79

УДК 536.12:539.377

В. М. Вигак, А. М. Ригин

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНОМ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРЕ

Квазистатическая задача термоупругости для кусочно-однородного цилиндра рассматривалась в работах [3, 4] для различных частных случаев функции распределения температурных полей. Однако для определения оптимального управления тепловыми процессами в кусочно-однородных деталях и элементах конструкций методом решения обратной задачи теплопроводности по заданным термонапряжениям, как и в случае однородного тела [1], необходима функциональная зависимость термоупругих напряжений от температурного поля.

В настоящей работе приведены решения одномерной задачи теплопроводности и соответствующей ей задачи термоупругости для полого кусочно-однородного многослойного цилиндра. Полученные формулы позволяют определять термонапряженное состояние такого цилиндра при произвольном температурном поле, а также могут быть использованы для решения задач оптимального по быстродействию управления тепловыми процессами в многослойном цилиндре при ограничении на термоупругие напряжения.

Рассмотрим полый многослойный цилиндр с внутренним и наружным радиусами R_1 и R_2, изготовленный из произвольного числа n концентрических однородных слоев. Материал каждого слоя изотропный, а теплофизические и механические характеристики такого цилиндра представляются в виде [4]

$$p(r) = p_1 + \sum_{i=1}^{n-1} S_+(r - r_j)(p_{j+1} - p_i), \tag{1}$$

где r_j — внешний радиус j-го слоя;

$$S_+(r - r_j) = \begin{cases} 0, & r \leqslant r_j, \\ 1, & r > r_j. \end{cases}$$

Между слоями осуществляется идеальный тепловой и механический контакт.

При конвективном теплообмене между цилиндром и окружающей средой осесимметричное температурное поле $T(\rho, \tau)$ можно найти из решения