УДК 539.3

В. М. Флячок

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ТЕРМОУПРУГИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОЛОГИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим предварительно напряженную пологую оболочку двоякой кривизны толщиной $2h$, находящуюся под воздействием нестационарного температурного поля, обусловленного внешним нагревом или деформацией самой оболочки. Срединная поверхность оболочки отнесена к ортогональным гауссовым координатам α_1, α_2; k_1, k_2 — главные кривизны по этим направлениям. Начальное напряженное состояние оболочки, которое принимаем безмоментным, характеризуется стационарными нормальными усилиями в срединной поверхности N_1^0, N_2^0. Основные взаимосвязанные уравнения термоупругих движений предварительно напряженных трансверсально-изотропных пологих оболочек в этом случае запишем в виде [1—3]

$$(D\Delta_1\Delta_2 + \rho_1\partial_\tau^2) F + \Delta_k\varphi + \frac{1+\nu}{h} D\alpha_t\Delta_2 T_2 + (1-\varepsilon\Delta_1) R(N, F) -$$
$$-\frac{1+\nu}{h}\varepsilon\alpha_t R(N, T_2) = 0,$$
$$\frac{1}{2hE}\Delta\Delta\varphi - (1-\varepsilon\Delta_1)\Delta_k F + \frac{1+\nu}{h}\varepsilon\alpha_t\Delta_k T_2 + \alpha_t \Delta T_1 = 0,$$
$$\Delta\psi - \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)}(1+\varepsilon\rho_2 D^{-1}\partial_\tau^2)\psi = 0,$$
$$\Delta_3 T_1 + \frac{5k}{3h}T_2 - \frac{1+2\alpha_t\gamma_0}{a}\partial_\tau T_1 - \frac{(1-\nu)\gamma_0}{2haE}\partial_\tau\Delta\varphi = f_1,$$
$$\Delta_3 T_2 - \frac{5}{2h^2}T_2 - \frac{1}{a}\partial_\tau T_2 + \frac{h\gamma_0}{a}\partial_\tau \Delta F = f_2. \qquad (1)$$

Здесь

$$T_i = \frac{2i-1}{2h^i}\int_{-h}^{h} tz^{i-1}dz; \quad \gamma_0 = \frac{E\alpha_t T_0}{c_e(1-\nu)}; \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)}\frac{E}{G'}; \quad a^{-1} = \frac{c_e}{\lambda_3};$$
$$\rho_1 = 2h\rho; \quad \rho_2 = \frac{2}{3}\rho h^3; \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2; \quad \Delta_k = k_2\partial_1^2 + k_1\partial_2^2; \quad \partial_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_i^2};$$
$$\Delta_1 = \Delta - \frac{\rho_2}{D}\partial_\tau^2; \quad \Delta_2 = \Delta - \frac{\varepsilon\rho_1}{D}\partial_\tau^2; \quad \Delta_3 = \frac{\lambda}{\lambda_3}\Delta; \quad D = \frac{2h^3E}{3(1-\nu^2)};$$
$$R(N, F) = N_1^0\partial_1^2 F + N_2^0\partial_2^2 F; \quad \partial_\tau^2 = \partial^2/\partial\tau^2;$$

f_1, f_2 — функции, зависящие от способа подвода тепла к поверхностям $z=\pm h$; φ — функция напряжения; τ — время; t — приращение температуры; ρ — плотность материала; λ, λ_3 — коэффициенты теплопроводности; T_0 — абсолютная температура; c_e — теплоемкость при постоянном объеме; ν, α_t — коэффициенты Пуассона и линейного расширения; E, G' — модули упругости на растяжение и сдвиг. Прогиб w оболочки и углы поворота нормали γ_1, γ_2 выражаются через разрешающие функции согласно формулам

$$w = F - \varepsilon\left(\Delta_1 F + \frac{1+\nu}{h}\alpha_t T_2\right), \quad \gamma_i = -\partial_i F + (-1)^{3-i}\partial_{3-i}\psi. \qquad (2)$$

Отметим, что система уравнений (1) может быть применена к решению задач о динамической термоустойчивости трансверсально-изотропных оболочек.

Рассмотрим случай пренебрежения термоупругим рассеянием ($\gamma_0 = 0$). Тогда для решения системы уравнений (1) при граничных условиях шарнирного опирания оболочки по всему контуру, однородных начальных условиях и известном температурном поле применяем конечное синус-преобразование Фурье по переменным α_i и интегральное преобразование Лапласа по переменной τ. В результате для функции прогиба в безразмерных величинах находим

$$F = \frac{3(1+\nu)\alpha_t}{\delta^3} \sum_{n,m}^{\infty} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ l \neq i}}^{2} \frac{B^2}{(\omega_l^2 - \omega_i^2)\omega_i} \int_0^{\tau} \left\{ \left(\frac{\varkappa_{nm}^2}{\varepsilon_0} - \omega_i^2 + \frac{3(1-\nu^2)\tilde{\varkappa}_{nm}^4}{\delta^2 \varkappa_{nm}^4} \right) T_{2nm}(v) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3(1-\nu)\tilde{\varkappa}_{nm}^2}{\delta \varepsilon_0 \varkappa_{nm}^2} T_{1nm}(v) \right\} \sin B^2 \omega_i (\tau - v)\, dv \right] \sin \lambda_n \alpha_1 \sin \lambda_m \alpha_2.$$

Здесь $\varkappa_{nm}^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2$; $\lambda_n = \pi n/\alpha_1^0$; $\lambda_m = \pi m/\alpha_2^0$; B — безразмерный параметр инерции; α_1^0, α_2^0 — безразмерные длина и ширина оболочки в плане;

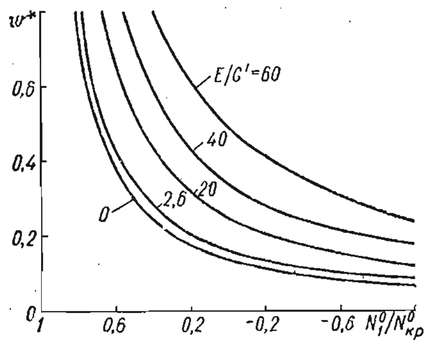

Рис. 1

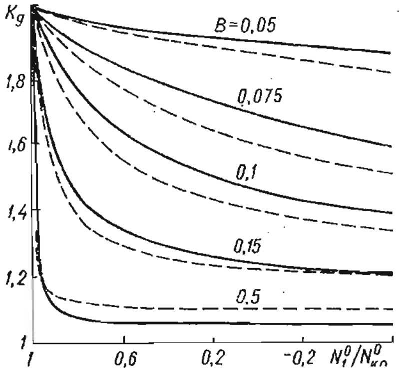

Рис. 2

ω_i — безразмерные собственные частоты; T_{inm} — изображения в преобразовании Фурье интегральных характеристик температуры T_i, которые находим из решения системы уравнений теплопроводности.

Исследуем влияние предварительного нагружения на динамическое поведение оболочки, к поверхности $z = h$ которой подводится тепловой поток плотности q, при теплоизолированной поверхности $z = -h$ и постоянной температуре на контуре. В начальный момент температура оболочки равна нулю.

На основании полученных аналитических решений проведены вычисления и построены соответствующие графики.

На рис. 1 показано изменение безразмерного максимального прогиба $w^* = w\lambda_3/20qRh\alpha_t$, вычисленного в центре цилиндрической оболочки в зависимости от отношений $N_1^0/N_{кр}^0$ (где $N_{кр}^0$ — критическое сжимающее усилие) при $\alpha_2^0 = 10h$; $\nu = 0{,}3$; $\alpha_1^0 = 2\alpha_2^0$ и различных значениях E/G'.

Кривые изменения коэффициента динамичности $K_g = w/w_{st}$ в зависимости от отношения $N_1^0/N_{кр}^0$ и различных значений параметра инерции $B = \frac{h}{R\sqrt{a}}\left(\frac{D}{2h\rho}\right)^{\frac{1}{4}}$ приведены на рис. 2. Вычисления проводились для цилиндрической панели радиусом R с параметрами $\alpha_1^0 = 3R$; $\alpha_2^0 = R$; $R/h = 16$ для изотропного материала $E/G' = 2{,}6$ (штриховые линии) и трансверсально-изотропного $E/G' = 40$ (сплошные).

С увеличением сжимающей силы для всех значений B коэффициент K_g увеличивается и при стремлении $N_1^0/N_{кр}^0$ к единице K_g стремится к двум. Значит, изменяя параметры B, E/G', а также соответствующим образом предварительное нагружение, можно существенно изменять влияние динамических эффектов на напряженно-деформированное состояние оболочек.

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек.— М. : Наука, 1974.— 446 с.
2. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Киев : Наук. думка, 1973.— 248 с.
3. *Флячок В. М., Швец Р. Н.* Некоторые динамические задачи термоупругости пологих ортотропных оболочек.— В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси : Мецниереба, 1975, с. 381—389.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 08.01.80

УДК 539.3

В. И. Елейко

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С БЛИЗКИМ К КРУГОВОМУ ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрим неограниченную пластинку со свободным от напряжений круговым отверстием, контур сечения Г которого описывается уравнением

$$\rho = R + \varepsilon H(\varphi), \tag{1}$$

где R — среднее значение радиуса отверстия; ε — малый параметр; $H(\varphi)$ — случайная функция с вероятностью 1 непрерывно-дифференцируемыми реализациями. Через поверхности $z = \pm h/2$ пластинки осуществляется теплообмен с внешней средой нулевой температуры. Между краем Г отверстия и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Пластинка нагревается также источниками тепла. При этом температура окружающей среды Θ' и интенсивность источников тепла W' являются функциями координат и времени. Температура пластинки в начальный момент времени равна нулю, а на бесконечности ограничена.

При описанных выше условиях теплообмена нестационарное температурное поле пластинки в безразмерной полярной системе координат описывается уравнением [3]

$$[\partial^2/\partial\rho^2 + (1/\rho)\,\partial/\partial\rho + (1/\rho^2)\,\partial^2/\partial\varphi^2 - c^2 - \partial/\partial\tau]\,T = W \tag{2}$$

при начальном и краевых условиях:

$$\begin{gathered} T = T_0 \quad \text{при } \tau = 0, \\ \partial T/\partial n - \gamma(T - \Theta) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ \lim_{\rho\to\infty} T(\rho, \varphi, \tau) < \infty. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь

$$\rho = \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{at}{R^2}; \quad c^2 = \frac{2\alpha_n R^2}{\lambda h}; \quad \gamma = \frac{\alpha R}{\lambda};$$

$$T = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} T'dz; \quad W = \int_{-h/2}^{h/2} W'dz; \quad \Theta = \int_{-h/2}^{h/2} \Theta'dz;$$

r, z — координаты; t — время; h — толщина пластинки; λ, a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности пластинки; α_n, α — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z = \pm h/2$ и края Г соответственно.

Решение краевой задачи теплопроводности (2) — (3) ищем в виде

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)}. \tag{4}$$

Для нахождения функций $T^{(l)}$ $(l = 0,1)$ получаем, согласно работам [5, 6], рекуррентную систему соответствующих краевых задач.

Пусть интенсивность источников тепла W и температура внешней сре-