1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек.— М. : Наука, 1974.— 446 с.
2. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Киев : Наук. думка, 1973.— 248 с.
3. *Флячок В. М., Швец Р. Н.* Некоторые динамические задачи термоупругости пологих ортотропных оболочек.— В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси : Мецниереба, 1975, с. 381—389.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 08.01.80

УДК 539.3

В. И. Елейко

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С БЛИЗКИМ К КРУГОВОМУ ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрим неограниченную пластинку со свободным от напряжений круговым отверстием, контур сечения Γ которого описывается уравнением

$$\rho = R + \varepsilon H(\varphi), \tag{1}$$

где R — среднее значение радиуса отверстия; ε — малый параметр; $H(\varphi)$ — случайная функция с вероятностью 1 непрерывно-дифференцируемыми реализациями. Через поверхности $z = \pm h/2$ пластинки осуществляется теплообмен с внешней средой нулевой температуры. Между краем Γ отверстия и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Пластинка нагревается также источниками тепла. При этом температура окружающей среды Θ' и интенсивность источников тепла W' являются функциями координат и времени. Температура пластинки в начальный момент времени равна нулю, а на бесконечности ограничена.

При описанных выше условиях теплообмена нестационарное температурное поле пластинки в безразмерной полярной системе координат описывается уравнением [3]

$$[\partial^2/\partial\rho^2 + (1/\rho)\,\partial/\partial\rho + (1/\rho^2)\,\partial^2/\partial\varphi^2 - c^2 - \partial/\partial\tau]\,T = W \tag{2}$$

при начальном и краевых условиях:

$$T = T_0 \quad \text{при } \tau = 0,$$
$$\partial T/\partial n - \gamma(T - \Theta) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{3}$$
$$\lim_{\rho\to\infty} T(\rho, \varphi, \tau) < \infty.$$

Здесь

$$\rho = \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{at}{R^2}; \quad c^2 = \frac{2\alpha_n R^2}{\lambda h}; \quad \gamma = \frac{\alpha R}{\lambda};$$

$$T = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} T'dz; \quad W = \int_{-h/2}^{h/2} W'dz; \quad \Theta = \int_{-h/2}^{h/2} \Theta'dz;$$

r, z — координаты; t — время; h — толщина пластинки; λ, a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности пластинки; α_n, α — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z = \pm h/2$ и края Γ соответственно.

Решение краевой задачи теплопроводности (2) — (3) ищем в виде

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)}. \tag{4}$$

Для нахождения функций $T^{(l)}$ $(l = 0,1)$ получаем, согласно работам [5, 6], рекуррентную систему соответствующих краевых задач.

Пусть интенсивность источников тепла W и температура внешней среды Θ представляются рядами

$$W = \sum_n W_n \exp\{in\varphi\}, \quad \Theta = \sum_n \Theta_n \exp\{in\varphi\}, \tag{5}$$

а случайная функция $H(\varphi)$ задана каноническим разложением [1, 4]

$$H(\varphi) = \sum_k \xi_k \exp\{ik\varphi\} \tag{6}$$

Здесь ξ_k — дельта-коррелированные случайные величины с нулевыми значениями математических ожиданий и ограниченными дисперсиями D_k.

Решения $T^{(0)}$, $T^{(1)}$ задач теплопроводности после соответствующих вычислений имеют вид

$$T^{(0)} = \sum_n T_n^{(0)} \exp\{in\varphi\}, \quad T^{(1)} = \sum_k \xi_k T_k^{(1)},$$

$$T_n^{(0)} = M_n(\rho, \tau - u) * \left\{-\gamma\Theta_n + \int_1^\infty x W_n(x, u - v) *\right.$$

$$\left. * [(\gamma - n) F(x, 1, v) + G(x, v)]\, dx\right\} - \int_1^\infty x W_n(x, \tau - u) F(x, \rho, u)\, dx,$$

$$T_k^{(1)} = \sum_n T_{nk}^{(1)} \exp\{i(n+k)\varphi\}, \quad T_{nk}^{(1)} = M_{n+k}(\rho, \tau - u) * \Phi_{nk}(u),$$

$$\Phi_{nk} = [(\partial^2/\partial\rho^2 + \gamma\partial/\partial\rho + nk)\, T_n^{(0)}]_{\rho=1},$$

$$f(u - v) * g(v) = \int_0^u f(u - v)\, g(v)\, dv, \tag{7}$$

$$M_n = \frac{2}{\pi} \exp\{-c^2\tau\} \int_0^\infty z Q_n(\rho, z) \exp\{-z^2\tau\}\, dz,$$

$$Q = [J_n(\rho, z)\, \Delta_{1n}(z) + Y_n(\rho, z)\, \Delta_{2n}(z)]/\Delta_n(z),$$

$$\Delta_{1n} = z Y_{n+1}(z) - (n + \gamma)\, Y_n(z); \quad \Delta_{2n} = z J_{n+1}(z) - (n + \gamma)\, J_n(z),$$

$$\Delta_n = \Delta_{1n}^2(z) + \Delta_{2n}^2(z),$$

$$F = (1/_2 v) \exp\{-[(x^2 + \rho^2)/4v + c^2 v^2]\}\, Y_n(x\rho/2v),$$

$$G = \frac{x^n \exp\{-c^2 v\}}{v^{n+1} 2^{2n} \Gamma(n+1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(n+m+1)}{m!\,\Gamma(n+m)} (-1/_4 v)^m\, {}_2F_1(-m, -n-m, n+1, x^2).$$

Здесь ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Потенциал перемещений Ψ и функция напряжений Эри F, через которые определяются компоненты тензора напряжений σ_{ij} рассматриваемой пластинки, находим из уравнений

$$\Delta\Psi = \beta T, \quad \Delta\Delta F = 0 \tag{8}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} &\sigma_{\rho\rho} \cos(n, \rho) + \sigma_{\rho\varphi} \cos(n, \varphi) = 0, \\ &\sigma_{\rho\varphi} \cos(n, \rho) + \sigma_{\varphi\varphi} \cos(n, \varphi) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij} \qquad (i, j = \rho, \varphi).$$

Здесь $\beta = \alpha_t (1 + \nu) R^2$; α_t — коэффициент теплового расширения; ν — коэффициент Пуассона; $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ определяются через функции Ψ и F соответственно [2].

Представляя решение краевой задачи (8) — (9) в виде

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \varepsilon\Psi^{(1)}, \quad F = F^{(0)} + \varepsilon F^{(1)}, \tag{10}$$

для определения функций $\Psi^{(l)}$, $F^{(l)}$ $(l = 0,1)$ получаем соответствующие краевые задачи [6].

Частное решение уравнения

$$\Delta\Psi^{(l)} = \beta T^{(l)} \qquad (l = 0,\ 1)$$

в предположении, что

$$\Theta = \sum_n \Theta_n \cos\omega_n\tau \exp\{in\varphi\}, \quad W = 0, \tag{11}$$

имеет вид

$$\Psi^{(0)} = \sum_n \Psi_n^{(0)} \exp\{in\varphi\}, \quad \Psi^{(1)} = \sum \xi_k \Psi_k^{(1)},$$

$$\Psi_n^{(0)} = \beta \int_0^\infty N_n(\rho,\ z)\, P_0(z,\ \tau)\, dz, \quad \Psi_k^{(1)} = \sum_n \Psi_{nk}^{(1)} \exp\{i(n+k)\varphi\},$$

$$\Psi_{nk}^{(1)} = \beta \int_0^\infty\int_0^\infty N_{n+k}(\rho,\ z)\, N_{nk}(z)\, P_1(z,\ z_1,\ \tau)\, dz dz_1,$$

$$\begin{gathered}
N_n = -2\gamma\Theta_n Q_n(\rho,\ z)\, z/\pi\,[(c^2+z^2)^2+\omega_n^2],\\
N_{n+k} = 2zQ_{n+k}(\rho,\ z)/\pi, \quad N_{nk} = 2\gamma\Theta_n z_1/\pi\,[(c^2+z_1^2)^2+\omega_n^2]\,[\partial^2 Q_n/\partial\rho^2 + \\
+ \gamma\partial Q_n/\partial\rho + knQ_n]_{\rho=1},\\
P_0 = (c^2+z^2)\{[a_1(c,\ \tau) + \omega_n a_2(c,\ \tau)/(c^2+z^2)]/(c^4+\omega_n^2) + a_3(z,\ \tau)\},\\
P_1 = \{[((c^2+z^2)(c^2+z_1^2) - \omega_n^2)\, a_1(\tau) + \omega_n (z^2+z_1^2+2c^2)\, a_3(\tau)] \times \\
\times (c^2+\omega_n^2) + [(c^2+z^2)(c^2+z_1^2) - \omega_n^2]\, a_3(\tau)\}/[(c^2+z^2)^2+\omega_n^2] + \\
+ (c^2+z_1^2)\,[a_3(z_1,\ \tau) - a_3(z,\ \tau)]/(z^2-z_1^2), \quad z^2 \neq z_1^2,\\
\partial Q_n/\partial\rho = \rho\,\{[nJ_n(\rho,\ z) - z\rho J_{n+1}(\rho,\ z)]\,\Delta_{1n}(z) - \\
- [nY_n(\rho,\ z) - z\rho Y_{n+1}(\rho,\ z)]\,\Delta_{2n}(z)\}/\Delta_n(z),\\
\partial^2 Q_n/\partial\rho^2 = \rho^2\{[(n^2 - z^2\rho^2)\, J_n(\rho,\ z) + z\rho J_{n+1}(\rho,\ z)]\,\Delta_{1n}(z) - \\
- [(n^2 - z^2\rho^2)\, Y_n(\rho,\ z) + z\rho Y_{n+1}(\rho,\ z)]\,\Delta_{2n}(z)\}/\Delta_n(z),\\
a_3(x,\ \tau) = [\exp\{-(c^2+x^2)\tau\} - \exp\{-c^2\tau\}]/x^2, \quad x = z,\ z_1,\\
a_1(\zeta,\ \tau) = \zeta^2\cos\omega_n\tau + \omega_n\sin\omega_n\tau - \zeta^2\exp\{-\zeta^2\tau\},\\
a_2(\zeta,\ \tau) = \zeta^2\sin\omega_n\tau + \omega_n\cos\omega_n\tau + \omega_n\exp\{-\zeta^2\tau\}, \quad \zeta^2 = z^2 + c^2.
\end{gathered} \tag{12}$$

Величины Q_i $(i = n, n+k)$ определяются формулами (7). Функция напряжений Эри $F^{(l)}$ $(l = 0,1)$ имеет вид

$$\begin{gathered}
F^{(0)} = \sum_n (c_{1n}^{(0)}\rho^n + c_{2n}^{(0)}\rho^{n+2})\, R^2 \exp\{in\varphi\},\\
F^{(1)} = \sum_k \xi_k F_k^{(1)},
\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$F_k^{(1)} = \sum_n (c_{1nk}^{(1)}\rho^{n+k} + c_{2nk}^{(1)}\rho^{n+k+2})\, R^2 \exp\{i(n+k)\varphi\};$$

$$\begin{gathered}
c_{1n}^{(0)} = [n\bar\sigma_{\rho\rho n}^{(0)}(1,\ \tau) - (n-2)\,\bar\sigma_{\rho\varphi n}^{(0)}(1,\ \tau)/i]/2n(n-1);\\
c_{2n}^{(0)} = -[\bar\sigma_{\rho\rho n}^{(0)}(1,\ \tau) - \bar\sigma_{\rho\varphi n}^{(0)}(1,\ \tau)/i]/2(n+1);\\
c_{1nk}^{(1)} = \{(n+k)\,[\bar\sigma_{\rho\rho nk}^{(1)}(1,\ \tau) - ik\sigma_{\rho\varphi n}^{(0)}(1,\ \tau) + \partial\bar{\bar\sigma}_{\rho\rho n}^{(0)}(1,\ \tau)/\partial\rho] - \\
- (n+k-2)\,[\bar\sigma_{\rho\varphi nk}^{(1)}(1,\ \tau)/i - k\sigma_{\varphi\varphi n}^{(0)}(1,\ \tau) +
\end{gathered}$$

$$+ \partial\bar{\bar{\sigma}}^{(0)}_{\rho\varphi n}(1, \tau)/i\partial\rho]\}/2(n+k)(n+k-1); \tag{14}$$

$$c^{(1)}_{2nk} = -\{\bar{\sigma}^{(1)}_{\rho\rho nk}(1, \tau) - ik\sigma^{(0)}_{\rho\varphi n}(1, \tau) + \partial\bar{\bar{\sigma}}^{(0)}_{\rho\rho n}(1, \tau)/\partial\rho -$$

$$- \bar{\sigma}^{(1)}_{\rho\varphi nk}(1, \tau)/i + k\sigma^{(0)}_{\varphi\varphi n}(1, \tau) - \partial\bar{\bar{\sigma}}^{(0)}_{\rho\varphi n}(1, \tau)/i\partial\rho\}/2(n+k+1).$$

Результирующие напряжения в рассматриваемой пластинке равны

$$\sigma_{ij} = \sigma^{(0)}_{ij} + \varepsilon\sigma^{(1)}_{ij}, \tag{15}$$

где

$$\sigma^{(1)}_{ij} = \sum_{k} \xi_k \sigma^{(1)}_{ijk} \quad (i, j = \rho, \varphi).$$

Здесь $\sigma^{(0)}_{ij}$ — температурные напряжения бесконечной пластинки с гладким круговым отверстием; $\sigma^{(1)}_{ij}$ — дополнительные напряжения пластинки с шероховатым, близким к круговому отверстием, обусловленные случайным температурным полем.

Выражения для корреляционных функций температуры и напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} K_T &= \varepsilon^2 \sum_k D_k T^{(1)}_k(\rho, \varphi, \tau)\overline{T^{(1)}_k(\rho', \varphi', \tau')}, \\ K_{\sigma_{ij}} &= \varepsilon^2 \sum_k D_k \sigma^{(1)}_{ijk}(\rho, \varphi, \tau)\overline{\sigma^{(1)}_{ijk}(\rho', \varphi', \tau')}. \end{aligned} \tag{16}$$

Полагая в выражениях (16) $\rho = \rho'$, $\varphi = \varphi'$, $\tau = \tau'$, получаем формулы для вычислений соответствующих дисперсий. В случае распределения случайной переменной по гауссовому закону на основании выражений (4), (15) можно определить вероятности изменения температуры и напряжений рассматриваемой пластинки в заданных интервалах, а также коэффициент концентрации напряжений в окрестности отверстия.

Если интенсивность источников тепла W и температура внешней среды Θ также являются стохастическими функциями, заданными каноническими разложениями (5), в которых W_n и Θ_n — дельта-коррелированные случайные величины с равными нулю математическими средними значениями и ограниченными дисперсиями, то полученные выше решения краевых задач теплопроводности и термоупругости дают возможность определять вероятностные характеристики температурного поля и тепловых напряжений, обусловленные статистическими микронеровностями кругового отверстия, а также флуктуациями интенсивности источников тепла и температуры окружающей среды.

1. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел.— М. : Наука, 1970.— 139 с.
2. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения.— М. : Физматгиз, 1963.— 243 с.
3. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 343 с.
4. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций.— М. : Физматгиз, 1960.— 883 с.
5. *Швец Р. Н., Елейко В. И.* Стохастическая задача теплопроводности и термоупругости для деформируемого тела с шероховатой поверхностью.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 11, с. 1021—1024.
6. *Швец Р. Н., Елейко В. И.* Стохастические температурные напряжения в цилиндре с шероховатой поверхностью.— Прикл. механика, 1977, **15**, № 12, с. 39—45.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
30.01.80