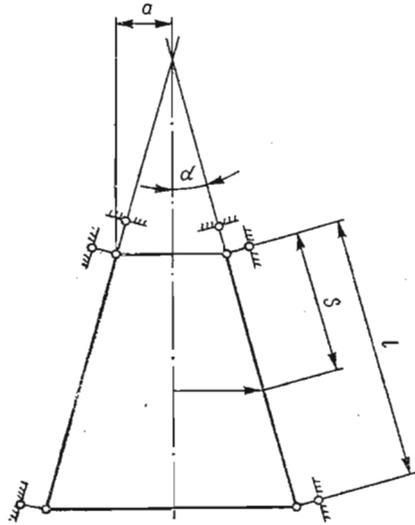


ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Исследование собственных колебаний оболочек вращения обычно проводят без учета сдвига [1, 2]. Цель настоящей работы — определить пределы применимости классического подхода, не учитывающего сдвиг. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях свободно опертой конической оболочки (рисунок) с учетом сдвиговой модели Тимошенко. Задача решается энергетическим методом.

Как известно [4], выражения для потенциальной и кинетической энергии с учетом сдвига и инерции вращения рассматриваемой оболочки записываются в виде

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{r} \times \right. \right. \\ & \times \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \alpha + w \cos \alpha \right) \left(2v \frac{\partial u}{\partial s} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \sin \alpha + \frac{w}{r} \cos \alpha \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \sin \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial \psi_s}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos \alpha}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial s} \sin \alpha + \right. \right. \\ & \left. \left. + \psi_s \sin \alpha + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos \alpha}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial s} \sin \alpha + \psi_s \sin \alpha + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + 2vr \frac{\partial \psi_s}{\partial s} - 2vr \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + \frac{2(1-\nu)}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \alpha}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial s} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial v}{\partial s} \cos \alpha - \frac{v}{2r} \sin 2\alpha + \frac{1}{2r} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} - \frac{\psi_\theta \sin \alpha}{2r} \right)^2 \right] + \\ & \left. + Ghk (\psi_s^2 + \psi_\theta^2) \right\} r ds d\theta, \end{aligned} \quad (1)$$



$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left[\frac{d}{dt} \left(\psi_s - \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{h^2}{12} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{r} \cos \alpha - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_\theta \right) \right]^2 \right\} r ds d\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь s, θ — канонические координаты срединной поверхности оболочки; u, v, w — компоненты вектора перемещений вдоль образующей, в кольцевом и поперечном направлениях; ψ_s, ψ_θ — компоненты вектора углов сдвига в продольном и кольцевом направлениях; k — коэффициент сдвига; E, ρ, ν — модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала; α — угол между образующей и осью оболочки; h — толщина оболочки; r — радиус круга, параллельного основанию оболочки.

Как это обычно делается в энергетическом методе, неизвестные функции следует заменить аппроксимирующими выражениями, удовлетворяющими условиям свободного опирания и интегральным статическим граничным условиям, т. е. $v = w = N_s = M_s = M_{s\theta} = 0$. Такие выражения можно взять в виде

$$u = \cos \omega t \sum_m \sum_n a_{mn} \cos \frac{m\pi s}{l} \sin n\theta, \quad v = \cos \omega t \sum_m \sum_n b_{mn} \sin \frac{m\pi s}{l} \cos n\theta,$$

$$w = \cos \omega t \sum_m \sum_n c_{mn} \sin \frac{m\pi s}{l} \sin n\theta, \quad \psi_s = \cos \omega t \sum_m \sum_n d_{mn} \cos \frac{m\pi s}{l} \sin n\theta,$$

$$\psi_\theta = \cos \omega t \sum_m \sum_n e_{mn} \sin \frac{m\pi s}{l} \cos n\theta, \quad (3)$$

где a_{mn}, b_{mn}, c_{mn} — амплитуды перемещений; d_{mn}, e_{mn} — амплитуды углов сдвига в продольном и кольцевом направлениях; l — длина образующей оболочки; m — количество полуволн в продольном направлении; n — количество полных волн в кольцевом направлении; ω — искомая собственная частота колебаний оболочки.

$m = 1$ $n = 2$		$m = 1$ $n = 6$		$m = 2$ $n = 8$	
С учетом сдвига	Без учета сдвига	С учетом сдвига	Без учета сдвига	С учетом сдвига	Без учета сдвига
650,42	650,42	176,22	176,23	330,49	330,09
7876,11	7876,13	21589,14	21590,00	28877,8	28878,0
13791,08	137991,88	36341,89	36342,37	48899,36	48903,12
1 611 000	—	1 611 160	—	1 611 274	—
1 611 100	—	1 611 542	—	1 611 975	—

После интегрирования выражений (1), (2) с учетом (3) составляем функцию Лагранжа

$$L = T - \Pi. \quad (4)$$

Используя уравнения Лагранжа второго рода, получаем уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{mn}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{mn}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \quad (5)$$

где q_{mn} при каждом фиксированном i представляет собой одну из величин

$$a_{mn} \cos \omega t, \quad b_{mn} \cos \omega t, \quad c_{mn} \cos \omega t, \quad d_{mn} \cos \omega t, \quad e_{mn} \cos \omega t.$$

Ввиду очевидной ортогональности координатных функций (3) бесконечная система уравнений (5) распадается на отдельные системы пяти уравнений относительно коэффициентов $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}, e_{mn}$. Нетривиальные решения этих систем возможны лишь на отдельных частотах, являющихся корнями уравнения

$$\det (F - \omega^2 P) = 0. \quad (6)$$

Здесь F и P — симметричные матрицы пятого порядка с элементами, которые являются функциями геометрических и механических характеристик оболочки

$$f_{ij} = f_{ij}(\alpha, a, h, l, E, \rho, \nu, m, n), \quad p_{ij} = p_{ij}(\alpha, a, h, l, E, \rho, \nu, m, n), \quad (7)$$

которые ввиду громоздкости не выписывались. Причем левый верхний минор размером 3×3 в (6) представляет собой характеристический определитель для той же задачи без учета сдвига [3].

Уравнение (6) и соответствующее уравнение без учета сдвига решались на ЭВМ при нескольких значениях параметров, и результаты обеих задач

сравнивались. В таблице приведены пять корней первой задачи и три корня второй для нескольких значений m и n при следующих параметрах: $a = 0,1$ м, $l = 0,6$ м, $h = 0,001$ м, $\alpha = 7^\circ 47'$, $E = 0,193 \cdot 10^{12} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, $\nu = 0,3$, $\rho = 0,78 \times 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $k=0,9$. При этом собственные частоты ω представлены в герцах.

Из приведенной таблицы видно, что низшие собственные частоты достаточно точно определяются без учета сдвига. Для определения степени точности упрощенной без учета сдвига модели проводились расчеты в широком диапазоне изменения параметров. Оказалось, что при указанных выше значениях параметров оболочки точность порядка 0,1% достигается вплоть до значений $n = 10$, $m = 15 \div 20$, 1% — до $n = 25$, $m = 30 \div 40$, 5% — до $n = 60$, $m = 80 \div 100$. С увеличением угла α расхождение результатов уменьшается. Так, при $\alpha = 45^\circ$ точность 1% наблюдается даже при $n = 70$, $m = 10$.

Учет влияния сдвига оказывается более существенным при больших значениях толщины оболочки. Например, при $h = 0,01$ и $\alpha = 7^\circ 43'$ погрешность порядка 1% имеет место уже при $n = 4$, $m = 5$.

1. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979. — 383 с.
2. Гонтикевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. — Киев: Наук. думка, 1964. — 287 с.
3. Григолюк Э. И. О малых колебаниях тонких упругих конических оболочек. — Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 6, с. 35—42.
4. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. — Киев: Наук. думка, 1973. — 243 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 18.02.80

УДК 539.3

В. А. Столяров

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОГО СЛОЯ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

Плоский слой на жестком основании является одной из распространенных моделей упругого основания [1, 2]. В монографии [1] перемещения и напряжения в точках такого слоя определяются приближающими функциями. Матрично-операторный метод в теории упругости [3, 4], примененный к задаче упругого равновесия бесконечного слоя [5], позволяет получить точные формулы для перемещений и напряжений в слое, спаянном с абсолютно жестким основанием, а в пределе, при устремлении толщины слоя к бесконечности, и для упругого полупространства.

Отнесем бесконечный плоский слой из однородного изотропного упругого материала к декартовой системе координат (x, y, z) . Координатную плоскость xOy совместим с лицевой поверхностью слоя, ось z направим в сторону внешней нормали. Предположим, что слой толщиной H по плоскости $z = -H$ спаян с абсолютно жестким основанием. Таким образом, $-H \leq z \leq 0$.

Рассмотрим задачу, когда на лицевой поверхности слоя ($z = 0$) задан вектор напряжений $\tau_{xz}^0, \tau_{yz}^0, \sigma_z^0$, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца

$$\gamma^2 F(x, y) + \lambda^2 F(x, y) = 0, \quad (1)$$