

сравнивались. В таблице приведены пять корней первой задачи и три корня второй для нескольких значений m и n при следующих параметрах: $a = 0,1$ м, $l = 0,6$ м, $h = 0,001$ м, $\alpha = 7^\circ 47'$, $E = 0,193 \cdot 10^{12} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, $\nu = 0,3$, $\rho = 0,78 \times 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $k=0,9$. При этом собственные частоты ω представлены в герцах.

Из приведенной таблицы видно, что низшие собственные частоты достаточно точно определяются без учета сдвига. Для определения степени точности упрощенной без учета сдвига модели проводились расчеты в широком диапазоне изменения параметров. Оказалось, что при указанных выше значениях параметров оболочки точность порядка 0,1% достигается вплоть до значений $n = 10$, $m = 15 \div 20$, 1% — до $n = 25$, $m = 30 \div 40$, 5% — до $n = 60$, $m = 80 \div 100$. С увеличением угла α расхождение результатов уменьшается. Так, при $\alpha = 45^\circ$ точность 1% наблюдается даже при $n = 70$, $m = 10$.

Учет влияния сдвига оказывается более существенным при больших значениях толщины оболочки. Например, при $h = 0,01$ и $\alpha = 7^\circ 43'$ погрешность порядка 1% имеет место уже при $n = 4$, $m = 5$.

1. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979. — 383 с.
2. Гонтикевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. — Киев: Наук. думка, 1964. — 287 с.
3. Григолюк Э. И. О малых колебаниях тонких упругих конических оболочек. — Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 6, с. 35—42.
4. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. — Киев: Наук. думка, 1973. — 243 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
18.02.80

УДК 539.3

В. А. Столяров

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОГО СЛОЯ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

Плоский слой на жестком основании является одной из распространенных моделей упругого основания [1, 2]. В монографии [1] перемещения и напряжения в точках такого слоя определяются приближающими функциями. Матрично-операторный метод в теории упругости [3, 4], примененный к задаче упругого равновесия бесконечного слоя [5], позволяет получить точные формулы для перемещений и напряжений в слое, спаянном с абсолютно жестким основанием, а в пределе, при устремлении толщины слоя к бесконечности, и для упругого полупространства.

Отнесем бесконечный плоский слой из однородного изотропного упругого материала к декартовой системе координат (x, y, z) . Координатную плоскость xOy совместим с лицевой поверхностью слоя, ось z направим в сторону внешней нормали. Предположим, что слой толщиной H по плоскости $z = -H$ спаян с абсолютно жестким основанием. Таким образом, $-H \leq z \leq 0$.

Рассмотрим задачу, когда на лицевой поверхности слоя ($z = 0$) задан вектор напряжений $\tau_{xz}^0, \tau_{yz}^0, \sigma_z^0$, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца

$$\gamma^2 F(x, y) + \lambda^2 F(x, y) = 0, \quad (1)$$

где

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2; \quad \alpha^m \beta^n = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}; \quad (2)$$

λ — независимый параметр; $m, n = 1, 2, \dots$

Отметим, в частности, что уравнению (1) удовлетворяют члены двухмерного тригонометрического ряда Фурье, которым может быть представлен широкий класс нагрузок.

Используем общее решение смешанной задачи теории упругости для бесконечного слоя, полученное в работе [5] матрично-операторным методом [3, 4]. Учитывая, что в данном случае в плоскости $z = -H$ смещения равны нулю и что вектор заданных напряжений на плоскости $z = 0$ удовлетворяет уравнению (1), после некоторых преобразований получим решение рассматриваемой задачи в смещениях:

$$\begin{aligned} u &= r\tau_{xz}^0 + \alpha(\rho\tau_*^0 + q\sigma_z^0), \quad v = r\tau_{yz}^0 + \beta(\rho\tau_*^0 + q\sigma_z^0), \\ \omega &= (r + \lambda^2 t)\sigma_z^0 + s\tau_*^0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\tau_*^0 = \alpha\tau_{xz}^0 + \beta\tau_{yz}^0; \quad (4)$$

$$r = \frac{\text{sh}(\varepsilon + z\lambda)}{G\lambda \text{ch} \varepsilon}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} p \\ t \end{aligned} \right\} &= \frac{\text{ch} \varepsilon}{2G\lambda^3 W} \left\langle \left\{ \pm \frac{2W}{\text{ch}^2 \varepsilon} + (3 - 4\nu)[\varepsilon \text{th} \varepsilon \mp 2(1 - \nu)] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\varepsilon + z\lambda)[(1 - 2\nu) \text{th} \varepsilon \pm \varepsilon] \right\} \text{sh}(\varepsilon + z\lambda) - \right. \\ &\quad \left. \left. - (\varepsilon + z\lambda)[2(1 - \nu) \mp \varepsilon \text{th} \varepsilon] \text{ch}(\varepsilon + z\lambda) \right\rangle; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} q \\ s \end{aligned} \right\} &= \frac{\text{ch} \varepsilon}{2G\lambda^2 W} \left\langle \{(3 - 4\nu)[\varepsilon \mp (1 - 2\nu) \text{th} \varepsilon] - (\varepsilon + z\lambda)[2(1 - \nu) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \varepsilon \text{th} \varepsilon]\} \text{sh}(\varepsilon + z\lambda) - (\varepsilon + z\lambda)[(1 - 2\nu) \text{th} \varepsilon \mp \varepsilon] \text{ch}(\varepsilon + z\lambda)\}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$W = (1 - 2\nu)^2 + \varepsilon^2 + (3 - 4\nu) \text{ch}^2 \varepsilon; \quad (8)$$

$\varepsilon = H\lambda$; u, v, ω — компоненты смещения; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона. Здесь и далее верхние знаки относятся к верхним функциям, нижние — к нижним.

Аналогично или непосредственно из решения (3) находим выражения для напряжений, действующих в любой точке слоя:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \bar{r}\tau_{xz}^0 + \alpha(\bar{\rho}\tau_*^0 + \bar{q}\sigma_z^0), \quad \tau_{yz} = \bar{r}\tau_{yz}^0 + \beta(\bar{\rho}\tau_*^0 + \bar{q}\sigma_z^0), \\ \sigma_z &= (\bar{r} + \lambda^2 \bar{t})\sigma_z^0 + \bar{s}\tau_*^0, \end{aligned} \quad (9)$$

в которых

$$\bar{r} = \frac{\text{ch}(\varepsilon + z\lambda)}{\text{ch} \varepsilon}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \bar{p} \\ \bar{t} \end{aligned} \right\} &= \frac{\text{ch} \varepsilon}{\lambda^2 W} \left\langle \{(1 - 2\nu)[\varepsilon \pm (1 - 2\nu) \text{th} \varepsilon] - (\varepsilon + z\lambda)[2(1 - \nu) \mp \right. \\ &\quad \left. \mp \varepsilon \text{th} \varepsilon]\} \text{sh}(\varepsilon + z\lambda) + \left\{ \pm \frac{W}{\text{ch}^2 \varepsilon} + 2(1 - \nu)[\varepsilon \text{th} \varepsilon \mp 2(1 - \nu)] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\varepsilon + z\lambda)[(1 - 2\nu) \text{th} \varepsilon \pm \varepsilon] \right\} \text{ch}(\varepsilon + z\lambda) \right\rangle; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{q} \\ \bar{s}_i \end{array} \right\} = \frac{\text{ch } \varepsilon}{\lambda W} \{ (1 - 2\nu) [\varepsilon \text{ th } \varepsilon \pm 2(1 - \nu)] - (\varepsilon + z\lambda) [(1 - 2\nu) \text{ th } \varepsilon \mp \varepsilon] \} \times \\ \times \text{sh}(\varepsilon + z\lambda) + \{ 2(1 - \nu) [\varepsilon \mp (1 - 2\nu) \text{ th } \varepsilon] - (\varepsilon + z\lambda) [2(1 - \nu) \pm \\ \pm \varepsilon \text{ th } \varepsilon] \} \text{ch}(\varepsilon + z\lambda). \quad (12)$$

Остальные компоненты напряжений вычисляются через основные иско-
мые функции (3), (9) по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{1-\nu} \left(\alpha u + \nu \beta v + \frac{\nu}{2G} \sigma_z \right), \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-\nu} \left(\nu \alpha u + \beta v + \frac{\nu}{2G} \sigma_z \right), \\ \tau_{xy} &= G(\alpha v + \beta u). \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда, в частности, следует, что в плоскости спая имеют место зависи-
мости

$$\sigma_x(-H) = \sigma_y(-H) = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z(-H), \quad \tau_{xy}(-H) = 0. \quad (14)$$

Решение этой задачи для упругого полупространства получаем путем
предельного перехода при $H \rightarrow \infty$. В пределе функции (5) — (7) принимают
вид

$$r = \frac{1}{G\lambda} e^{z\lambda}, \quad (15)$$

$$\left. \begin{array}{l} p \\ t \end{array} \right\} = -\frac{z\lambda \mp 2\nu}{2G\lambda^3} e^{z\lambda}, \quad (16)$$

$$\left. \begin{array}{l} q \\ s \end{array} \right\} = -\frac{z\lambda \pm (1-2\nu)}{2G\lambda^2} e^{z\lambda}. \quad (17)$$

Подставляя эти функции в (3), получаем

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2G\lambda^3} [2\lambda^2 \tau_{xz}^0 + (2\nu - z\lambda) \alpha T^0 - \lambda \alpha \sigma_z^0] e^{z\lambda}, \\ v &= \frac{1}{2G\lambda^3} [2\lambda^2 \tau_{yz}^0 + (2\nu - z\lambda) \beta T^0 - \lambda \beta \sigma_z^0] e^{z\lambda}, \\ w &= \frac{1}{2G\lambda^2} [2\lambda \sigma_z^0 - (2\nu + z\lambda) T^0 + \tau_*^0] e^{z\lambda}. \end{aligned} \quad (18)$$

Формулы для напряжений после предельного перехода принимают
вид

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= (\tau_{xz}^0 - z\lambda^{-1} \alpha T^0) e^{z\lambda}, \quad \tau_{yz} = (\tau_{yz}^0 - z\lambda^{-1} \beta T^0) e^{z\lambda}, \\ \sigma_z &= (\sigma_z^0 - zT^0) e^{z\lambda}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda^{-3} \{ 2\lambda^2 \alpha \tau_{xz}^0 + [2\nu\lambda^2 + (2\nu - z\lambda) \alpha^2] T^0 - \alpha^2 \lambda \sigma_z^0 \} e^{z\lambda}, \\ \sigma_y &= \lambda^{-3} \{ 2\lambda^2 \beta \tau_{yz}^0 + [2\nu\lambda^2 + (2\nu - z\lambda) \beta^2] T^0 - \beta^2 \lambda \sigma_z^0 \} e^{z\lambda}, \\ \tau_{xy} &= \lambda^{-3} [\lambda^2 (\beta \tau_{xz}^0 + \alpha \tau_{yz}^0) + (2\nu - z\lambda) \alpha \beta T^0 - \lambda \alpha \beta \sigma_z^0] e^{z\lambda}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$T^0 = \alpha \tau_{xz}^0 + \beta \tau_{yz}^0 + \lambda \sigma_z^0. \quad (21)$$

Напряжения (19) не зависят от упругих постоянных материала полу-
пространства.

С помощью (18) получаем объемное расширение

$$\theta = \frac{1-2\nu}{G\lambda} T^0 e^{z\lambda}. \quad (22)$$

Напомним, что везде $z \leq 0$.

В случае, когда в точках лицевой поверхности слоя ($z = 0$) заданы перемещения u_0, v_0, w_0 , удовлетворяющие уравнению (1), поступаем аналогично. Пользуясь общим решением, полученным в работе [5], находим

$$u = \tilde{r}u_0 + \alpha(\tilde{p}u_*^0 + \tilde{q}w_0), \quad v = \tilde{r}v_0 + \beta(\tilde{p}u_*^0 + \tilde{q}w_0),$$

$$w = (\tilde{r} + \lambda^2 \tilde{t})w_0 + \tilde{s}u_*^0. \quad (23)$$

Здесь

$$u_*^0 = \alpha u_0 + \beta v_0; \quad (24)$$

$$\tilde{r} = \frac{\text{sh}(\varepsilon + z\lambda)}{\text{sh} \varepsilon}; \quad (25)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{p} \\ \tilde{t} \end{array} \right\} = \frac{\text{ch} \varepsilon}{\lambda^2 V} \left\langle \left\{ \pm \frac{2V}{\text{sh} 2\varepsilon} - (3 - 4\nu)[\varepsilon \mp (3 - 4\nu) \text{th} \varepsilon] \pm (\varepsilon + z\lambda) \varepsilon \text{th} \varepsilon \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \text{sh}(\varepsilon + z\lambda) + (\varepsilon + z\lambda)[(3 - 4\nu) \text{th} \varepsilon \mp \varepsilon] \text{ch}(\varepsilon + z\lambda) \right\rangle; \quad (26)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{q} \\ \tilde{s} \end{array} \right\} = \frac{\text{ch} \varepsilon}{\lambda V} \langle \{(\varepsilon + z\lambda)[(3 - 4\nu) \text{th} \varepsilon \pm \varepsilon] - (3 - 4\nu) \varepsilon \text{th} \varepsilon\} \text{sh}(\varepsilon + z\lambda) \mp$$

$$\mp (\varepsilon + z\lambda) \varepsilon \text{th} \varepsilon \text{ch}(\varepsilon + z\lambda) \rangle; \quad (27)$$

$$V = \varepsilon^2 - (3 - 4\nu) \text{sh}^2 \varepsilon. \quad (28)$$

Напряжения в слое определяются формулами

$$\tau_{xz} = \hat{r}u_0 + \alpha(\hat{p}u_*^0 + \hat{q}w_0), \quad \tau_{yz} = \hat{r}v_0 + \beta(\hat{p}u_*^0 + \hat{q}w_0), \quad (29)$$

$$\sigma_z = (\hat{r} + \lambda^2 \hat{t})w_0 + \hat{s}u_*^0,$$

в которых

$$\hat{r} = G\lambda \frac{\text{ch}(\varepsilon + z\lambda)}{\text{sh} \varepsilon}; \quad (30)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{p} \\ \hat{t} \end{array} \right\} = \frac{2G \text{ch} \varepsilon}{\lambda V} \left\langle \left\{ \pm \frac{V}{\text{sh} 2\varepsilon} - 2(1 - \nu)[\varepsilon \mp (3 - 4\nu) \text{th} \varepsilon] \pm (\varepsilon + z\lambda) \varepsilon \text{th} \varepsilon \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \text{ch}(\varepsilon + z\lambda) + \{(\varepsilon + z\lambda)[(3 - 4\nu) \text{th} \varepsilon \mp \varepsilon] - (1 - 2\nu) \varepsilon \text{th} \varepsilon\} \text{sh}(\varepsilon + z\lambda) \right\rangle; \quad (31)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{q} \\ \hat{s} \end{array} \right\} = \frac{2G \text{ch} \varepsilon}{V} \langle \{(\varepsilon + z\lambda)[(3 - 4\nu) \text{th} \varepsilon \pm \varepsilon] - 2(1 - \nu) \varepsilon \text{th} \varepsilon\} \text{ch}(\varepsilon + z\lambda) -$$

$$- \{(1 - 2\nu)[\varepsilon \pm (3 - 4\nu) \text{th} \varepsilon] \pm (\varepsilon + z\lambda) \varepsilon \text{th} \varepsilon\} \text{sh}(\varepsilon + z\lambda) \rangle. \quad (32)$$

Остальные компоненты напряжений могут быть вычислены по формулам (13). Оказывается, что и в этой задаче справедливы зависимости (14).

Решение для упругого полупространства получаем предельным переходом в формулах (23) — (27) при $H \rightarrow \infty$. В результате получаем

$$u = \left(u_0 - \frac{2\alpha}{(3 - 4\nu)\lambda} U_0 \right) e^{z\lambda}, \quad v = \left(v_0 - \frac{2\beta}{(3 - 4\nu)\lambda} U_0 \right) e^{z\lambda},$$

$$w = \left(w_0 - \frac{2}{3 - 4\nu} U_0 \right) e^{z\lambda}, \quad (33)$$

где

$$U_0 = \alpha u_0 + \beta v_0 + \lambda w_0. \quad (34)$$

В этом случае объемное расширение

$$\theta = \frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu} U_0 e^{z\lambda}. \quad (35)$$

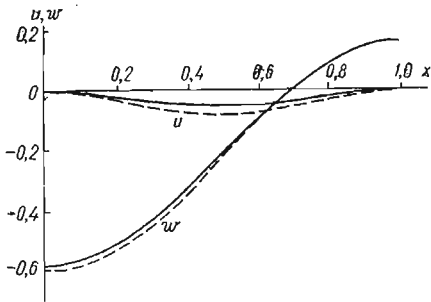


Рис. 1

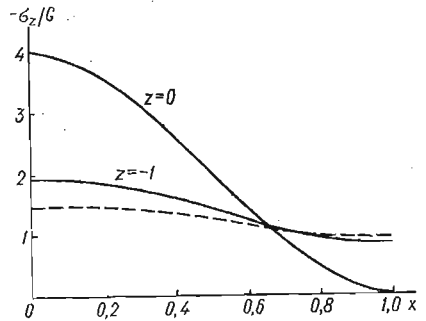


Рис. 2

Тем же предельным переходом в (29) — (32) или непосредственно по перемещениям (33) находим напряжения в полупространстве:

$$\tau_{xz} = G \left[\lambda u_0 + \alpha w_0 - \frac{2z\lambda + 1}{(3-4\nu)\lambda} \alpha U_0 \right] e^{z\lambda},$$

$$\tau_{yz} = G \left[\lambda v_0 + \beta w_0 - \frac{2z\lambda + 1}{(3-4\nu)\lambda} \beta U_0 \right] e^{z\lambda},$$

$$\sigma_z = 2G \left[\lambda w_0 - \frac{1-2\nu+z\lambda}{3-4\nu} U_0 \right] e^{z\lambda}; \quad (36)$$

$$\sigma_x = 2G \left[\alpha u_0 + \frac{2\nu\lambda - z\alpha^2}{(3-4\nu)\lambda} U_0 \right] e^{z\lambda},$$

$$\sigma_y = 2G \left[\beta v_0 + \frac{2\nu\lambda - z\beta^2}{(3-4\nu)\lambda} U_0 \right] e^{z\lambda},$$

$$\tau_{xy} = G \left[\beta u_0 + \alpha v_0 - \frac{2z\alpha\beta}{(3-4\nu)\lambda} U_0 \right] e^{z\lambda}. \quad (37)$$

В качестве примера рассмотрим задачу, в которой $\tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = 0$, а σ_z^0 определяется периодической нагрузкой [7]

$$\sigma_z = G(1 + \cos \pi x)(1 + \cos \pi y), \quad (38)$$

имеющей достаточно выраженный неравномерный характер. Результаты вычислений показаны на рис. 1—3. На всех рисунках сплошными линиями построены графики для слоя, а штриховыми — для полупространства.

На рис. 1 показаны смещения u, w точек лицевой поверхности $z = 0$ слоя и полупространства в сечении $y = 0$. При этом перемещения плоскости $z = 0$ как жесткого тела исключены [6]. Тангенциальные смещения u направлены в сторону пика нагрузки.

На рис. 2 дан график нагрузки (38) на лицевой поверхности и графики нормальных напряжений в плоскости спая при $H = 1$ и в той же плоскости ($z = -1$) — для полупространства при $y = 0$. Видно, что наличие жесткого основания значительно увеличивает максимальное нормальное напряжение в основании слоя.

Графики рис. 3 показывают зависимость от толщины слоя наибольших касательных и наибольших нормальных напряжений в плоскости спая; а также зависимость от координаты z тех же напряжений в полупространстве при одинаковой нагрузке (38). Зависимость для касательных напряжений имеет ярко выраженный максимум. В случае полупространства этот максимум находится на глубине $z = -0,272$. На глубине, равной длине периода

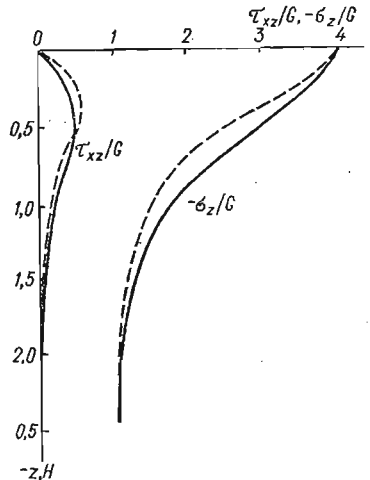


Рис. 3

функции (38), напряжения практически выравниваются в полном соответствии с принципом Сен-Венана.

В заключение обратим внимание на интересный факт.

При $z = 0$ соотношения (3) и (29) становятся взаимно обратными. Если взятые из (3) значения u_0, v_0, ω_0 подставить в (29), то получим тождество. И наоборот, подстановка в (3) взятых из (29) значений $\tau_{xz}^0, \tau_{yz}^0, \sigma_z^0$ обращает соотношение (3) также в тождество. Эти свойства являются фундаментальными для исследованных выше задач, так как сохраняются и при предельном переходе $H \rightarrow \infty$. Поэтому соотношения (18) и (36) также взаимно обратные. Таким образом, задание смещений на некоторой поверхности, например $z = -H$, исключает произвол в выборе начальных функций $u_0, v_0, \omega_0, \tau_{xz}^0, \tau_{yz}^0, \sigma_z^0$, действующих на лицевой поверхности слоя $z = 0$.

1. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании.— М.: Физматгиз, 1960.— 492 с.
2. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А. Расчет конструкций на упругом основании.— М.: Стройиздат, 1973.— 628 с.
3. Підстригач Я. С., Столяров В. О. Матрично-операторний метод в теорії пружності.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 11, с. 1021—1024.
4. Подстригач Я. С., Столяров В. А. Матрично-операторный метод решения краевых задач для систем уравнений теории упругости.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 3—18.
5. Столяров В. А. Матрично-операторный метод в задаче теории упругости для бесконечного слоя.— Прикл. механика, 1976, 12, № 5, с. 37—43.
6. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— Л.: Наука, 1968.— 404 с.
7. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости.— М.: Физматгиз, 1959.— 364 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
14.05.80

УДК 539.3

В. А. Лазько

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Плоская задача теории упругости для изотропных сред рассмотрена в работе [3]. Для анизотропных тел подобные вопросы исследованы в работе [2]. В настоящей работе эти результаты обобщаются на случай учета поперечных деформаций для трансверсально-изотропного тела.

Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщиной $2h$, плоскости изотропии которой параллельны срединной плоскости. Пластинку отнесем к декартовым координатам x, y, z . Система уравнений статики упругого трансверсально-изотропного тела при отсутствии массовых сил имеет вид

а) уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} = 0 \quad (i = x, y, z), \quad (1)$$

б) соотношения закона Гука (разрешенные относительно компонент напряжений)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \lambda \sigma_z \quad (x \neq y), \\ \sigma_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \sigma_{zz} &= E_0 \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right], \\ \sigma_{xz} &= G' \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (x \neq y). \end{aligned} \quad (2)$$