функции (38), напряжения практически выравниваются в полном соответствии с принципом Сен-Венана.

В заключение обратим внимание на интересный факт.

При $z = 0$ соотношения (3) и (29) становятся взаимно обратными. Если взятые из (3) значения u_0, v_0, w_0 подставить в (29), то получим тождество. И наоборот, подстановка в (3) взятых из (29) значений $\overset{0}{\tau}_{xz}$, $\overset{0}{\tau}_{yz}$, $\overset{0}{\sigma}_z$ обращает соотношение (3) также в тождество. Эти свойства являются фундаментальными для исследованных выше задач, так как сохраняются и при предельном переходе $H \to \infty$. Поэтому соотношения (18) и (36) также взаимно обратные. Таким образом, задание смещений на некоторой поверхности, например $z = -H$, исключает произвол в выборе начальных функций u_0, v_0, w_0, $\overset{0}{\tau}_{xz}$, $\overset{0}{\tau}_{yz}$, $\overset{0}{\sigma}_z$, действующих на лицевой поверхности слоя $z = 0$.

1. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании.— М. : Физматгиз, 1960.— 492 с.
2. *Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А.* Расчет конструкций на упругом основании.— М. : Стройиздат, 1973.— 628 с.
3. *Підстригач Я. С., Столяров В. О.* Матрично-операторний метод в теорії пружності.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 11, с. 1021—1024.
4. *Подстригач Я. С., Столяров В. А.* Матрично-операторный метод решения краевых задач для систем уравнений теории упругости.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 3—18.
5. *Столяров В. А.* Матрично-операторный метод в задаче теории упругости для бесконечного слоя.— Прикл. механика, 1976, 12, № 5, с. 37—43.
6. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— Л. : Наука, 1968.— 404 с.
7. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости.— М. : Физматгиз, 1959.— 364 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.05.80

УДК 539.3

В. А. Лазько

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Плоская задача теории упругости для изотропных сред рассмотрена в работе [3]. Для анизотропных тел подобные вопросы исследованы в работе [2]. В настоящей работе эти результаты обобщаются на случай учета поперечных деформаций для трансверсально-изотропного тела.

Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщиной $2h$, плоскости изотропии которой параллельны срединной плоскости. Пластинку отнесем к декартовым координатам x, y, z. Система уравнений статики упругого трансверсально-изотропного тела при отсутствии массовых сил имеет вид

а) уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} = 0 \quad (i = x, y, z), \tag{1}$$

б) соотношения закона Гука (разрешенные относительно компонент напряжений)

$$\begin{gathered}
\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \lambda\sigma_z \quad (x \rightleftarrows y), \\
\sigma_{xy} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \\
\sigma_{zz} = E_0'\left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right], \\
\sigma_{xz} = G'\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \quad (x \rightleftarrows y).
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; u_i — компоненты вектора перемещений; E, G, ν — модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскостях изотропии; E', G', ν' — упругие постоянные в плоскостях, перпендикулярных к срединной плоскости;

$$\lambda = \frac{\nu' E/E'}{1-\nu}; \quad E_0' = \frac{(1-\nu)E'}{1-\nu-2(\nu')^2 E/E'}.$$

Для сведения трехмерных уравнений (1), (2) к двухмерным используем представление компонент напряженно-деформированного состояния в виде рядов по полиномам Лежандра. Для случая симметричного относительно срединной плоскости напряженно-деформированного состояния выберем для напряжений следующие представления:

$$\sigma_{xz} = \frac{3Q_{x1}}{2h}P_1 + \frac{7Q_{x3}}{2h}P_3 \quad (x \rightleftarrows y),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{R_0}{2h}P_0 + \frac{5R_2}{2h}P_2. \tag{3}$$

Здесь Q_{x1}, ..., R_2 — усредненные усилия; $P_k = P_k(z/h)$ $(k = \overline{0,3})$ — полиномы Лежандра.

Потребуем выполнения граничных условий для напряжений (3) на внешних гранях пластины:

$$\sigma_{xz}\big|_{z=\pm h} = \sigma_{xz}^{\pm} \quad (x \rightleftarrows y), \quad \sigma_{zz}\big|_{z=\pm h} = \sigma_{zz}^{\pm}. \tag{4}$$

Учитывая свойство полиномов Лежандра

$$P_{2l}\big|_{z=\pm h} = 1, \quad P_{2l+1}\big|_{z=\pm h} = \pm 1 \quad (l = 0, 1, \ldots), \tag{5}$$

из выражений (3), (4) получаем зависимости

$$\pm 3Q_{x1} \pm 7Q_{x3} = 2h\sigma_{xz}^{\pm} \quad (x \rightleftarrows y), \quad R_0 + 5R_2 = 2h\sigma_{zz}^{\pm}. \tag{6}$$

Определяя с помощью формул (6) величины Q_{x3}, Q_{y3}, R_2 через другие усредненные усилия и подставляя их в (3), получаем

$$\sigma_{xz} = \frac{3Q_{x1}}{2h}(P_1 - P_3) + \tau_{x2}P_3 \quad (x \rightleftarrows y), \tag{7}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{R_0}{2h}(P_0 - P_2) + \sigma_1 P_2,$$

где

$$\tau_{x2} = \frac{1}{2}(\sigma_{xz}^{+} - \sigma_{xz}^{-}) \quad (x \rightleftarrows y); \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{zz}^{+} + \sigma_{zz}^{-}).$$

Для остальных компонент напряжений примем

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{2h}P_0 \quad (x \rightleftarrows y), \quad \sigma_{xy} = \frac{S_{xy}}{2h}P_0. \tag{8}$$

Уравнения равновесия для рассматриваемого случая, полученные путем усреднения трехмерных уравнений равновесия (1) с использованием при этом формулы интегрирования по частям, запишутся так:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + 2\tau_{x2} = 0 \quad (x \rightleftarrows y), \tag{9}$$

$$\frac{\partial Q_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y1}}{\partial y} - \frac{R_0}{h} + 2\sigma_1 = 0.$$

В соответствии с выбранным законом распределения напряжений (7), (8) и количеством уравнений равновесия (9) выражения для перемещений возьмем в виде

$$u_x = u_{x0}P_0 \quad (x \rightleftarrows y), \quad u_z = u_{z1}P_1. \tag{10}$$

Здесь u_{x0}, u_{y0}, u_{z1} — усредненные по толщине перемещения.

Зависимости между усредненными усилиями и перемещениями получим из соотношений закона Гука (2) подстановкой в них выражений (7), (8) и (10), умножением первых трех выражений (2) на P_1, четвертого на $P_0 - P_2$, пятого и шестого на $P_1 - P_3$ и интегрированием в пределах от $-h$ до $+h$. При этом используем свойство ортогональности полиномов Лежандра.

Зависимости между усредненными усилиями и перемещениями запишутся так:

$$\begin{gathered}
N_x = B\left(\frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_{y0}}{\partial y}\right) + \lambda R_0 \quad (x \rightleftarrows y), \\
S_{xy} = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_{x0}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial x}\right), \\
R_0 = \Omega_0' \left[\frac{u_{z1}}{h} + \lambda\left(\frac{\partial u_{z0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial y}\right)\right] + \frac{h}{3}\sigma_1, \\
Q_{x1} = \Lambda_0' \frac{\partial u_{z1}}{\partial x} + \frac{h}{5}\tau_{x2} \quad (x \rightleftarrows y).
\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь обозначено:

$$B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}; \quad \Omega_0' = \frac{5E_0'h}{3}; \quad \Lambda_0' = \frac{7hG'}{15}.$$

Подстановкой выражений (11) в (9) получаем систему уравнений равновесия в виде (случай отсутствия поверхностных нагрузок)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial y}\right) + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_{x0}}{\partial y} - \frac{\partial u_{y0}}{\partial x}\right) + \frac{\lambda}{B}\frac{\partial R_0}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial y}\right) - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_{x0}}{\partial y} - \frac{\partial u_{y0}}{\partial x}\right) + \frac{\lambda}{B}\frac{\partial R_0}{\partial y} = 0, \\
\Lambda_0'\Delta u_{z1} - \frac{R_0}{h} = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Представим компоненты смещений u_{x0} и u_{y0} в виде

$$u_{x0} = \frac{\partial U^*}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad u_{y0} = \frac{\partial U^*}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{13}$$

Соотношения (12) с использованием (13) можно записать следующим образом

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta U^* + \frac{\lambda}{B}R_0\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1-\nu}{2}\Delta V\right) = 0; \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta U^* + \frac{\lambda}{B}R_0\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-\nu}{2}\Delta V\right) = 0, \\
\Lambda_0'\Delta u_{z1} - \frac{R_0}{h} = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Первые два соотношения (14) являются условиями Коши — Римана для двух сопряженных гармонических функций:

$$p = \Delta U, \quad q = \frac{1-\nu}{2}\Delta V, \tag{15}$$

где

$$U = U^* + \frac{\lambda h \Lambda_0'}{B} u_{z1}. \tag{16}$$

Введем замену

$$p = 4\frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad q = -4\frac{\partial p^*}{\partial y} \tag{17}$$

(p^* — произвольная гармоническая функция). Из соотношений (15) следует, что функции U и V бигармонические, которые с использованием (17) можно представить в виде

$$U = xp^* + yq^* + p_1, \quad V = \frac{2}{1-\nu}(xq^* - yp^* + q_1), \tag{18}$$

где q^* — гармоническая функция, сопряженная с функцией p^*; p_1 и q_1 — произвольные сопряженные гармонические функции.

Подставляя значение ΔU^*, найденное из соотношений (15) и (16) в третье уравнение системы (14), получим

$$\Lambda_0'\omega\Delta u_{z1} - \frac{\Omega_0'}{h^3}u_{z1} - \frac{\lambda\Omega_0'}{h}p = 0, \tag{19}$$

где обозначено

$$\omega = 1 + \frac{\lambda^2\Omega_0'}{B}.$$

Вводя замену

$$u_{z1} = W - \lambda hp \tag{20}$$

и используя обозначения (17) и (20), получаем, что функция W удовлетворяет уравнению

$$\Delta W - k^2W = 0. \tag{21}$$

Здесь

$$k^2 = \frac{\Omega_0'}{\Lambda_0'\omega h^2}.$$

Введем в рассмотрение аналитические функции $\varphi^*(\xi)$ и $\chi^*(\xi)$ комплексного переменного $\xi = x + iy$ по формулам

$$\varphi^*(\xi) = p^* + iq^*, \quad \chi^*(\xi) = p_1 + iq_1. \tag{22}$$

Тогда бигармоническую функцию U можно записать в комплексной форме следующим образом:

$$U = \operatorname{Re}[\bar{\xi}\varphi^*(\xi) + \chi^*(\xi)], \tag{23}$$

где $\bar{\xi} = x - iy$. Для нахождения перемещений и усилий получаем записанные в комплексной форме соотношения

$$2G(u_{x0} + iu_{y0}) = \varkappa^*\varphi(\xi) - \xi\overline{\varphi'(\xi)} - \psi(\xi) + \frac{2E}{1+\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\xi}},$$

$$u_{z1} = W - \frac{4\lambda h(1-\nu)}{E}\operatorname{Re}\varphi'(\xi),$$

$$N_x + N_y = 8h\operatorname{Re}\varphi'(\xi) + \frac{\lambda\Omega_0'(1-\nu)}{h\omega}W,$$

$$N_y - N_x + 2iS_{xy} = 4h\left[\bar{\xi}\varphi''(\xi) + \psi'(\xi) + 4\lambda h\Lambda_0'(1-\nu)\frac{\partial^2W}{\partial\xi^2}\right], \tag{24}$$

$$R_0 = \frac{\Omega_0}{\omega h}W,$$

$$Q_{x1} - iQ_{y1} = 2\Lambda_0'\frac{\partial W}{\partial\xi} - \frac{4\lambda h\Lambda_0'(1-\nu)}{E}\varphi''(\xi).$$

Здесь введены такие обозначения:

$$\varphi(\xi) = \frac{E}{1-\nu}\varphi^*(\xi); \quad \psi(\xi) = \chi'(\xi) - \frac{2\lambda^2h\Lambda_0'(1-\nu)^2}{E}\varphi''(\xi);$$

$$\chi(\xi) = \frac{E}{1-\nu}\chi^*(\xi); \quad \varkappa^* = \frac{3-\nu}{1+\nu}; \quad \Phi = -\frac{\lambda h\Lambda_0}{B}W.$$

Штрихом обозначены производные по комплексному переменному ξ.

Таким образом, задача определения симметричного относительно срединной плоскости напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропной пластины заключается в нахождении двух аналитических функций $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ и функции W, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца (21). Полученный результат является обобщением результатов плоской теории упругости на случай учета поперечных деформаций.

Приведенные соотношения использованы при решении задачи об одноосном растяжении усилиями интенсивности p трансверсально-изотропной пластины с круговым отверстием радиуса a. Значение расчетных в данной задаче усилий N_θ на контуре отверстия получено в виде

$$N_\theta(a, \theta) = 2ph\left\{1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2T_0}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\lambda^2 h\Lambda_0'(1-\nu)^2}{Ea^2} \times \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \times \frac{3tK_2'(t) + 3t^2K_2(t) + t^2K_2'(t)}{tK_2'(t)}\right)\right]\cos 2\theta\right\}, \quad (25)$$

где

$$T_0 = 1 - \frac{\lambda^2 h\Lambda_0'(1-\nu)^2}{Ea^2tK_2'(t)}\left[t^2K_2(t) - t^2K_2''(t) - 3tK_2'(t)\right]; \quad t = ka;$$

$K_2(t)$ — функция Макдональда; θ — полярная координата. Из анализа формулы (25) можно заключить о влиянии на напряженное состояние поперечных деформаций. Так, при значении параметров $\nu = \nu' = 0{,}3$, $E/G' = 20$, $a/h = 2$ и $E/E' = 3$ получаем увеличение напряжений на контуре отверстия по сравнению с результатом плоской теории упругости [3] на 4%, а при $E/E' = 5$ — на 9%. Сравнение с результатами трехмерной теории упругости [1] позволяет сделать вывод о возможности использования полученных результатов для расчета достаточно толстых пластин.

1. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязны пластины.— Киев : Наук. думка, 1979.— 237 с.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела.— М. : Гостехиздат, 1950.— 299 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Наука, 1966.— 707 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 26.06.80

УДК 536.2 : 519.34

И. И. Федик, В. И. Кожуховский

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ РИТЦА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

При минимизации квадратичных функционалов методом Ритца в качестве координатных элементов в работе [6] рассмотрена ортонормированная система в энергетическом пространстве, которая получается из полной последовательности линейно независимых элементов $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ с использованием процесса ортогонализации Шмидта. В работах [3, 6] отмечено, что этот процесс трудоемкий при практической реализации. В работе [9] для уменьшения трудоемкости процесса ортогонализации используется метод квадратного корня (см., например, [8]). В этой же работе рассмотрено решение первой краевой задачи для бигармонического уравнения методом Ритца с использованием ортогонализации. В данной работе метод Ритца с исполь-