Таким образом, задача определения симметричного относительно срединной плоскости напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропной пластины заключается в нахождении двух аналитических функций $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ и функции W, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца (21). Полученный результат является обобщением результатов плоской теории упругости на случай учета поперечных деформаций.

Приведенные соотношения использованы при решении задачи об одноосном растяжении усилиями интенсивности p трансверсально-изотропной пластины с круговым отверстием радиуса a. Значение расчетных в данной задаче усилий N_θ на контуре отверстия получено в виде

$$N_\theta(a, \theta) = 2ph\left\{1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2T_0}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\lambda^2 h\Lambda_0'(1-\nu)^2}{Ea^2} \times \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \times \frac{3tK_2'(t) + 3t^2K_2(t) + t^2K_2'(t)}{tK_2'(t)}\right)\right]\cos 2\theta\right\}, \quad (25)$$

где

$$T_0 = 1 - \frac{\lambda^2 h\Lambda_0'(1-\nu)^2}{Ea^2tK_2'(t)}\left[t^2K_2(t) - t^2K_2''(t) - 3tK_2'(t)\right]; \quad t = ka;$$

$K_2(t)$ — функция Макдональда; θ — полярная координата. Из анализа формулы (25) можно заключить о влиянии на напряженное состояние поперечных деформаций. Так, при значении параметров $\nu = \nu' = 0{,}3$, $E/G' = 20$, $a/h = 2$ и $E/E' = 3$ получаем увеличение напряжений на контуре отверстия по сравнению с результатом плоской теории упругости [3] на 4%, а при $E/E' = 5$ — на 9%. Сравнение с результатами трехмерной теории упругости [1] позволяет сделать вывод о возможности использования полученных результатов для расчета достаточно толстых пластин.

1. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязны пластины.— Киев : Наук. думка, 1979.— 237 с.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела.— М. : Гостехиздат, 1950.— 299 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Наука, 1966.— 707 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 26.06.80

УДК 536.2 : 519.34

И. И. Федик, В. И. Кожуховский

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ РИТЦА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

При минимизации квадратичных функционалов методом Ритца в качестве координатных элементов в работе [6] рассмотрена ортонормированная система в энергетическом пространстве, которая получается из полной последовательности линейно независимых элементов $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ с использованием процесса ортогонализации Шмидта. В работах [3, 6] отмечено, что этот процесс трудоемкий при практической реализации. В работе [9] для уменьшения трудоемкости процесса ортогонализации используется метод квадратного корня (см., например, [8]). В этой же работе рассмотрено решение первой краевой задачи для бигармонического уравнения методом Ритца с использованием ортогонализации. В данной работе метод Ритца с использованием ортогонализации применяется к задаче определения стационарного температурного поля.

Минимизация квадратичного функционала методом Ритца с использованием ортогонализации. Пусть на вещественном гильбертовом сепарабельном пространстве U задан вещественный квадратичный функционал

$$I(u) = I_2(u, u) - 2I_1(u), \tag{1}$$

где $I_2(u, u)$ — билинейная непрерывная симметричная форма; $I_1(u)$ — линейный непрерывный функционал. Необходимо найти минимум функционала $I(u)$ на множестве U.

Форма $I_2(u, u)$ называется коэрцитивной на U, если

$$I_2(u, u) \geqslant c\,\|u\|^2 \quad \forall u \in U, \quad c = \text{const} > 0, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве U.

Теорема 1 [5]. Если $I_2(u, u)$—билинейная непрерывная на U симметричная форма, удовлетворяющая условию (2), то существует и притом единственный элемент $\mathbf{u} \in U$, для которого

$$I(u) = \inf_{u \in U} I(u).$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$I_2(u, \varphi) = I_1(\varphi) \quad \forall \varphi \in U. \tag{3}$$

Легко показать, что в пространстве U можно ввести скалярное произведение $[u, \vartheta] = I_2(u, \vartheta)$. Энергетическую норму элемента u можно определить по формуле

$$|u| = \sqrt{I_2(u, u)}. \tag{4}$$

Из условия непрерывности билинейной формы $I_2(u, u)$ следует, что имеет место неравенство

$$|u| \leqslant d\|u\| \quad \forall u \in U, \quad d = \text{const} > 0. \tag{5}$$

Из неравенств (2) и (5) следует, что нормы $|u|$ и $\|u\|$ эквивалентны. Поэтому теорема 1 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 2. Если энергетическая норма и норма исходного пространства эквивалентны, то существует и притом единственный элемент $u \in U$, для которого

$$I(u) = \inf_{u \in U} I(u).$$

Из непрерывности $I_1(u)$ следует, что имеет место неравенство

$$I_1(u) \leqslant M|u| \quad \forall u \in U, \quad M = \text{const} > 0. \tag{6}$$

В пространстве U можно найти полную ортонормированную систему, которая получается из последовательности линейно независимых элементов $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ с использованием метода квадратного корня. Тогда искомый n-й элемент g_n ортонормированной системы $\{g_n\}$ записывается в виде

$$g_n = \frac{1}{\beta_{nn}}\left(f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} g_i\right), \tag{7}$$

где

$$\beta_{nn} = \sqrt{[f_n, f_n] - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni}^2}; \tag{8}$$

$$\beta_{ni} = \frac{1}{\beta_{ii}}\left([f_n, f_i] - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{nj}\beta_{ij}\right); \quad n = 0, 1, \ldots, \infty, \; i = 0, 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Данный алгоритм реализован на языке АЛГОЛ-60.

Для вычисления некоторого линейного функционала от элемента g_n имеем

$$L(g_n) = \frac{1}{\beta_{nn}} \left(L(f_n) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} L(g_i) \right). \tag{10}$$

Введем неравенство, применяемое при получении погрешности метода Ритца. Из (10) получим

$$L(f_n) = \sum_{i=0}^{n} \beta_{ni} L(g_i). \tag{11}$$

Отсюда

$$|L(f_n)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \beta_{ni}^2} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} L^2(g_i)}. \tag{12}$$

Но из выражения (8) следует, что

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_{ni}^2 = [f_n, f_n]. \tag{13}$$

Тогда окончательно получим

$$L^2(f_n) \leqslant [f_n, f_n] \sum_{i=0}^{n} L^2(g_i). \tag{14}$$

Ортонормированная последовательность $\{g_n\}$ применяется в качестве координатных элементов при минимизации функционала

$$I(u) = [u, u] - 2I_1(u) \tag{15}$$

методом Ритца. Решение находится в виде ряда

$$u_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n. \tag{16}$$

Тогда c_n определяется по формуле

$$c_n = I_1(g_n). \tag{17}$$

Подставляя сюда g_n из (7), получим

$$c_n = \frac{1}{\beta_{nn}} \left[I_1(f_n) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} c_i \right]. \tag{18}$$

Отсюда

$$I_1(f_n) = \sum_{i=0}^{n} \beta_{ni} c_i. \tag{19}$$

Можно получить очевидное неравенство

$$I_1^2(f_n) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \beta_{ni}^2 \sum_{i=0}^{n} c_i^2. \tag{20}$$

Учитывая выражение (13), получаем

$$\sum_{i=0}^{n} c_i^2 \geqslant \frac{I_1^2(f_n)}{[f_n, f_n]}. \tag{21}$$

Энергетическая норма оптимального элемента (16) равна

$$|u_\infty| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2}, \tag{22}$$

а наименьшее значение функционала $I_{\text{мин}} = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$.

На практике рассматривается конечное число членов ряда. Тогда

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} c_n g_n; \tag{23}$$

$$|u_N| = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} c_n^2}; \tag{24}$$

$$I_{\text{мин}} = -\sum_{n=0}^{N} c_n^2. \tag{25}$$

Важным свойством ортонормированной системы $\{g_n\}$ является то, что коэффициенты c_n не зависят от N.

Из выражений (24), (25) следует, что при конечном числе членов получается заниженное значение энергетической нормы оптимального элемента и завышенное значение функционала.

Перейдем к вопросу оценки погрешности полученного решения. Подставляя ряд (16) в (6), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leqslant M^2. \tag{26}$$

Энергетическая норма погрешности

$$|u_\infty - u_N| = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2}. \tag{27}$$

Тогда с учетом формул (21) и (27) находим

$$|u_\infty - u_N|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 \leqslant M^2 - \frac{[l_1(f_N)]^2}{[f_N, f_N]}. \tag{28}$$

Так как эта оценка верна при любых K, то получим окончательную оценку

$$|u_\infty - u_N|^2 \leqslant M^2 - \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \frac{[l_1(f_k)]^2}{[f_k, f_k]}. \tag{29}$$

Это является априорной оценкой погрешности приближенного решения по Ритцу в энергетической норме. Апостериорная оценка получается элементарным способом. Если u_∞ — точное решение, а u_N — приближенное, то

$$|u_\infty - u_N|^2 \leqslant M^2 - \sum_{n=0}^{N} c_n^2. \tag{30}$$

Стационарное температурное поле. Пусть Ω — открытая область в пространстве E_m с границей S. Будем искать решение $T(x)$ $(x \in E_m)$ задачи

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = g_v \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{31}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T - g = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{32}$$

где λ, g_v, α, g — функции координат, причем

$$0 < \alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}, \quad 0 < \lambda_{\min} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max}.$$

Для решения задачи применим вариационный метод. Используем минимизируемый функционал

$$I(T) = \int_\Omega \lambda |\operatorname{grad} T|^2 d\Omega + \int_S \alpha T^2 dS - 2\left[\int_\Omega g_v T d\Omega + \int_S g T dS\right]. \tag{33}$$

Обозначим

$$[T, T] = \int_\Omega \lambda |\operatorname{grad} T|^2 d\Omega + \int_S \alpha T^2 dS, \tag{34}$$

$$l_1(T) = \int_\Omega g_v T d\Omega + \int_S g T dS. \tag{35}$$

В качестве исходного пространства выберем гильбертово пространство W_2^1 (Ω) с нормой

$$\|T\|^2 = \int_{\Omega} T^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\operatorname{grad} T|^2 d\Omega. \tag{36}$$

Требования к области изложены в работах [4, 7]. Сепарабельность пространства W_2^1 (Ω) доказана в работе [1].

Как отмечено в работе [10], энергетическое пространство с квадратом нормы (34) есть W_2^1 (Ω). Поэтому нормы энергетического пространства и пространства W_2^1 (Ω) эквивалентны.

Докажем непрерывность функционала I_1 (T) в энергетическом пространстве. Ограничимся случаем существования вектор-функции $\bar{\vartheta}(x) = (\vartheta_1(x), \ldots, \vartheta_n(x))$, удовлетворяющей условию

$$\operatorname{div} \bar{\vartheta} = g_v,$$

причем

$$\bar{\vartheta} \in W_2^1(\Omega). \tag{37}$$

Тогда $$I_1(T) = \int_S gTdS + \int_{\Omega} g_v T d\Omega = \int_S (g - \bar{\vartheta}_n) TdS - \int_{\Omega} \bar{\vartheta} \operatorname{grad} T d\Omega. \tag{38}$$

Отсюда

$$[I_1(T)]^2 \leqslant \left(\int_S (g - \bar{\vartheta}_n) TdS\right)^2 + \left(\int_{\Omega} \bar{\vartheta} \operatorname{grad} T d\Omega\right)^2 = \left(\int_S \frac{g - \vartheta_n}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\alpha}\, TdS\right)^2 +$$

$$+ \left(\int_{\Omega} \frac{\bar{\vartheta}}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} \operatorname{grad} T d\Omega\right)^2 \leqslant \int_S \frac{(g - \bar{\vartheta}_n)^2}{\alpha} dS \int_S \alpha T^2 dS +$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{|\bar{\vartheta}|^2}{\lambda} d\Omega \int_{\Omega} \lambda |\operatorname{grad} T|^2 d\Omega. \tag{39}$$

Если числа a, b, c, d положительны, то имеет место неравенство

$$ab + cd \leqslant (a + c)(b + d). \tag{40}$$

Тогда

$$[I_1(T)]^2 \leqslant \left[\int_S \frac{(g - \bar{\vartheta}_n)^2}{\alpha} dS + \int_{\Omega} \frac{|\bar{\vartheta}|^2}{\lambda} d\Omega\right] [T, T]. \tag{41}$$

Отсюда

$$M^2 = \int_S \frac{(g - \bar{\vartheta}_n)^2}{\alpha} dS + \int_{\Omega} \frac{|\bar{\vartheta}|^2}{\lambda} d\Omega. \tag{42}$$

П р и м е р. Рассмотрим задачу определения температуры в прямоугольнике со сторонами $2l$ и $2h$ из уравнения

$$\nabla^2 T + \frac{g_v}{\lambda} = 0 \tag{43}$$

внутри прямоугольника с граничными условиями

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\alpha}{\lambda} T = 0, \tag{44}$$

где λ, g_v, α — постоянные. Функционалы I_2 (T, T) и I_1 (T, T) имеют вид

$$I_2(T, T) = \frac{1}{l + h} \left[\int_0^l T^2 \Big|_{y=h} dx + \int_0^h T^2 \Big|_{x=l} dy\right] +$$

$$+\frac{R_{\text{ср}}^2}{2\,\text{Bi}\,lh}\int_0^h\int_0^l\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]dxdy, \tag{45}$$

$$I_1(t)=\frac{T^*}{lh}\int_0^h\int_0^l Tdxdy. \tag{46}$$

Здесь

$$\text{Bi}=\frac{\alpha R_{\text{ср}}}{\lambda};\quad R_{\text{ср}}=\frac{2lh}{l+h};\quad T^*=\frac{g_0 R_{\text{ср}}}{2\alpha}.$$

Ортогональные элементы строим из последовательности

$$1,\ \frac{x}{l},\ \frac{y}{h},\ \left(\frac{x}{l}\right)^2,\ \frac{xy}{lh},\ \left(\frac{y}{h}\right)^2,\ \left(\frac{x}{l}\right)^3,\ \left(\frac{x}{l}\right)^2\frac{y}{h},$$
$$\frac{x}{l}\left(\frac{y}{h}\right)^2,\ \left(\frac{y}{h}\right)^3,\ \ldots,$$

общий член которой представляется в виде

$$f_{ij}=\left(\frac{x}{l}\right)^i\left(\frac{y}{h}\right)^j. \tag{47}$$

Сумма индексов $i+j$ является неубывающей функцией номера элемента последовательности. Индексы i и j образуют следующую последовательность:

$$\begin{array}{cccccccccc} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, & \ldots, & \begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}, & \ldots, \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & m & \ldots \end{array}$$

причем член $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ имеет номер 0 (нумерация снизу).

Для вычисления i и j используем формулы

$$i=P-j, \tag{48}$$

$$j=m-\frac{P(P+1)}{2}, \tag{49}$$

где $P=E\left(\frac{4m}{\sqrt{1+8m}+1}\right)$; $E(x)$ — целая часть x.

Находим скалярное произведение

$$[f_{ij}, f_{nm}]=\frac{1}{l+h}\left(\frac{l}{i+n+1}+\frac{h}{j+m+1}\right)+\frac{Kh}{\text{Bi}\,l}\,\frac{in}{i+n-1}\,\frac{1}{j+m+1}+$$
$$+\frac{K}{\text{Bi}}\,\frac{l}{h}\,\frac{jm}{j+m-1}\,\frac{1}{i+n+1}. \tag{50}$$

Здесь

$$K=\frac{2lh}{(l+h)^2}. \tag{51}$$

Подставляя f_{ij} вместо T в (46), получаем

$$I_1(f_{ij})=\frac{T^*}{(i+1)(j+1)}. \tag{52}$$

Найдем число M^2. Из равенства (42) имеем

$$\frac{l^2h^2M^2}{T^{*2}}=\frac{2\,\text{Bi}\,lh}{R_{\text{ср}}^2}\int_0^h\int_0^l|\bar\vartheta|^2dxdy+(l+h)\left[\int_0^l\bar\vartheta_n^2\big|_{y=h}dx+\int_0^h\bar\vartheta_n^2\big|_{x=l}dy\right]. \tag{53}$$

где $\bar{\vartheta}$ — удовлетворяет условию (37). Функцию ϑ можно взять в виде

$$\bar{\vartheta} = \left((1-a)\,x + \frac{\partial c}{\partial y},\ ay - \frac{\partial c}{\partial x}\right) \tag{54}$$

(a — некоторое число; $c\ (x,\ y)$ — функция переменных x и y).

Целесообразно получить число M^2 наименьшее. В данной работе минимизация M^2 не рассматривается. Положим $c = 0$. Тогда

$$\frac{M^2}{T^{*2}} = \frac{2}{R_{\text{ср}}}\left[l\,(1-a)^2\left(1 + \frac{1}{3}\,\mathrm{Bi}_1\right) + ha^2\left(1 + \frac{1}{3}\,\mathrm{Bi}_2\right)\right],$$

$$\mathrm{Bi}_1 = \frac{\alpha l}{\lambda},\quad \mathrm{Bi}_2 = \frac{\alpha h}{\lambda}. \tag{55}$$

Найдем минимум по a. Тогда

$$M^2_{\text{мин}} = T^{*2}\,\frac{\left(1 + \frac{1}{3}\,\mathrm{Bi}_1\right)\left(1 + \frac{1}{3}\,\mathrm{Bi}_2\right)}{1 + \frac{1}{3}\,\mathrm{Bi}^*}, \tag{56}$$

где

$$\mathrm{Bi}^* = \frac{\alpha}{\lambda}\,\frac{l^2 + h^2}{l + h}.$$

Сравним результаты расчета по данной методике* для квадрата на ЭВМ М-222 с результатами расчета по методике работы [2]. В расчетах использовались 45 членов ряда (16). Результаты сравнения температуры в центре квадрата приведены ниже:

Bi	0,5	10
$\dfrac{T_{\text{вар}} - T_n}{T_n}$	$-0{,}02$	$+0{,}0045$

Здесь $T_{\text{вар}}$, T_n — значения температуры в центре квадрата, определенные вариационным методом и численным решением интегральных уравнений соответственно. Совпадение результатов удовлетворительное.

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М. : Наука, 1975.—480 с.
2. *Бобрик А. И., Михайлов В. Н.* Решение некоторых задач для уравнения Пуассона с граничными условиями IV рода.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1974, **14**, № 1, с. 126—134.
3. *Гавурин М. К.* Лекции по методам вычислений.— М. : Наука, 1971.— 248 с.
4. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1964.— 540 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное уравнение системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М.: Мир, 1972.— 416 с.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М. : Наука, 1970.— 512 с.
7. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул.— М. : Наука, 1974.— 808 с.
8. *Фадеев Д. К., Фадеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.— М. : Физматгиз, 1963.— 734 с.
9. *Федик И. И., Кожуховский В. И., Егоров В. С.* Термоупругие напряжения в круговом секторе.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1977, вып. 6, с. 89—94.
10. *Царицына И. В.* О методе штрафа в задаче о собственных числах.— Методы вычислений, 1978, вып. 2, с. 94—102.

г. Москва

Поступила в редколлегию
14.08.80

* Расчеты проводила А. Разумовская.