Методом интегралов энергии [2] получена оценка решения задачи (10), которая имеет вид

$$\| R_N(x, t, \varepsilon)\|_{L_2(D_T)} \leqslant C, \qquad (11)$$

где константа C не зависит от ε. Оценка (11) доказывает асимптотическую корректность разложения (3).

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. При выполнении условий 1) — 3) решение задачи (1), (2) допускает асимптотическое разложение (3), где $v^i(x, t)$ $(i = 0, \ldots, N)$ являются решениями задач Коши (4), (5), функции гиперболического пограничного слоя $\Pi^{i/2}(\xi, t)$, $Q^{i/2}(\eta, t)$ $(i = 0, \ldots, 2N+1)$ являются решениями задач (6), (7) и (8), (9) соответственно.

Замечание 1. Если $\Lambda(x, t) \equiv \Lambda(t)$, $A(x, t) \equiv A(t)$, то условие 3) можно ослабить. А именно, достаточно выполнения естественного условия согласования $f(0, 0) = f(l, 0) = 0$.

Замечание 2. Очевидно, что рассмотрение задачи (1), (2) с нулевыми начальными и граничными условиями связано лишь с простотой записи условий согласования 3).

1. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3—122.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1964.— 830 с.
3. *Треногин В. А.* Об асимптотике решений квазилинейных гиперболических уравнений с гиперболическим погранслоем.— Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1962, вып. 9, с. 112—127.
4. *Цымбал В. Н.* Смешанная задача для гиперболической системы первого порядка с малым параметром.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 7—11.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 02.07.80

УДК 517.954

П. И. Штабалюк

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Почти периодические решения дифференциальных уравнений с частными производными привлекают все больший интерес исследователей. Некоторые условия существования почти периодических решений общих линейных уравнений указаны в работе [9]. Почти периодические решения линейных гиперболических уравнений второго порядка изучались в работах [2, 7]. В работе [6] исследованы почти периодические решения линейных эллиптических уравнений с почти периодическими коэффициентами. Почти периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений рассматривались, например, в работах [3, 4, 8]. В данной работе исследованы условия существования и единственности почти периодического по переменной t и периодического по пространственным переменным решения линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В идейном плане данная работа близка к работе [1].

В области $D = [0, \infty[\times \Omega_p$, где Ω_p — p-мерный тор, полученный отождествлением противоположных граней параллелепипеда $\{x : 0 \leqslant x_v \leqslant \omega_r,\ r = \overline{1, p}\}$, рассмотрим бестипную систему

$$\frac{\partial^{n_j} u_j(t, x)}{\partial t^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right) u_j(t, x) = f_j(t, x) \qquad (1)$$

$$(j = \overline{1, m}).$$

Здесь $P_{jr}(\mu, \lambda_1 \ldots, \lambda_p)$ — полиномы с постоянными коэффициентами степени не выше $n_j - 1$ по μ; $f_j(t, x)$ $(j = \overline{1, m})$ — почти периодические функции переменной t равномерно относительно x.

Ставится задача об отыскании почти периодических по t решений системы (1). Отметим, что вид области D налагает условия ω_r-периодичности по x_r вектор-функции $f(t, x)$ и искомого решения $u(t, x)$.

Предположим, что $f(t, x)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|k| \geqslant 0} f_{lk} \exp\left(i\left(a\mu_l t + \sum_{r=1}^{p} k_r \frac{2\pi}{\omega_r} x_r\right)\right), \tag{2}$$

где $\{a\mu_l\}_{l=0}^{\infty} = M$ — объединение спектров компонент $f_j(t, x)$. Пусть, кроме того, существуют $\sigma > 0$ и $C_0 > 0$ такие, что

$$|\mu_l| \geqslant C_0 l^{\sigma}. \tag{3}$$

Здесь и далее используются такие обозначения:

$$x = (x_1, \ldots, x_p); \quad k = (k_1, \ldots, k_p); \quad |k| = \sum_{r=1}^{p} |k_r|;$$

$$n = n_1 + \cdots + n_m; \quad f(t, x) = (f_1, \ldots, f_m).$$

Решение системы (1) ищем в виде векторного ряда

$$u(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|k| \geqslant 0} u_{lk} \exp\left(i\left(a\mu_l t + \sum_{r=1}^{p} k_r \frac{2\pi}{\omega_r} x_r\right)\right). \tag{4}$$

Подставив выражения (2) и (4) в (1), получим для определения коэффициентов u_{lk} систему линейных алгебраических уравнений

$$u_{jlk}(ia\mu_l)^{n_j} - \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\left(ia\mu_l, ik_1 \frac{2\pi}{\omega_1}, \ldots, ik_p \frac{2\pi}{\omega_p}\right) u_{rlk} = f_{jlk} \tag{5}$$

$$(j = \overline{1, m}).$$

Определитель системы (5) вычисляется по формуле

$$\Delta(a\mu_l, k; \omega) = \det\left\| (ia\mu_l)^{n_j} \delta_{jr} - P_{jr}\left(ia\mu_l, ik_1 \frac{2\pi}{\omega_1}, \ldots, ik_p \frac{2\pi}{\omega_p}\right)\right\|,$$

где δ_{jr} — символ Кронекера.

Нетрудно видеть, что вопрос о единственности почти периодического решения системы (1) сводится к вопросу о единственности решения системы (5), а точнее, верна следующая теорема.

Теорема 1. Для единственности решения задачи необходимо и достаточно, чтобы для всех $a\mu_l \in M$ и всех целочисленных k

$$\Delta(a\mu_l, k; \omega) \neq 0. \tag{6}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из работы [1].

Заметим, что условие (6) эквивалентно условию, чтобы λ-корни характеристического уравнения системы (1)

$$\det\|(i\lambda)^{n_j}\delta_{jr} - P_{jr}(i\lambda, i\xi_1, \ldots, i\xi_p)\| = 0$$

при $\xi_s = k_s \frac{2\pi}{\omega_s}$ $(s = \overline{1, p})$ не совпадали со спектральными значениями $f_j(t, x)$ $(j = \overline{1, m})$.

Предположим, что условие (6) выполнено. Решая систему (5) по правилу Крамера, получаем

$$u_{jlk} = \frac{\Delta_j(a\mu_l, k; \omega)}{\Delta(a\mu_l, k; \omega)}, \tag{7}$$

где $\Delta_j(a\mu_l, k; \omega)$ $(j = \overline{1, m})$ — дополнительные определители системы (5).

Обозначим $Q = \max\{n_j, \deg P_{ir}(\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)\}$. Для $\Delta_i(a\mu_l, k;\ \omega)$ справедлива оценка сверху

$$|\Delta_i(a\mu_l, k;\ \omega)| \leqslant C(|a\mu_l| + |k|)^{mQ} |f_{jlk}|. \tag{8}$$

Определитель $\Delta(a\mu_l, k;\ \omega)$, будучи отличным от нуля, может становиться как угодно малым для бесконечного набора векторов $(a\mu_l, k_1, \ldots, k_p) \in M \times Z^p$, т. е. вопрос о существовании решения задачи связан с проблемой малых знаменателей.

Теорема 2. Пусть существует целое γ такое, что для всех векторов $(a\mu_l, k_1, \ldots, k_p) \in M \times Z^p$

$$|\Delta(a\mu_l, k;\ \omega)| \geqslant C_1(|a\mu_l| + |k|)^{-\gamma}, \quad C_1 > 0. \tag{9}$$

Тогда, если $f(t, x) \in C^\alpha(D)$, $\left(\alpha = Q(m+1) + \gamma + p + \left[\frac{1}{\sigma} + 1\right]\right)$, то существует решение системы (1) $u(t, x) \in C^Q(D)$, представимое в виде ряда (4) с коэффициентами (7).

Доказательство. Из соотношения (8) следует, что ряд (4) с коэффициентами (7) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием до порядка Q включительно, имеют общий мажорантный ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|k| \geqslant 0} C_2 |f_{lk}| (|a\mu_l| + |k|)^{Q(m+1)+} . \tag{10}$$

Если вектор-функция $f(t, x) \in C^\alpha(D)$, то выполняется оценка

$$|f_{lk}| = O((|a\mu_l| + |k|)^{-\alpha}). \tag{11}$$

Теперь, учитывая неравенство (3), для ряда (4) получаем новый мажорантный ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|k| \geqslant 0} C_3 (aC_0 l^\sigma + |k|)^{-p - \left[\frac{1}{\sigma} + 1\right]}, \tag{12}$$

который является обобщенным гармоническим. Из сходимости ряда (12) следует доказательство теоремы.

Выясним, когда же выполняется оценка (9).

Теорема 3. При $\gamma = n\left(p + \left[\frac{1}{\sigma} + 1\right]\right)$ оценка (9) выполняется для почти всех (в смысле меры Лебега в R^{p+1}) векторов $(a, \omega_1, \ldots, \omega_p)$ с положительными координатами.

Доказательство. Пусть вектор ω фиксированный. Легко видеть, что

$$\left|\frac{d^n \Delta(a\mu_l, k;\ \omega)}{da^n}\right| = n!\ |\mu_l| > 0.$$

Тогда, согласно лемме 1 из работы [1], мера тех a, для которых выполняется неравенство

$$|\Delta(a\mu_l, k;\ \omega)| < C_4(l^\sigma + |k|)^{-\gamma}, \tag{13}$$

не превосходит

$$C_5(l^\sigma + |k|)^{-\gamma/n}. \tag{14}$$

Проинтегрировав выражение (14) по ω в некотором параллелепипеде K, получим аналогичную оценку для векторов (a, ω) только с новой константой C_6. Из сходимости ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|k| \geqslant 0} C_6 (l^\sigma + |k|)^{-\gamma/n}$$

и леммы Бореля—Кантелли [5] следует, что мера векторов (a, ω), при которых оценка (13) выполняется для бесконечного набора векторов $(a\mu_l, k_1, \ldots, k_p) \in M \times Z^p$, равна нулю, что и требовалось доказать.

Из доказательства теоремы 3 видно, что с ростом γ множество тех a, при которых условие (9) не выполняется, сужается. Чтобы различать множества чисел a, соответствующих различным $\gamma > n\left(\bar{p} + \left[\frac{1}{\sigma} + 1\right]\right)$, т. е. когда их мера Лебега равна нулю, применим размерность Хаусдорфа [1]. Для этого используем следующую лемму.

Лемма [1]. Пусть S — некоторое множество на прямой и пусть $I = \sum_{i \geqslant 1} I_i$ — такое покрытие S счетной системой интервалов, что $S \subset \bigcup_{i \geqslant r} I_i$ для любого r. Если для некоторого $\rho > 0$, $\sum_{i \geqslant 1} | I_i |^\rho < \infty$, то $\dim S \leqslant \rho$.

Теорема 4. Если $\gamma > n\left(p + \left[\frac{1}{\sigma} + 1\right]\right)$, то неравенство (13) имеет бесконечное число решений для множества чисел a, размерность Хаусдорфа которого не превосходит $n\left(p + \left[\frac{1}{\sigma} + 1\right]\right)/\gamma$.

Доказательство. Обозначим через $S(a)$ множество тех a, для которых неравенство (13) имеет бесконечный набор решений в целочисленных векторах $(l, k_1, \ldots, k_p)$, а через $S_{lk}(a)$ — множество тех a, для которых неравенство (13) выполняется при фиксированном col (l, k). Множество S_{lk} можно покрыть конечной системой интервалов I_{lkr} $(r = 1, C_7)$. Мера Лебега каждого из них по теореме 3 не превышает $C_5 (l^\sigma + | k |)^{-\gamma/n}$. Легко видеть, что система интервалов I_{lkr} удовлетворяет условиям леммы при $\rho = n\left(p + \left[\frac{1}{\sigma} + 1\right]\right)/\gamma$. Отсюда следует, что

$$\dim S(a) \leqslant n\left(p + \left[\frac{1}{\sigma} + 1\right]\right)/\gamma.$$

Следствие. Если $f(t, x) \in C^\infty(D)$, то размерность Хаусдорфа множества чисел a, при которых не выполняется оценка (9), равна нулю.

1. *Берник В. И., Пташник Б. И.* Краевая задача для системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1980, **16**, № 2, с. 273—279.
2. *Лісевич Л. М., Свірчевська Ж. С.* Існування майже періодичного розв'язку однієї задачі для гіперболічного рівняння другого порядку.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 7, с. 611—613.
3. *Мосєенков В. Б.* Майже періодичні розв'язки нелінійних хвильових рівнянь.— Укр. мат. журн., 1977, 29, № 1, с. 112—118.
4. *Мосеенков В. Б.* Квазипериодические решения слабо диссипативного нелинейного волнового уравнения.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 2, с. 254—257.
5. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений.— М. : Наука, 1977.— 144 с.
6. *Шубин М. А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными.— Успехи мат. наук, 1978, 33, вып. 2 (200), с. 3—47.
7. *Якубов С. Д., Алиев А. Б.* Почти-периодические решения гиперболических уравнений второго порядка.— Дифференц. уравнения, 1974, 10, № 6, с. 1142—1144.
8. *Biroli M.* Solutions bornées on presque périodiques de l'equation non lineaire de la corde vibrante. Nota 1,2.— Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e netur, 1972, **53**, N 1, c. 1—14.
9. *Lovicav V.* Weakly almost periodic solutions of linear equations in banach spaces.— Čas. pěstov. mat., 1973, **A98**, N 2, c. 126—129.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
26.12.80