4. *Ковальчик І. М.* Про ефективне обчислення одного класу вінеровських інтегралів.— Доп. АН УРСР, 1965, № 3, с. 265—268.
5. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск : Наука и техника, 1976.— 384 с.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 06.03.80.

УДК 513.88

А. И. Балинский, В. С. Заячковский

О КРИТЕРИЯХ ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей работе исследуются вопросы факторизации операторных пучков способом, основанным на систематическом использовании оператор-матриц, составленных из так называемых обобщенных моментов резольвенты операторного пучка относительно изолированной части его спектра. На этом пути получен критерий делимости одного операторного пучка другим, а также обобщена с конечномерного на случай банахова пространства теорема Лопатинского о наличии правильного делителя [4].

Обозначим через $[X, Y]$ пространство непрерывных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, $[X] = [X, X]$, $1_X = 1$ — оператор, тождественно отображающий X в себя. Если операторы $a_{ij} \in [X]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, то $n \times m$-оператор-матрица $A = \| a_{ij} \|$ определяет оператор из $[X^{(m)}, X^{(n)}]$. Здесь $X^{(k)} = \bigoplus\limits_k X$ — пространство прямой суммы k экземпляров исходного пространства X. Наоборот, любой оператор из $[X^{(m)}, X^{(n)}]$ определяет некоторую матрицу.

С оператор-матрицами можно обращаться так же, как и с обыкновенными числовыми матрицами. В частности, если $A = \| a_{ij} \|$, то определено произведение bA (Ab); например, под bA будем понимать оператор-матрицу $\| ba_{ij} \|$.

В дальнейшем используется одностороннее функциональное исчисление. Пусть $f(\lambda)$ — аналитическая в окрестности спектра $\sigma(A)$ оператора $A \in [X^{(n)}]$ оператор-значная функция, принимающая значения в $[X]$. Тогда, например, правое значение функции $f(\lambda)$ на операторе A можно определить следующим образом:

$$f(_*A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(\lambda)(\lambda 1_{X^{(n)}} - A)^{-1} d\lambda.$$

Здесь Γ — граница некоторой окрестности спектра $\sigma(A)$, состоящая из конечного числа замкнутых спрямляемых кривых, ориентированных в положительном направлении.

Произвольному операторному пучку вида

$$a(\lambda) = \lambda^p + \lambda^{p-1} a_1 + \cdots + a_p, \qquad (1)$$

где $a_i \in [X]$, поставим в соответствие $p \times p$-оператор-матрицы

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & \ldots & & -a_1 \end{matrix} \right\|, \quad A_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & & & -a_p \\ 1 & & & -a_{p-1} \\ & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & 1 & -a_1 \end{matrix} \right\|,$$

$$S_a = \| a_{p-i-j+1} \|, \quad i, j = \overline{1, p}; \quad a_0 = 1; \quad a_k = 0, \quad k < 0.$$

Легко видеть, что

$$S_a^{-1} = \| t_{i+j-p-1} \|, \tag{2}$$

где операторы t_k последовательно определяются рекуррентными соотношениями

$$\sum_{r=0}^{p} t_{k-r} a_r = 0 \quad \text{либо} \quad \sum_{r=0}^{p} a_r t_{k-r} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Здесь $t_0 = 1$, $t_k = 0$, если $k < 0$.

Операторы A_1, A_2 и S_a позволяют свести изучение спектральных свойств операторного пучка $a(\lambda)$ к изучению соответствующих свойств для линейного регулярного пучка

$$A(\lambda) = \lambda S_a - S_a A_1 = \lambda S_a - A_2 S_a.$$

Такая возможность следует из эквивалентности пучков $A(\lambda)$ и $a(\lambda) \oplus 1_{X(p-1)}$, что утверждает (см., например, [1]) следующая лемма.

Лемма 1.

$$a(\lambda) \oplus 1_{X(p-1)} = M(\lambda) A(\lambda) N(\lambda), \tag{4}$$

а обратимые λ-оператор-матрицы $M(\lambda)$ и $N(\lambda)$ имеют вид

$$M(\lambda) = \left\| \begin{matrix} 1 & \lambda 1 & \ldots & \lambda^{p-1} 1 \\ 0 & -a_{p-2} & \ldots & -1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & -1 & & 0 \end{matrix} \right\|, \quad M(\lambda) = \left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ \lambda 1 & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \\ \lambda^{p-1} 1 & \ldots & \lambda 1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Следствие 1. Спектры операторов A_1, A_2 и пучка $a(\lambda)$ совпадают.

Пусть σ — изолированная часть спектра $\sigma(a)$ пучка $a(\lambda)$, Ω — допустимая область * такая, что $\sigma = \sigma(a) \cap \Omega$. Тогда граница Γ_σ области Ω заключена в резольвентном множестве $\rho(a)$ пучка $a(\lambda)$, и можно определить операторы

$$s_k(a, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \lambda^k a^{-1}(\lambda)\, d\lambda, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Операторы $s_k(a, \sigma)$ будем называть обобщенными моментами резольвенты пучка относительно его части спектра σ. Там, где это не приведет к путанице, будет использоваться сокращенное обозначение s_k.

В настоящей работе существенно будут использоваться ганкелевы оператор-матрицы вида

$$S_r^{(n,m)} = \| s_{r+i+j-1} \|, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad r = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Замечательное свойство матриц (5), позволяющее далее упростить многие вычисления, выражает следующая лемма.

Лемма 2.

$$S_k^{(q,p)} A_2 = S_{k+1}^{(q,p)}, \quad k = 0, 1, \ldots; \quad q = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Доказательство. Из строения оператор-матрицы A_2 видно, что достаточно доказать, что

$$s_r a_p + s_{r+1} a_{p-1} + \cdots + s_{r+p} = 0, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Последнее же непосредственно следует из определения операторов s_k.

Следствие 2. $S_0^{(q,p)} A_2^k = S_k^{(q,p)}$, $k = 0, 1, \ldots$; $q = 1, 2, \ldots$

Аналогично получаются следующие утверждения.

---

* Область, граница которой состоит из конечного числа замкнутых спрямляемых кривых.

Лемма 2'. $A_1 S_k^{(p,q)} = S_{k+1}^{(p,q)}, \quad k = 0, 1, \ldots; \quad q = 1, 2, \ldots$

Следствие 2'. $A_1^k S_0^{(p,q)} = S_k^{(p,q)}, \quad k = 0, 1, \ldots; \quad q = 1, 2, \ldots$

Связь между оператор-матрицами (5), отвечающими части спектра и всему спектру пучка, устанавливает такая лемма.

Лемма 3. $S_r^{(p,q)}(a, \sigma) = P_\sigma(A_1) S_r^{(p,q)}(a, \sigma(a)), \quad q \leqslant p$, здесь $P_\sigma(A_1)$ — проектор Рисса, отвечающий части спектра σ оператора A_1.

Доказательство. Из соотношения (4) имеем

$$A^{-1}(\lambda) = N(\lambda)(a^{-1}(\lambda) \oplus 1_{X(p-1)}) M(\lambda).$$

Домножив последнее на λ^r и проинтегрировав по контуру Γ_σ, получим

$$S_r^{(p,p)}(a, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\sigma} \lambda^r A^{-1}(\lambda)\, d\lambda.$$

Так как оператор S_a обратим (см. [2]), то

$$S_r^{(p,p)}(a, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\sigma} \lambda^r (\lambda 1_{X(p)} - A_1)^{-1}\, d\lambda S_a^{-1} = P_\sigma(A_1) A_1^r S_a^{-1}.$$

При $\sigma = \sigma(a)$ $P_\sigma(A_1) = 1_{X(p)}$, поэтому

$$S_0^{(p,p)}(a, \sigma(a)) = S_a^{-1}.$$

Используя следствие 2, получаем

$$S_r^{(p,p)}(a, \sigma) = P_\sigma(A_1) S_r^{(p,p)}(a, \sigma(a)),$$

откуда при $q \leqslant p$

$$S_r^{(p,q)}(a, \sigma) = P_\sigma(A_1) S_r^{(p,q)}(a, \sigma(a)).$$

Следствие 3. $s_r(a, \sigma(a)) = t_{r-p+1}, \ r = 0, 1, \ldots$

Приведенные свойства матриц обобщенных моментов позволяют установить следующие утверждения:

Лемма 4. $a(A_2 *) = 0$.

Доказательство. Используя лемму 2, получаем

$$S_0^{(p,p)} a(A_2 *) = S_p^{(p,p)} + S_{p-1}^{(p,p)} a_1 + \cdots + S_0^{(p,p)} a_p.$$

Легко видеть, что оператор-матрица $S_0^{(p,p)} a(A_2 *)$ ганкелева и элементы ее, стоящие на k-й побочной диагонали, равны

$$h_k = s_{p+k} + s_{p+k-1} a_1 + \cdots + s_k a_p.$$

Согласно следствию 3 $s_{p+k}(a, \sigma(a)) = t_{k+1}$. Тогда ввиду рекуррентного соотношения (3) $h_k = 0$. Таким образом, $S_0^{(p,p)} a(A_2 *) = 0$ и в силу обратимости $S_0^{(p,p)}(a, \sigma(a))$ отсюда следует требуемое утверждение.

Аналогично может быть установлена такая лемма.

Лемма 4'. $a(* A_0) = 0$.

Для пучков $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ вида (1) существуют единственным образом определенные пучки $c(\lambda)$ и $d(\lambda)$, $\deg d(\lambda) < \deg b(\lambda)$ такие, что $a(\lambda) = b(\lambda) c(\lambda) + d(\lambda)$. В том случае, когда $d(\lambda) \equiv 0$, пучок $b(\lambda)$ называется левым делителем пучка $a(\lambda)$. Левый делитель $b(\lambda)$ пучка $a(\lambda)$ называется левым правильным делителем, если $\sigma(b) \cap \sigma(c) = \varnothing$.

Критерий делимости пучка $a(\lambda)$ пучком $b(\lambda)$ слева устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. Пучок $b(\lambda)$ является левым делителем пучка $a(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $a(B_2 *) = 0$.

Доказательство. Представив произведение $b(\lambda) c(\lambda)$ в виде

$$b(\lambda) c(\lambda) = \lambda^{n-m} b(\lambda) + \lambda^{n-m-1} b(\lambda) c_1 + \cdots + b(\lambda) c_{n-m},$$

легко видеть, что

$$a(B_2 *) = B_2^{n-m} b(B_2 *) + B_2^{n-m-1} b(B_2 *) c_1 + \cdots + b(B_2 *) c_{n-m} = 0,$$

так как $b(B_2 *) = 0$ согласно лемме 4.

Обратно, пусть $a(B_2*) = 0$. В результате деления пучка $a(\lambda)$ на пучок $b(\lambda)$ слева получим

$$a(\lambda) = b(\lambda)c(\lambda) + d(\lambda).$$

Здесь $d(\lambda) = \lambda^{m-1}d_1 + \lambda^{m-2}d_2 + \cdots + d_m$. Тогда

$$a(B_2*) = B_2^{n-m}b(B_2*) + B_2^{n-m-1}b(B_2*)c_1 + \cdots + b(B_2*)c_{n-m} + d(B_2*).$$

Согласно лемме 4 $b(B_2*) = 0$, следовательно, $a(B_2*) = d(B_2*)$, т. е. $d(B_2*) = 0$. Используя следствие 3, легко подсчитать, что элементы первого столбца оператор-матрицы $S_0^{(m,m)}(b, \sigma(b))\, d(B_2*)$ равны $S_b^{-1}D$, где $D = \| d_{m-i} \| \in [X, X^{(m)}]$. Таким образом, $S_b^{-1}D = 0$, откуда $D = 0$, а следовательно, $d(\lambda) \equiv 0$.

Теорема 1 является обобщением на случай делителя произвольной степени известного критерия о наличии линейного делителя, который обычно доказывается как следствие обобщенной теоремы Безу (см. [3]).

Подобно теореме 1 может быть получена такая теорема.

Теорема 1′. Пучок $c(\lambda)$ является правым делителем пучка $a(\lambda)$, $\deg a(\lambda) \geqslant \deg c(\lambda)$, тогда и только тогда, когда $a(*\,C_0) = 0$.

Следующая теорема распространяет на случай операторных пучков в банаховом пространстве критерий Лопатинского о наличии правильного левого делителя (см. работу [2]).

Теорема 2. Пучок $a(\lambda)$ имеет правильный левый делитель $b(\lambda)$, $\deg a(\lambda) \geqslant \deg b(\lambda) = m$, спектр которого совпадает с частью спектра пучка $a(\lambda)$, тогда и только тогда, когда оператор-матрицы обобщенных моментов резольвенты пучка $a(\lambda)$, отвечающие части спектра σ, обладают свойствами:

$$\operatorname{Im} S_0^{(n,m)} = \operatorname{Im} S_0^{(n,m+1)}, \tag{7}$$

$$S_0^{(n,m)}(a, \sigma) \text{ — обратим слева.} \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $a(\lambda) = b(\lambda)c(\lambda)$ и $\sigma(b) = \sigma$, $\sigma(b) \cap \sigma(c) = \varnothing$. Тогда

$$s_r b_m + s_{r+1}b_{m-1} + \cdots + s_{r+m} = 0, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Отсюда получим

$$S_0^{(n,m+1)} = S_0^{(n,m)} \| 1_{X^{(m)}} \vdots B \|, \quad B = \| b_{m-i+1} \| \in [X, X^{(m)}].$$

Следовательно, $\operatorname{Im} S_0^{(n,m+1)} \subset \operatorname{Im} S_0^{(n,m)}$. Обратное включение очевидно.

Левым обратным к оператору $S_0^{(n,m)}$ будет оператор $S_b \| c_{n-m+i-j} \|$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $c_0 = 1$, $c_k = 0$ при $k < 0$ и $k > n - m$, что непосредственно проверяется с помощью следствия 3.

Для доказательства достаточности понадобится следующее замечание. Пусть операторы $a \in [X, Z]$ и $b \in [Y, Z]$ такие, что $\operatorname{Ker} b = 0$ и $\operatorname{Im} a \subset \operatorname{Im} b$. Тогда существует единственный оператор $c \in [X, Y]$ такой, что $a = bc$. Действительно, если b^{-1} отображение обратное оператору b, то оператор $c = b^{-1}a$, как легко видеть, корректно определен и отображает X на Y. Согласно теореме о замкнутом графике он ограничен.

Из (7) следует, что $\operatorname{Im} S_m^{(n,1)} \subset \operatorname{Im} S_0^{(n,m)}$. В силу приведенного выше утверждения о факторизации операторов, существует такой оператор $B = \| b_{m-i+1} \|_{i=\overline{1,m}} \in [X, X^{(m)}]$, что

$$S_0^{(n,m)} B = -S_m^{(n,1)}. \tag{9}$$

Покажем, что в рассматриваемых условиях выполняется гораздо большее:

$$S_k^{(n,m)} B = -S_{k+m}^{(n-1)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

т. е. при $k = m$ происходит стабилизация областей значений операторов $S_0^{(n,k)}$ в цепочке вложений $\operatorname{Im} S_0^{(n,k)} \subset \operatorname{Im} S_0^{(n,k+1)}$:

$$\operatorname{Im} S_0^{(n,m)} = \operatorname{Im} S_0^{(n,m+r)}, \quad r = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Из (9) получим

$$\operatorname{Im}\left\| \begin{matrix} B \\ 1 \end{matrix} \right\| \in \operatorname{Ker} S_0^{(n,m+1)}.$$

Тогда согласно следствию 2 для произвольного $k = 0, 1, \ldots$

$$\operatorname{Im}\left\| \begin{matrix} B \\ 1 \end{matrix} \right\| \in \operatorname{Ker} S_k^{(n,m+1)},$$

откуда и следует (10). Представим (10) в эквивалентном виде

$$S_k^{(n,m)} B_2 = S_{k+1}^{(n,m)}. \tag{12}$$

Легко видеть, что оператор-матрица

$$S_0^{(n,m)} a(B_2 *) = S_n^{(n,m)} + S_{n-1}^{(n,m)} a_1 + \cdots + S_0^{(n,m)} a_n$$

ганкелева прямоугольная и элементы, стоящие на r-й побочной диагонали, имеют вид

$$s_r a_n + s_{r+1} a_{n-1} + \cdots + s_{r+n} = 0.$$

Поскольку $\operatorname{Ker} S_0^{(n,m)} = 0$, то $a(B_2 *) = 0$. Следовательно, согласно теореме 1 пучок $b(\lambda)$ будет левым делителем пучка $a(\lambda)$.

Покажем, что спектр пучка $b(\lambda)$ совпадает с σ. Сопоставив (6) и (12) при $k = 0$, получим

$$A_1 S_0^{(n,m)}(a, \sigma) = S_0^{(n,m)}(a, \sigma) B_2.$$

Следовательно, $\operatorname{Im} S_0^{(n,m)}$ инвариантно относительно оператора A_1. Кроме того, в силу левой обратимости оператора $S_0^{(n,m)}$, $\operatorname{Im} S_0^{(n,m)}$ — замкнутое подпространство $X^{(n)}$, поэтому

$$\sigma(B_2) = \sigma(A_1 \mid \operatorname{Im} S_0^{(n,m)}),$$

где через $A_1 \mid \operatorname{Im} S_0^{(n,m)}$ обозначено сужение оператора A_1 на $\operatorname{Im} S_0^{(n,m)}$. Согласно (11) $\operatorname{Im} S_0^{(n,m)} = \operatorname{Im} S_0^{(n,n)}$, но $\operatorname{Im} S_0^{(n,n)} = \operatorname{Im} P_\sigma(A_1)$ и $\sigma(A_1(\operatorname{Im} P_\sigma(A_1)) = \sigma$. Таким образом, $\sigma(b) = \sigma(B_2) = \sigma$.

Покажем, что $\sigma(c)$ находится вне контура Γ_σ. Для этого достаточно установить, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} (\lambda 1 - C_1)^{-1} d\lambda = 0. \tag{13}$$

Оператор-матрица $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} (\lambda 1 - C_1)^{-1} d\lambda S_c^{-1}$ ганкелева, элементы, стоящие на r-й побочной диагонали, такие:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \lambda^r a^{-1}(\lambda) b(\lambda) d\lambda = s_{r+m} + s_{r+m-1} b_1 + \cdots + s_r b_m = 0.$$

Отсюда в силу обратимости оператора S_c^{-1} следует (13).

Критерий наличия у пучка правильного правого делителя устанавливает следующая теорема.

Теорема 2′. Пучок $a(\lambda)$ имеет правильный правый делитель $c(\lambda)$, $\deg a(\lambda) \geqslant \deg c(\lambda) = l$, спектр которого совпадает с частью спектра пучка $a(\lambda)$, тогда и только тогда, когда оператор-матрицы обобщенных моментов резольвенты пучка $a(\lambda)$, отвечающие части спектра σ, обладают свойствами

$$\operatorname{Ker} S_0^{(l,n)}(a, \sigma) = \operatorname{Ker} S_0^{(l+1,n)}(a, \sigma),$$

$$S_0^{(l,n)}(a, \sigma) \text{ — обратима справа.}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1972.— 113 с.

2. *Кабак В. И., Маркус А. С., Мереуца И. В.* О связи между спектральными свойствами полиномиального операторного пучка и его делителей.— Мат. исслед., 1977, № 45, с. 29—57.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 280 с.
4. *Лопатинский Я. Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители.— Научн. зап. Льв. политехн. ин-та, 1956, № 38, с. 3—7.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 04.01.81

УДК 517.52

Х. И. Кучминская

ДВУХМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РАЗЛОЖЕНИЯМ В ДВОЙНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В ДВУХ ТОЧКАХ

Построению и исследованию многомерных цепных дробей, соответствующих разложениям в кратные степенные ряды в точке, посвящен ряд работ [1—3, 6, 8, 9]. В настоящей работе построены дроби, соответствующие разложениям в двойные степенные ряды в двух точках $(0, 0)$ и (∞, ∞). В одномерном случае такие дроби получены в работах [5, 7].

Рассмотрим два формальных степенных ряда с комплексными коэффициентами

$$L(x, y) = \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij} x^i y^j, \quad L^*(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{c_{-i,-j}}{x^i y^j}, \tag{1}$$

которые, очевидно, можно представить в виде следующих сумм:

$$\begin{aligned} L(x, y) &= L(x, 0) + L(0, y) + \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij} x^i y^j, \\ L^*(x, y) &= L^*(x, 0) + L^*(0, y) + c_0 + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{c_{-i,-j}}{x^i y^j}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$L(x, 0) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i0} x^i; \quad L(0, y) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{0i} y^i;$$

$$L^*(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{-i,0}}{x^i} + c_0; \quad L^*(0, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{0,-i}}{y^i} + c_0; \quad c_{-0,-0} = 3c_0.$$

Для первых двух слагаемых при выполнении известных условий на коэффициенты рядов [5, 7] можно построить соответствующие дроби, именуемые в литературе общими T-дробями [10]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n0} x|}{|1 + b_{n0} x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{0n} y|}{|1 + b_{0n} y}.$$

Третьи слагаемые запишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij} x^i y^j &= \frac{c_{11} xy}{1 + \frac{c_{11}}{c_0} xy + l_1(x, y)}, \\ c_0 + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{c_{-i,-j}}{x^i y^j} &= \frac{c_{11} xy}{1 + \frac{c_{11}}{c_0} xy + l_1^*(x, y)}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $c_0, c_{11} \neq 0$; $(l_1(x, y), l_1^*(x, y))$ — пара рядов, осуществляющая формальное тождество (3).