$$+\int_{S_{23}} \rho_{23}\vec{v}_{23}dS + \int_{L_{123}} \rho_{123}\vec{v}_{123}dL\Big) = \int_{V_1} \rho_1\vec{F}_1 dV + \int_{V_2} \rho_2\vec{F}_2 dV + \int_{V_3} \rho_2\vec{F}_3 dV +$$

$$+\int_{S_{12}} \rho_{12}\vec{F}_{12}dS + \int_{S_{13}} \rho_{13}\vec{F}_{13}dS + \int_{S_{23}} \rho_{23}\vec{F}_{23}dS + \int_{L_{123}} \rho_{123}\vec{F}_{123}dL +$$

$$+\int_{A_1} \vec{n}_1 \cdot \hat{\pi}_1 dA + \int_{A_2} \vec{n}_2 \cdot \hat{\pi}_2 dA + \int_{A_3} \vec{n}_3 \cdot \hat{\pi}_3 dA + \int_{L_{12}} \vec{N}_{12} \cdot \hat{\sigma}_{12} dL +$$

$$+\int_{L_{13}} \vec{N}_{13} \cdot \hat{\sigma}_{13} dL + \int_{L_{23}} \vec{N}_{23} \cdot \hat{\sigma}_{23} dL + \sigma^A_{123}\vec{s}^A + \sigma^B_{123}\vec{s}^B. \qquad (5)$$

Кроме введенных выше, здесь использованы обозначения: $\vec{N}_{ij}$ — внешняя нормаль к линии контакта, лежащая в соответствующей касательной плоскости; $\vec{s}$ — вектор, касательный к периметру смачивания; индексами A и B отмечены значения линейного натяжения σ_{123} [2] в соответствующих точках (см. рис. 2).

Стягивание материального объема к точке на линии L_{123} приводит к уравнению

$$\frac{d}{d\tau}(\rho_{123}\vec{v}_{123}) + \rho_{123}\vec{v}_{123}\vec{s} \cdot \frac{d\vec{v}_{123}}{ds} = \frac{d\sigma_{123}\vec{s}}{ds} + \rho_{123}\vec{F}_{123} - \vec{N}_{12} \cdot \hat{\sigma}_{12} -$$

$$-\vec{N}_{13} \cdot \hat{\sigma}_{13} - \vec{N}_{23} \cdot \hat{\sigma}_{23} + \rho_{12}\vec{v}_{12}(\vec{v}_{12} - \vec{v}_{123}) \cdot \vec{N}_{12} +$$

$$+\rho_{13}\vec{v}_{13}(\vec{v}_{13} - \vec{v}_{123}) \cdot \vec{N}_{13} + \rho_{23}\vec{v}_{23}(\vec{v}_{23} - \vec{v}_{123}) \cdot \vec{N}_{23}. \qquad (6)$$

При $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = \rho_{123} = 0$, $\sigma_{123} = 0$, $(\vec{v}_1 - \vec{v}_{12}) \cdot \vec{n}_1 = 0$, $(\vec{v}_2 - \vec{v}_{12}) \times \times \vec{n}_2 = 0$, $\hat{\sigma}_{12} = \sigma_{12}\hat{I}$, $\hat{\sigma}_{13} = \sigma_{13}\hat{I}$, $\hat{\sigma}_{23} = \sigma_{23}\hat{I}$ из уравнений (4), (6) следуют уравнения (1), (2).

Таким образом, можно сделать вывод, что обобщенные формулы Лапласа и Юнга являются двухмерным и одномерным вариантами одного уравнения, в чем легко убедиться, сравнив выражения (4), (6).

1. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Влияние тонких покрытий и промежуточных слоев на диффузионные процессы и на напряженное состояние в твердых телах.— Пробл. прочности, 1970, № 11, с. 37—40.
2. *Щербаков Л. М., Рязанцев П. П.* О влиянии энергии периметра смачивания на краевые условия.— В кн.: Исследования в области поверхностных сил.— М. : Наука, 1964, с. 26—28.
3. *Ghez R.* Equilibre méchanique et de forme de petits cristaux.— Helv. phys. acta, 1968, **41**, N 3, p. 287—309.
4. *Herring C.* Surface tension as a motivation for sintering.— In: The Physics of Powder Metallurgy. New York : McGraw-Hill, 1951, p. 143—179.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.08.80

УДК 539.374

О. Н. Шаблий, М. С. Михалишин, П. И. Данчак

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ТОНКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ НАПРЯЖЕНИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Вопросам построения физических зависимостей между обобщенными скоростями деформаций и обобщенными напряжениями для тонких пластин и оболочек, находящихся в условиях установившейся ползучести, получению основных разрешающих уравнений установившейся ползучести таких конструкций и их исследованию посвящено много работ [1—8, 10—12]. В этих работах, кроме [11], используется гипотеза Кирхгофа — Лява для распределения скоростей деформаций по толщине оболочки и пренебрегается влиянием на процесс деформирования нормальных напряжений, действующих на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, и сдвиговых касательных напряжений. Кроме того, при формулировке физических соотношений установившейся ползучести тонких оболочек используются различные предположения и допущения, позволяющие получить приближенные уравнения, например, техническая теория ползучести оболочек [1, 7], использование понятия «нейтральной» поверхности оболочек [10], рассмотрение чисто моментного напряженного состояния [2, 6] и др. [3, 5, 11, 12]. Поэтому представляется интересным получить дифференциальные уравнения установившейся ползучести пологих оболочек вращения в точной постановке для одного из законов ползучести, которые учитывали бы влияние напряжений поперечного сдвига на процесс деформирования, и сравнить с этим результатом решение аналогичных задач, построенных на основании получивших наибольшее распространение приближенных уравнений ползучести тонких оболочек [8].

Предположим [4, 7], что существует потенциал скоростей деформаций ползучести $\Phi(\sigma_{ij})$ такой, что

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{1}$$

причем функция $\Phi(\sigma_{ij})$ зависит от некоторой однородной функции напряжений первой степени $F^*(\sigma_{ij})$ и соотношение (1) запишется так:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial F^*}\frac{\partial F^*}{\partial \sigma_{ij}} = f(F^*)\frac{\partial F^*}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{2}$$

В работе [7] показано, что вид функции $f(F^*)$ легко определить из сравнения зависимостей (2) с найденной экспериментально зависимостью скорости деформации от напряжения для одноосного растяжения, если только функцию $F^*(\sigma_{ij})$ выбрать так, чтобы при одноосном растяжении ее величина становилась равной растягивающему напряжению. Поэтому отнесем тензор напряжений к главным осям и зададим функцию F^* для осесимметричного случая в виде

$$F = (F^*)^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \frac{3}{\alpha^2}\sigma_{13}^2, \tag{3}$$

где α — коэффициент, учитывающий анизотропию материала на поперечный сдвиг.

Подставляя выражение (3) в соотношения (2) и затем составляя из найденных скоростей деформаций выражение

$$\dot{\xi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_1\dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \frac{\alpha^2}{4}\dot{\varepsilon}_{13}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

находим

$$f(F^*) = \dot{\xi}. \tag{5}$$

Сравнивая полученное равенство со степенным законом ползучести при одноосном растяжении $\dot{\varepsilon} = B_1\sigma^n$, для функции $f(F^*)$ получаем выражение

$$f(F^*) = B_1(F^*)^n = \dot{\xi}, \tag{6}$$

и окончательно зависимости (1), (2) запишутся так:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}B_1F^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{7}$$

а потенциал скоростей деформаций ползучести примет вид

$$\Phi = \frac{mB_1^{-m}}{m+1}\dot{\xi}^{1+m} \quad (m = n^{-1}). \tag{8}$$

В работе [7] показано, что из справедливости соотношений (1) следуют обратные соотношения, т. е. легко показать, что существует потенциал напряжений $U(\dot{\varepsilon}_{ij})$ такой, что

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}, \tag{9}$$

причем функция $U(\dot{\varepsilon}_{ij})$ определяется зависимостью

$$U = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \Phi = D - \Phi = \frac{B_1^{-m}\dot{\xi}^{1+m}}{1+m}. \tag{10}$$

Нетрудно показать, что введенные таким образом функции $\Phi(\sigma_{ij})$ и $U(\dot{\varepsilon}_{ij})$ в точности совпадают с функциями дополнительного рассеяния Λ и рассеяния L [4, 7].

Одной из самых основных трудностей при изучении установившейся ползучести оболочек и пластин является формулировка потенциала обобщенных скоростей деформаций ползучести или соответствующих обобщенных напряжений.

Отнесем оболочку к системе координат X_1, X_2, Z, где X_1, X_2 — криволинейная ортогональная система координат, заданная на срединной поверхности оболочки, ее координатные линии совпадают с линиями кривизны, а ось Z направлена по нормали к срединной поверхности оболочки в направлении центров кривизны и имеют начало на срединной поверхности. Для распределения скоростей деформаций по толщине оболочки примем гипотезу типа Тимошенко

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_{i0} - Z\dot{\varkappa}_i, \quad \dot{\varepsilon}_{13} = \dot{\varepsilon}_{130}, \tag{11}$$

где $\dot{\varepsilon}_{i0}$, $\dot{\varkappa}_i$ $(i = 1, 2)$ — скорости деформаций и искривлений срединной поверхности оболочки; $\dot{\varepsilon}_{130}$ — скорость деформации поперечного сдвига.

Из справедливости соотношений (9) следует справедливость аналогичных зависимостей в пространственных обобщенных скоростей деформаций и обобщенных напряжений [7], а именно:

$$T_i = \frac{\partial U^*}{\partial \dot{\varepsilon}_{i0}}, \quad M_i = -\frac{\partial U^*}{\partial \dot{\varkappa}_i}, \quad Q = \frac{\partial U^*}{\partial \dot{\varepsilon}_{130}}. \tag{12}$$

Здесь T_i, M_i $(i = 1, 2)$, Q — усилия, моменты и перерезывающая сила, а функция U^* имеет вид

$$U^* = \int_{-h}^{h} U dZ. \tag{13}$$

Легко показать, что из формул (12) немедленно вытекают обратные соотношения, т. е.

$$\dot{\varepsilon}_{i0} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial T_i}, \quad \dot{\varkappa}_i = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial M_i}, \quad \dot{\varepsilon}_{130} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q}, \tag{14}$$

где

$$\Phi^* = \int_{-h}^{h} \Phi dZ. \tag{15}$$

Подставляя зависимости (11) в выражение (10) и затем произведя интегрирование по формуле (13), находим

$$U^* = \frac{B_1^{-m}}{m+1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} \int_{-h}^{h} P^{\frac{m+1}{2}} dZ. \tag{16}$$

Здесь введены обозначения:

$$P = \tilde{P}_L - 2Z\tilde{P}_{LK} + Z^2\tilde{P}_K; \quad \tilde{P}_L = \dot{\varepsilon}_{10}^2 + \dot{\varepsilon}_{10}\dot{\varepsilon}_{20} + \dot{\varepsilon}_{20}^2 + \frac{\alpha^2}{4}\dot{\varepsilon}_{130}^2; \tag{17}$$

$$P_{LK} = \dot{\varepsilon}_{10}\left(\dot{\varkappa}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varkappa}_2\right) + \dot{\varepsilon}_{20}\left(\dot{\varkappa}_2 + \frac{1}{2}\dot{\varkappa}_1\right); \quad P_K = \dot{\varkappa}_1^2 + \dot{\varkappa}_1\dot{\varkappa}_2 + \dot{\varkappa}_2^2. \tag{18}$$

Подстановка выражения (16) в формулы (12) дает возможность найти следующие определяющие уравнения установившейся ползучести оболочки:

$$T_i = \left(\dot{\varepsilon}_{i0} + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{j0}\right) I_1 - \left(\dot{\varkappa}_i + \frac{1}{2}\dot{\varkappa}_j\right) I_2; \quad Q = \frac{\alpha^2}{4}\dot{\varepsilon}_{130} I_1;$$

$$M_i = \left(\dot{\varepsilon}_{i0} + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{j0}\right) I_2 - \left(\dot{\varkappa}_i + \frac{1}{2}\dot{\varkappa}_j\right) I_0 \quad (i, j = 1, 2; \ i \neq j), \tag{19}$$

где

$$I_\nu = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} B_1^{-m} \int_{-h}^{h} P^{\frac{m-1}{2}} Z^{\nu-1} dZ, \quad \nu = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Отметим, что такие уравнения можно получить с помощью формул (9), (10), (11) и последующего интегрирования по толщине оболочки.

В качестве примера рассмотрим находящуюся под осесимметричной нагрузкой пологую кольцевую оболочку вращения переменной толщины $2h = 2h_0\varphi(r)$ ($\varphi(0) = 1$). Введем следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{r}{R_2}, \quad z = \frac{Z}{h}, \quad \lambda = \frac{\psi}{h_0}, \quad \dot{w} = \frac{\dot{W}}{h_0}, \quad \dot{u} = \frac{\dot{U}}{R_2}, \quad \dot{\gamma}_1 = \frac{R_2}{h_0}\dot{\gamma},$$

$$\beta = \frac{h_0}{R_2}, \quad b = \frac{R_1}{R_2}, \quad \dot{k}_i = h_0\dot{\varkappa}_i, \quad q_x = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-(m+2)} QB_1^m/(\alpha h_0\varphi(x)),$$

$$t_i = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-(m+1)} T_i B_1^m/(2h_0\varphi(x)); \tag{21}$$

$$m_i = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-(m+1)} M_i B_1^m/(h_0^2\varphi^2(x)), \quad p = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-(m+1)} q_* R_2^2 B_1^m/(6h_0^2),$$

$$q_* = 2\alpha x q_x/(\sqrt{3}\,\beta), \quad t_* = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-(m+1)} R_2 T_* B_1^m/(2h_0),$$

где r — радиальная координата; R_1, R_2— радиусы внутреннего и наружного контуров оболочки; $\psi(r)$ — уравнение срединной поверхности оболочки; $\dot{U}$, $\dot{W}$, $\dot{\gamma}$ — скорости перемещений точек срединной поверхности в продольном и поперечном направлениях и скорость изменения угла поворота волокна, первоначально перпендикулярного срединной поверхности; q, T_* — интенсивности равномерно распределенной поперечной и продольной нагрузки.

Полная система уравнений задачи в обозначениях (21) запишется так:

$$\frac{d}{dx}[x\varphi(x)t_1] - \varphi(x)t_2 = -xt_*, \quad \frac{d}{dx}[\varphi(x)q_*] = 6px, \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx}[x\varphi(x)m_1] - \varphi(x)m_2 + 2x\frac{d\lambda}{dx}t_1 + q_* = 0,$$

$$\dot{\varepsilon}_{10} = \frac{d\dot{u}}{dx} - \beta^2\frac{d^2\lambda}{dx^2}\dot{w}, \quad \dot{\varepsilon}_{20} = \frac{\dot{u}}{x} - \beta^2\frac{d\lambda}{dx}\frac{\dot{w}}{x}, \tag{23}$$

$$\dot{k}_1 = \beta^2\frac{d\dot{\gamma}_1}{dx}, \quad \dot{k}_2 = \beta^2\frac{\dot{\gamma}_1}{x}, \quad \dot{\varepsilon}_{130} = \beta\left(\dot{\gamma}_1 - \frac{d\dot{w}}{dx}\right),$$

$$t_i = \frac{1}{2}\left[\left(\dot{\varepsilon}_{i0} + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{j0}\right)J_1(x) - \left(\dot{k}_i + \frac{1}{2}\dot{k}_j\right)\varphi(x)J_2(x)\right],$$

$$m_i = \left(\dot{\varepsilon}_{i0} + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{j0}\right)J_2(x) - \left(\dot{k}_i + \frac{1}{2}\dot{k}_j\right)\varphi(x)J_3(x) \quad (i, j = 1, 2; \ i \neq j), \tag{24}$$

$$q_* = \frac{\alpha^2}{4\beta}x\dot{\varepsilon}_{130}J_1(x),$$

где

$$J_\nu(x) = \int_{-1}^{1} P^{\frac{m-1}{2}} z dz \quad (\nu = 1, 2, 3); \tag{25}$$

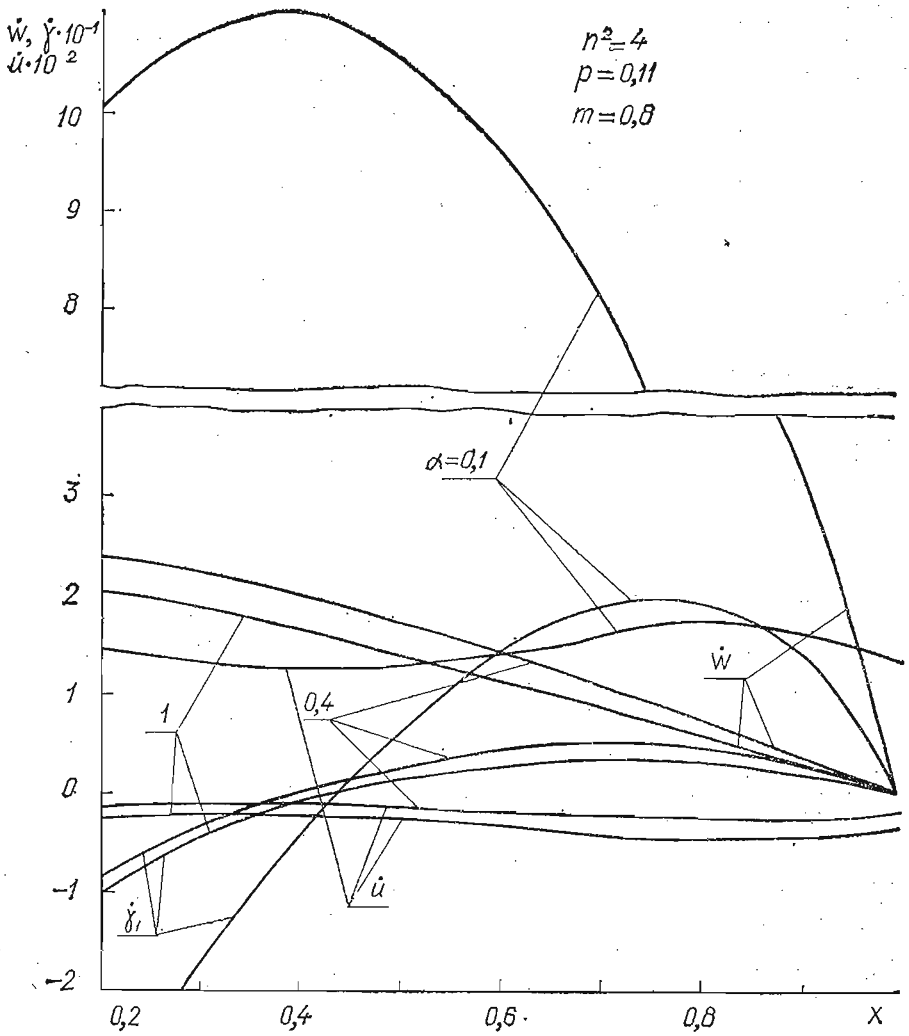


Рис. 1

$$P = P_L - 2z\varphi(x) P_{LK} + z^2\varphi^2(x) P_K; \quad P_L = \tilde{P}_L;$$

$$\tilde{P}_K = \dot{k}_1^2 + \dot{k}_1\dot{k}_2 + \dot{k}_2^2; \quad \tilde{P}_{LK} = \varepsilon_{10}\left(\dot{k}_1 + \frac{1}{2}\dot{k}_2\right) + \varepsilon_{20}\left(\dot{k}_2 + \frac{1}{2}\dot{k}_1\right).$$

Граничные условия задачи запишем в виде

при $x = b$

$$m_1 = m_b = M_b/\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^m B_1^{-m} h_0^2 \varphi^2(b)\right], \tag{26}$$

$$t_1 = t_b = T_b/\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} B_1^{-m} 2h_0\varphi(b)\right], \quad q_* = 2bp_b/(\beta\varphi(b));$$

при $x = 1$

$$m_1 = m_2 = M_r/\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} B_1^{-m} h_0^2 \varphi^2(1)\right]; \quad w = 0, \quad u = 0. \tag{27}$$

Здесь M_b, M_r — интенсивности равномерно распределенных моментов по внутреннему и наружному контурах; $p_b = P_b/\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right]^{m+1} B_1^{-m} 2h_0\right]$; P_b, T_b — интенсивности равномерно распределенных по внутреннему контуру поперечной и продольной нагрузок.

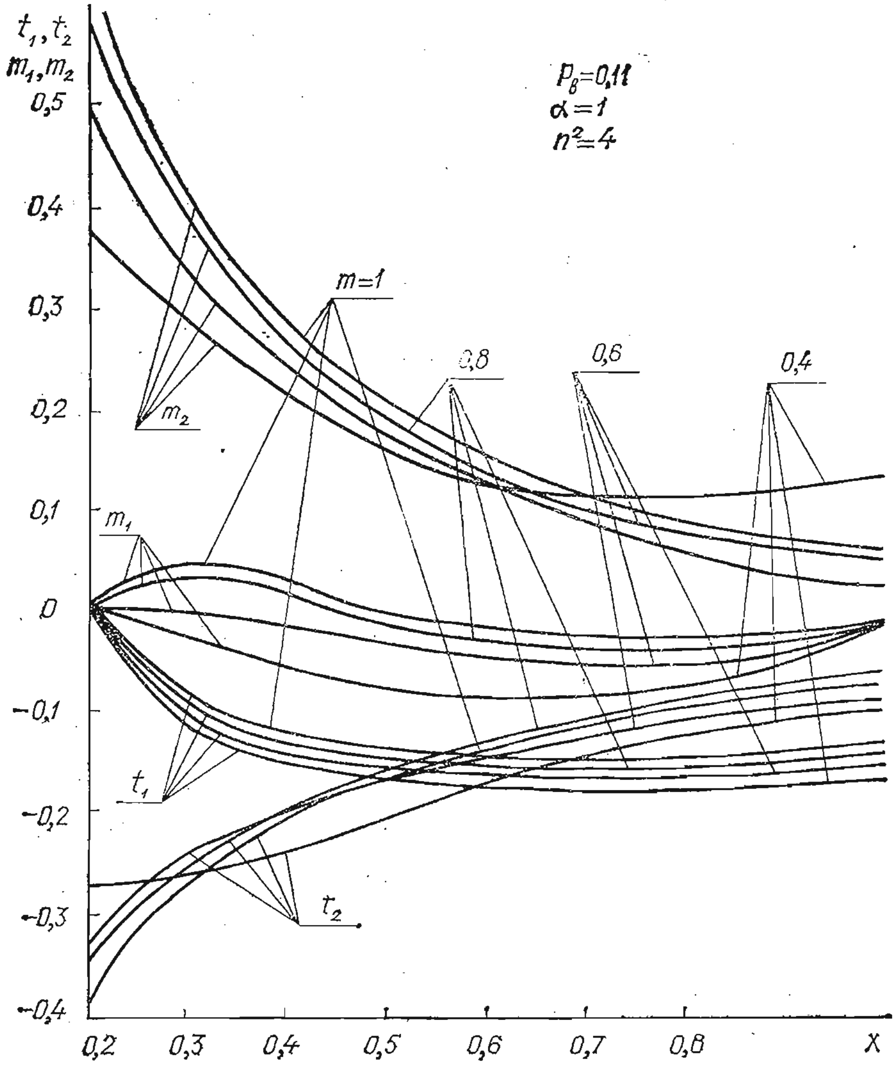


Рис. 2

В связи с тем, что в граничные условия задачи не входят t_2 и m_2, разрешающую систему уравнений после некоторых преобразований запишем так:

$$\frac{dt_1}{dx} = -\left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{2x}\right) t_1 - \frac{3\beta^2\lambda' J_1}{8x^2} w + \frac{3J_1}{8x^2} \dot{u} - \frac{3\beta^2\varphi(x) J_2}{8x^2} \dot{\gamma}_1 - \frac{t_*}{\varphi(x)},$$

$$\frac{dm_1}{dx} = -\frac{2\lambda' t_1}{\varphi(x)} - \left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{2x}\right) m_1 - \frac{3\beta^2\lambda' J_2}{4x^2} w + \frac{3J_2}{4x^2} u -$$

$$- \frac{3\beta^2\varphi(x)}{4x^2} J_3 \dot{\gamma}_1 - \frac{q_*}{x\varphi},$$

$$\frac{dq_*}{dx} = \frac{1}{\varphi}(6px - q_*\varphi'), \qquad \frac{dw}{dx} = \dot{\gamma}_1 - \frac{4q_*}{\alpha^2 x J_1}, \tag{28}$$

$$\frac{d\dot{u}}{dx} = -\frac{2J_3 t_1}{J_1} + \frac{J_2}{J_4} m_1 + \beta^2\left(\lambda'' + \frac{\lambda'}{2x}\right) w - \frac{\dot{u}}{2x},$$

$$\frac{d\dot{\gamma}_1}{dx} = -\frac{2J_2 t_1}{\beta^2\varphi(x) J_4(x)} + \frac{J_1 m_1}{\beta^2\varphi(x) J_4} - \frac{\dot{\gamma}_1}{2x},$$

$$t_2 = \frac{3}{8x}[(\dot{u} - \beta^2\lambda'\dot{w})J_1 - \beta^2\varphi(x)\dot{\gamma}_1 J_2] + \frac{t_1}{2}, \qquad (29)$$

$$m_2 = \frac{3}{4x}[(\dot{u} - \beta^2\lambda'\dot{w})J_2 - \beta^2\varphi(x)\dot{\gamma}_1 J_3] + \frac{m_1}{2},$$

где обозначено $J_4(x) = J_2^2(x) - J_1(x) J_3(x)$.

Нелинейная краевая задача (26) — (28) решалась методом последовательных приближений, подобным методу упругих решений в теории упруго-

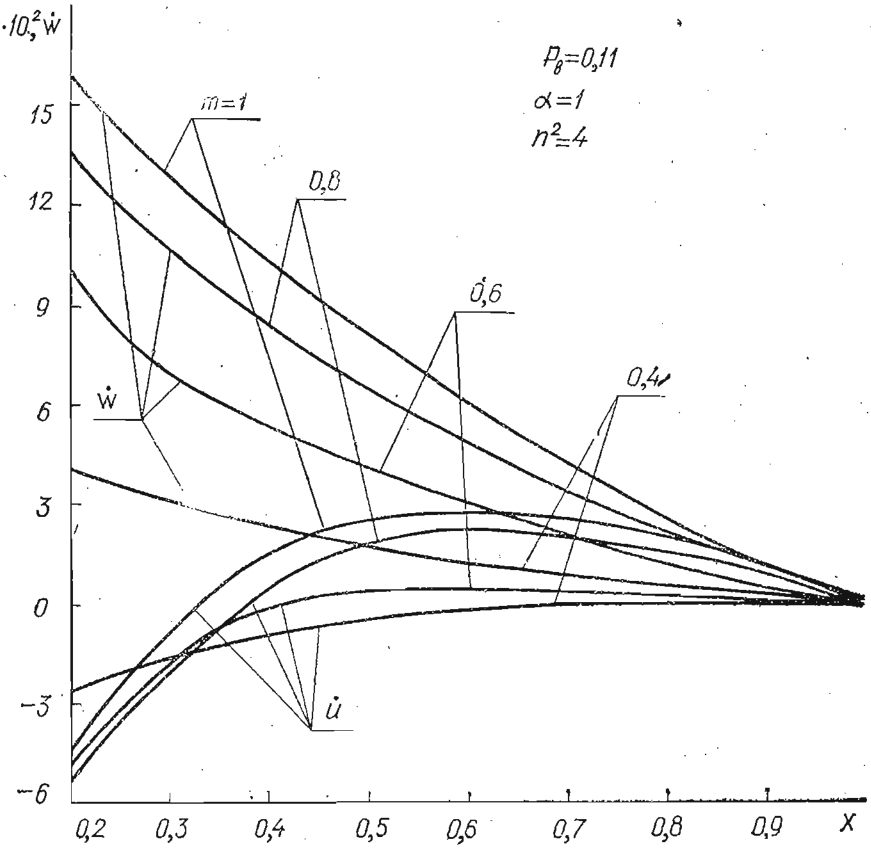


Рис. 3

пластичности. Начальное приближение строилось для $m = 1$. Численный анализ показал, что простые методы сведения линейной краевой задачи на каждом шаге к задачам Коши непригодны, так как получаются несовместные системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов связки. Поэтому в каждом приближении численное решение находилось методом инвариантного погружения [9], причем его применение в сочетании с методом последовательных приближений дало достаточно хорошую сходимость.

Расчеты проводились для пологой сферической оболочки ($\lambda = n^2x^2/4$, $n^2 = 2R_2^2/Rh_0$; R — радиус кривизны) постоянной толщины при $\beta = 0,1$ и $b = 0,2$. На рис. 1 показан характер изменения скоростей перемещений вдоль радиальной координаты для различных значений α. Из графиков видно, что понижение сопротивляемости материала на поперечный сдвиг сильно влияет на скорости перемещений. Так, при уменьшении коэффициента α от 1,0 до 0,4 скорость прогиба оболочки при $x = b$ увеличивается на 17%.

Изменение интенсивностей внутренних усилий, моментов и скоростей перемещений вдоль радиальной координаты для различных значений показателя ползучести показано на рис. 2, 3. Увеличение показателя ползучести n (уменьшение m) приводит к значительному перераспределению усилий и моментов и уменьшению скоростей перемещений.

На рис. 4, *а, б, в* приведено распределение напряжений σ_1, σ_2, σ_{13} соответственно по толщине оболочки для различных значений параметра анизотропии материала на поперечный сдвиг (α) при $x = 0{,}6$; $p = 0{,}11$; $n^2 = 4$. Сплошными линиями показан характер изменения напряжений при $m = 0{,}4$; штриховыми — при $m = 1$.

Нами решалась также аналогичная задача для случая, когда определяющие уравнения установившейся ползучести оболочки были найдены на основании рассуждений, аналогичных проведенным в работе [8] (см. также [11]). Сравнение результатов показало, что в некоторых случаях

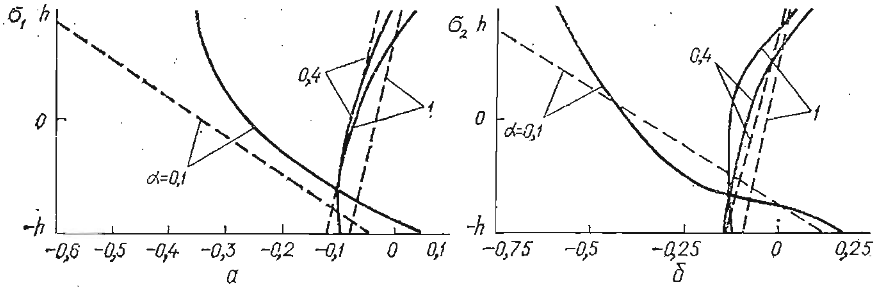
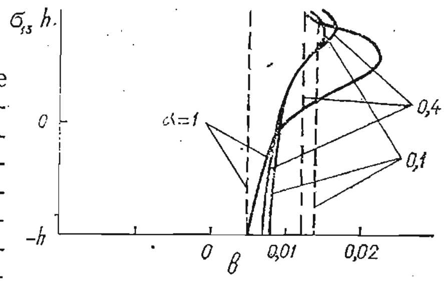


Рис. 4



нагружения приближенное решение намного отличается от точного, причем скорости перемещений в большинстве случаев оказываются ниже. Например, расхождение между скоростями перемещений на внутреннем контуре оболочки при $\alpha = 1$, $m = 0{,}4$ оказалось таким: 1) при действии внешней нагрузки $m_2 = \pm 0{,}5$ и $n^2 = 6$ для w — 30,8%; для u — 2,1%, для γ_1 — 54,3%; 2) при действии внешней нагрузки $t_b = \pm 0{,}1$ и $n^2 = 4$ для w — 20,1%, для u — 5,6%, для γ_1 — 36,6%; 3) при действии внешней нагрузки $p = 0{,}2$ и $n^2 = 4$ для w — 18,9%, для u — 29,1%, для γ_1 — 17,5%. Эти результаты показывают, что не всегда можно пользоваться приближенными уравнениями установившейся ползучести и для случаев, когда величина $\tilde{P}_{LK}$ в формулах (25) одного порядка с величинами $\tilde{P}_L$ и $\tilde{P}_K$, а показатель ползучести $n > 2$, необходимо проводить более тщательный анализ с использованием определяющих уравнений (24).

1. *Бурлаков А. В.* Основные уравнения технической теории ползучести тонких оболочек.— Динамика и прочность машин, 1971, вып. 13, с. 3—9.
2. *Бурлаков А. В.* К вопросу об основных уравнениях моментной теории ползучести пологих оболочек.— Динамика и прочность машин, 1965, вып. 1, с. 79—85.
3. *Иванов Г. В.* О соотношениях между скоростями деформаций и усилиями, моментами при установившейся ползучести пластин и оболочек.— Механика твердого тела, 1968, № 2, с. 159—165.
4. *Качанов Л. М.* Теория ползучести.— М. : Физматгиз, 1960.— 450 с.
5. *Малинин Н. Н.* Исследование установившейся ползучести круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин.— Расчеты на прочность, 1963, вып. 9, с. 173—195.
6. *Малинин Н. Н.* Установившаяся ползучесть круглых симметрично нагруженных пластин.— Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций, 1953, вып. 26, с. 221—238.
7. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций.— М. : Наука, 1966.— 750 с.
8. *Розенблюм В. И.* Приближенные уравнения ползучести тонкостенных оболочек.— Прикл. математика и механика, 1963, вып. 1, с. 154—159.
9. *Современные* численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холл и Дж. Уатт.— М. : Мир, 1979.— 312 с.

10. *Шаблий О. Н.* Об установившейся ползучести осесимметрично нагруженных круглых и кольцевых пластинок и пологих сферических оболочек.— Динамика и прочность машин, 1965, вып. 1, с. 99—106.
11. *Шаблий О. Н., Данчак П. И.* Установившаяся ползучесть оболочек вращения и круглых пластин с учетом напряжений сдвига.— Изв. вузов. Машиностроение, 1977, № 1, с. 18—23.
12. *Rabotnov Yu. N.* Viscoelasticity and creep in shell Structures.— Non-classical shell problems.— Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1964, p. 355—367.

Тернопольский филиал Львовского политехнического института

Поступила в редколлегию 09.01.81.

УДК 539.3

М. В Белубекян, К. Б. Казарян

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ

В последнее время токонесущие тонкие тела типа пластин и оболочек стали привлекать внимание многих исследователей в силу их широкого использования в различных областях современной техники [5, 8]. При прохождении электрического тока в твердом теле возникают механические напряжения, обусловленные взаимодействием тока с собственным магнитным полем, а также джоулевым нагревом. В работе [8] приведен подробный анализ существующих по настоящее время работ по устойчивости токонесущих стержней (проволок). В работе [4] показано, что взаимодействие электрического тока, протекающего по направлению образующих цилиндрической оболочки, с собственным полем приводит к потере упругой устойчивости оболочки. Вопросу потери термоупругой устойчивости токонесущей пластинки под действием температурных напряжений, обусловленных джоулевым теплом, была посвящена работа [3]. В работе [7] проведен эксперимент по определению критической комбинации силы тока и напряженности внешнего магнитного поля, при которой тонкая проводящая пластинка теряет устойчивость. В данной работе исследуется вопрос статической потери устойчивости упругой тонкой токонесущей пластинки-полосы. Явление потери устойчивости такой пластинки при относительно большом токе (сила тока $I_0 \sim 4000$ А) наблюдалось в лабораторных условиях [8].

Пусть по бесконечной проводящей пластинке-полосе толщины $2h$ и ширины $2a$ течет равномерно распределенный по поперечному сечению постоянный электрический ток плотностью j_0. Прямоугольная декартовая система координат выбрана так, что плоскость (x, y) совпадает со срединной плоскостью пластинки, а направление оси Ox совпадает с направлением электрического тока. В выбранной системе координат пластинка занимает область $|x| < \infty$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant h$. Принимается, что поверхности пластинки $z = \pm h$, $y = \pm a$ свободны от механических нагрузок. Джоулево тепло и индуцированные электромагнитные поля в пластинке не учитываются.

Собственное магнитное поле пластинки $\overline{H}_0$ определяется из решения краевой задачи магнитостатики и в области, занимаемой пластинкой, компоненты вектора напряженности магнитного поля имеют вид

$$H_{0x} = 0, \quad H_{0y} = \frac{2j_0}{c}\left[(h - z)\left(\operatorname{arctg}\frac{a+y}{h-z} + \operatorname{arctg}\frac{a-y}{h-z}\right) - \right.$$

$$- (h + z)\left(\operatorname{arctg}\frac{a+y}{h+z} + \operatorname{arctg}\frac{a-y}{h+z}\right) - \frac{a-y}{2}\ln\frac{(a-y)^2+(h+z)^2}{(a-y)^2+(h-z)^2} -$$

$$\left. - \frac{a+y}{2}\ln\frac{(a+y)^2+(h+z)^2}{(a+y)^2+(h-z)^2}\right], \quad H_{0z} = \frac{2j_0}{c}\left[(a+y)\left(\operatorname{arctg}\frac{h+z}{a+y} + \right.\right. \qquad (1)$$