

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДВУХТОЧЕЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В данной статье некоторые известные результаты применения теории инвариантного погружения к решению граничных задач для скалярных дифференциальных уравнений [1] обобщаются на случай двухточечной граничной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений общего вида с различной формой задания граничных условий. С этой целью на основе идей теории инвариантного погружения построен устойчивый одношаговый алгоритм решения граничных задач для системы линейных дифференциальных уравнений путем сведения их к эквивалентным задачам Коши, которые в вычислительном отношении выгодно отличаются от исходных. В качестве примера приведено решение осесимметричных краевых задач о напряженно-деформированном состоянии нодовидных и ундулоидных оболочек вращения.

Часто двухточечные одномерные граничные задачи теории упругости представляют в виде линейных систем дифференциальных уравнений, которые записываются в матрично-векторном виде:

$$\dot{W}(t) = A(t)W(t) + F(t), \quad (1)$$

$$BW(0) = \alpha, \quad DW(T) = \gamma. \quad (2)$$

Здесь W — неизвестный n -мерный вектор ($n = 2m, m = 1, 2, \dots$); A — матрица размерности $n \times n$; F — n -мерный вектор; $B \neq D$ — матрицы размерности $m \times n$; α, γ — m -мерные векторы; точкой обозначено дифференцирование по t .

Заметим, что двухточечная система задания условий усложняет численное решение задачи (1) — (2), поскольку в каждой из этих точек в отдельности не содержится достаточной информации для полного определения вектора $W(t)$. С вычислительной точки зрения это соответствует ситуации, когда непосредственное применение различных схем численного интегрирования, таких, как методы Рунге — Кутты, Адамса — Мултона и т. д., невозможно из-за отсутствия в начальной точке информации, необходимой для «запуска» алгоритма.

Построим одношаговый алгоритм решения двухточечной краевой задачи (1) — (2) путем сведения ее к задаче Коши с помощью метода инвариантного погружения. В качестве параметра погружения примем длину интервала T . Учитывая, что решение задачи (1) зависит от T , перепишем систему (1) — (2) следующим образом:

$$\dot{W}(t, T) = A(t)W(t, T) + F(t), \quad (1')$$

$$BW(0, T) = \alpha, \quad DW(T, T) = \gamma. \quad (2')$$

Рассмотрим, как изменяется решение задачи $W(t, T)$ в фиксированной точке t ($0 \leq t \leq T$) при изменении длины интервала T . Дифференцируя уравнения (1') — (2') по T , получаем

$$W_T(t, T) = A(t)W_T(t, T), \quad (3)$$

$$BW_T(0, T) = 0, \quad DW_T(T, T) = -DW(T, T). \quad (4)$$

По принципу суперпозиции для линейных систем решение задачи (3) — (4) можно представить в виде

$$W_T(t, T) = \sum_{k=1}^m W_T^k(t, T), \quad (5)$$

где $W_T^k(t, T)$ — соответственно решения задач

$$\dot{W}_T^k(t, T) = A(t) W_T^k(t, T), \quad (6)$$

$$B W_T^k(0, T) = 0, \quad D W_T^k(T, T) = -\delta_{ik} \sum_{j=1}^n d_{kj} \dot{W}_j(T, T); \quad (7)$$

d_{kj} — элементы матрицы D ; δ_{ik} — символ Кронекера; $\dot{W}_j(T, T)$ — компоненты вектора $\dot{W}(T, T)$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$.

Для построения решения задачи (6) — (7) рассмотрим вспомогательную двухточечную граничную задачу

$$\dot{Z}^i(t, T) = A(t) Z^i(t, T), \quad (8)$$

$$B Z^i(0, T) = 0, \quad D Z^i(T, T) = I_i, \quad (9)$$

где $Z^i(t, T)$ — n -мерный неизвестный вектор; I_i — m -мерный вектор, все компоненты которого равны нулю, за исключением i -й компоненты, равной единице. Теперь на основании линейности задач (6) — (7) и (8) — (9) можно записать

$$W_T^k(t, T) = -\left\{ \sum_{j=1}^n d_{kj} \dot{W}_j(T, T) \right\} Z^k(t, T). \quad (10)$$

Дифференцируя уравнения (8) и (9) по T , получаем

$$\dot{Z}_T^i(t, T) = A(t) Z_T^i(t, T), \quad (11)$$

$$B Z_T^i(0, T) = 0, \quad D Z_T^i(T, T) = -D Z^i(T, T), \quad i = \overline{1, m}. \quad (12)$$

Решение задачи (11) — (12) запишем в виде

$$Z_T^i(t, T) = \sum_{k=1}^m v_i^k(t, T), \quad i = \overline{1, m}, \quad (13)$$

где $v_i^k(t, T)$ — соответственно решения задач

$$\dot{v}_i^k(t, T) = A(t) v_i^k(t, T), \quad (14)$$

$$B v_i^k(0, T) = 0, \quad D v_i^k(T, T) = -\delta_{ik} \sum_{s=1}^n d_{ks} \dot{Z}_s^i(T, T), \quad i = \overline{1, m}. \quad (15)$$

Аналогично соотношению (10) получаем

$$v_i^k(t, T) = -\left\{ \sum_{j=1}^n d_{kj} Z_j^i(T, T) \right\} Z^k(t, T). \quad (16)$$

Подставляя выражения (10), (16) в (5) и (13) соответственно, находим

$$W_T^k(t, T) = -\sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n d_{kj} \dot{W}_j(T, T) \right\} Z^k(t, T), \quad (17)$$

$$Z_T^i(t, T) = -\sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n d_{kj} Z_j^i(T, T) \right\} Z^k(t, T).$$

В уравнения (17) входят неизвестные функции $W_j(T, T)$ и $Z_j(T, T)$ ($j = \overline{1, n}$). Для их определения необходимо записать дополнительные уравнения. Для этого рассмотрим соотношения (1') и (8) при $t = T$. Получим

$$\dot{W}(T, T) = A(T) W(T, T) + F(T), \quad \dot{Z}^i(T, T) = A(T) Z^i(T, T). \quad (18)$$

Введем новые функции

$$r(T) = W(T, T), \quad m^i(T) = Z^i(T, T), \quad i = \overline{1, m}. \quad (19)$$

Дифференцируя их по T , а также учитывая равенства (18), для определения функций $r(T)$, $m^i(T)$, а значит, и $W(T, T)$, $Z^i(T, T)$ получаем урав-

нения

$$r'(T) = A(T)r(T) + F(T) - \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n d_{kj} \dot{W}_j(T, T) \right\} m^k(T),$$

$$m^i(T) = A(T)m^i(T) - \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n d_{kj} \dot{Z}_j^i(T, T) \right\} m^k(T),$$
(20)

где

$$\dot{W}_j(T, T) = A(T)r(T) + F(T); \quad \dot{Z}^i(T, T) = A(T)m^i(T). \quad (21)$$

Таким образом, двухточечная краевая задача (1) — (2) приведена к задачам Коши (20), (17) для векторов $W(t, T)$, $Z^i(t, T)$, $r(T)$, $m^i(T)$ с начальными условиями

$$Br(0) = \alpha, \quad Bm^i(0) = 0, \quad Dr(0) = \gamma, \quad Dm^i(0) = I_i \quad (22)$$

для системы (20) и

$$W(t, t) = r(t), \quad Z^i(t, t) = m^i(t), \quad i = \overline{1, m} \quad (23)$$

для системы (17). Очевидно, что условием разрешимости, гарантирующим существование единственности решения задачи, является отличие от нуля определителя системы (22).

Вычислительный процесс решения задач Коши (20) — (22) и (17) — (23) состоит в следующем. Предположим, что необходимо получить решение задачи для множества точек $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$, где T — длина интервала интегрирования. В начале интегрируется система уравнений первого порядка (20) для $r(T)$, $m^i(T)$ от $T = 0$ до $T = t_1$, затем система (17) для функций $W(t_0, T)$, $Z^i(t_0, T)$ с начальными условиями (23) при $t_0 = 0$, а далее система (20) от $T = t_1$ до $T = t_2$, где добавляется система (17) для функций $W(t_1, T)$, $Z^i(t_1, T)$, и т. д.

В отличие от классического подхода решение задачи осуществляется в один прямой ход. Кроме того, имеется возможность определения решения задачи в отдельных точках интервала $0 \leq t \leq T$, так как при решении одних и тех же уравнений (17) на каждом последующем этапе нет необходимости запоминать решения системы (20) на предыдущем, что также не требует увеличения необходимой памяти ЭВМ. В процессе интегрирования (20), (17) можно получить решение задачи для всех длин интервалов, меньших T , что дает возможность провести анализ параметрической задачи.

Разработанный алгоритм решения линейной краевой задачи методом инвариантного погружения реализован в виде программы на языке ФОРТРАН. Она состоит из стандартных и нестандартных блоков. К стандартным относятся формирование правых частей систем (20), (17); управление вычислительным процессом решения задач Коши; само численное решение задач Коши (задачи Коши решаются с помощью процедуры Адамса — Мулттона для систем, а для получения требуемых начальных «разгонных» значений применяется метод Рунге — Кутты). Нестандартную часть составляют подпрограммы вычисления элементов матрицы $A(t)$, компонентов вектора $F(t)$, а также блоки, в которых задаются или вычисляются матрицы B , D и компоненты векторов α , γ . Для проверки разработанного алгоритма и составленной программы решалась краевая задача о равновесии однородного упругого стержня. Результаты вычислений точно совпали с решением, приведенным в работе [1]. По той же программе и разработанному алгоритму были решены следующие краевые задачи.

Пример 1. Рассмотрим деформированное состояние нодоидной изотропной оболочки под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки. Один край оболочки свободен, второй жестко защемлен (рис. 1). Задача сводится к решению одномерной краевой задачи для системы вось-

и дифференциальных уравнений [4]

$$\frac{d\bar{N}(s)}{ds} = A(s)\bar{N}(s) + \bar{F}(s), \quad (24)$$

где \bar{N} — неизвестный вектор; $\bar{N} = \{N_x, N_z, \hat{S}, M_s, U_x, U_z, v, \vartheta_s\}$; $A(s)$ — заданная квадратная матрица порядка $n = 8$; $\bar{F}(s)$ — заданный вектор. Граничные условия задаются в виде

$$N_x = N_z = \hat{S} = M_s = 0 \text{ при } s = s_0,$$

$$U_x = U_z = v = \vartheta_s = 0 \text{ при } s = s_N.$$

Компоненты вектора $\bar{N}(s)$ означают: N_z и N_x — осевое и радиальное усилия; \hat{S} — приведенное усилие; M_s — меридиональный изгибающий момент; U_z и U_x — осевое и радиальное перемещения; v — окружное перемещение; ϑ_s — угол поворота.

Уравнение дуги меридиана ундулоидной оболочки представляется в виде [3]

$$x = r_1 \sqrt{1 - (k^1)^2 \sin^2 \tilde{\varphi}};$$

$$y = (2\lambda - r_1) F(k^1, \tilde{\varphi}) + r_1 E(k^1, \tilde{\varphi});$$

$$r = \left\{ (2\lambda^2 + c) - 2\lambda \sqrt{\lambda^2 + c} \sin \left[\arcsin \left(\frac{-r_0 + (2\lambda^2 + c)}{2\lambda \sqrt{\lambda^2 + c}} \right) - \frac{s - s_0}{\lambda} \right] \right\}^{1/2},$$

где $k = (2\lambda - r_1)$ — модуль эллиптического интеграла; $k^1 = \sqrt{1 - k^2}$; $F(k^1, \tilde{\varphi})$, $E(k^1, \tilde{\varphi})$ — эллиптические интегралы I и II рода; s — длина образующей; $\tilde{\varphi} = \arcsin(\sqrt{r_1^2 - y^2/k^1 r_1})$ — текущая координата; λ — параметр,

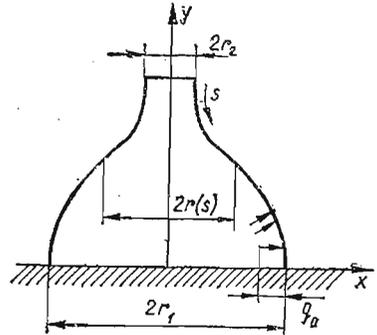


Рис. 1

Таблица 1

s	N_x	N_z	M_s	u_x	u_z	ϑ_s
0,0	0,0	0,0	0,0	0,2547 · 10 ¹	-0,2103 · 10 ¹	-0,5981
1,0420	0,5479 · 10 ⁻²	0,1677 · 10 ⁻¹	-0,5623 · 10 ⁻³	0,3428 · 10 ¹	-0,2523 · 10 ¹	-0,1612 · 10 ¹
3,1416	0,7889 · 10 ⁻¹	0,9956 · 10 ⁻¹	-0,2844 · 10 ⁻³	0,8913 · 10 ¹	-0,06520 · 10 ¹	-0,4486 · 10 ¹
5,2360	0,1668	0,1864	0,1498 · 10 ⁻³	0,1638 · 10 ²	-0,1244 · 10 ²	-0,4173 · 10 ¹
7,3304	0,2148	0,2647	0,1887 · 10 ⁻³	0,2268 · 10 ²	-0,1595 · 10 ²	-0,2597 · 10 ¹
9,4248	0,2218	0,3328	0,1179 · 10 ⁻³	0,2735 · 10 ²	-0,1652 · 10 ²	-0,1433 · 10 ¹
11,5192	0,1986	0,3893	0,6973 · 10 ⁻⁴	0,3077 · 10 ²	-0,1510 · 10 ²	-0,7684
12,5664	0,1788	0,4129	0,4933 · 10 ⁻⁴	0,3209 · 10 ²	-0,1389 · 10 ²	-0,5517
15,7080	0,9978 · 10 ⁻¹	0,4629	0,7788 · 10 ⁻³	0,3631 · 10 ²	-0,9374 · 10 ¹	-0,6646
18,8496	-0,5115 · 10 ⁻¹	0,4800	-0,2436 · 10 ⁻¹	0,0	0,0	0,0

характеризующий кривую ($0 < \lambda < r_1$); r_1 — радиус цилиндрической части. Рассматриваемая оболочка вращения имеет максимальный объем при минимальной величине площади поверхности при наличии малого отверстия радиуса r_2 по оси оболочки и применяется при конструировании переходных баллонов. Вычисления проводились для следующих данных: $s_0 = 0$; $s_N = 18,849579$; $r_2 = 2$; $r_1 = 10$; $\lambda = 6$; $v = 0,3$; $h = 0,15$; $q_0 = 0,1$; $E = 1$. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Пример 2. Рассмотрим напряженное состояние ундулоидной оболочки ($s_0 = 0$; $s_N = 12,56636$; $r_2 = 2$, $r_1 = 10$; $\lambda = 4$; $v = 0,3$; $h = 0,15$; $E = 1$), находящейся в температурном поле

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 s^2 / r_1^2, \quad (25)$$

s	θ , град	σ_s^+	σ_ϕ^+	σ_s^-	σ_ϕ^-
0,0	200	$-0,8000 \cdot 10^{-2}$	$-0,1359 \cdot 10^{-1}$	$-0,8000 \cdot 10^{-2}$	$-0,1359 \cdot 10^{-1}$
0,8975971	201,128	$-0,8119 \cdot 10^{-2}$	$-0,1369 \cdot 10^{-1}$	$-0,7968 \cdot 10^{-2}$	$-0,1369 \cdot 10^{-1}$
1,79519	204,512	$-0,8232 \cdot 10^{-2}$	$-0,1411 \cdot 10^{-1}$	$-0,8149 \cdot 10^{-2}$	$-0,1406 \cdot 10^{-1}$
2,692791	210,152	$-0,8257 \cdot 10^{-2}$	$-0,1443 \cdot 10^{-1}$	$-0,8617 \cdot 10^{-2}$	$-0,1442 \cdot 10^{-1}$
3,590389	218,047	$-0,8533 \cdot 10^{-2}$	$-0,1471 \cdot 10^{-1}$	$-0,8969 \cdot 10^{-2}$	$-0,1478 \cdot 10^{-1}$
4,487986	228,199	$-0,9063 \cdot 10^{-2}$	$-0,1531 \cdot 10^{-1}$	$-0,9219 \cdot 10^{-2}$	$-0,1540 \cdot 10^{-1}$
5,385583	240,606	$-0,9635 \cdot 10^{-2}$	$-0,1621 \cdot 10^{-1}$	$-0,9618 \cdot 10^{-2}$	$-0,1629 \cdot 10^{-1}$
6,28318	255,270	$-0,1021 \cdot 10^{-1}$	$-0,1728 \cdot 10^{-1}$	$-0,1021 \cdot 10^{-1}$	$-0,1735 \cdot 10^{-1}$
7,180777	272,189	$-0,1082 \cdot 10^{-1}$	$-0,1849 \cdot 10^{-1}$	$-0,1095 \cdot 10^{-1}$	$-0,1854 \cdot 10^{-1}$
8,078374	291,364	$-0,1153 \cdot 10^{-1}$	$-0,1992 \cdot 10^{-1}$	$-0,1178 \cdot 10^{-1}$	$-0,1997 \cdot 10^{-1}$
8,975971	312,795	$-0,1254 \cdot 10^{-1}$	$-0,2164 \cdot 10^{-1}$	$-0,1249 \cdot 10^{-1}$	$-0,2169 \cdot 10^{-1}$
9,873569	336,482	$-0,1423 \cdot 10^{-1}$	$-0,2333 \cdot 10^{-1}$	$-0,1272 \cdot 10^{-1}$	$-0,2334 \cdot 10^{-1}$
10,77117	362,425	$-0,1651 \cdot 10^{-1}$	$-0,2361 \cdot 10^{-1}$	$-0,1249 \cdot 10^{-1}$	$-0,2356 \cdot 10^{-1}$
11,66876	390,624	$-0,1668 \cdot 10^{-1}$	$-0,2044 \cdot 10^{-1}$	$-0,1453 \cdot 10^{-1}$	$-0,2037 \cdot 10^{-1}$
12,56636	421,079	$-0,6896 \cdot 10^{-2}$	$-0,1684 \cdot 10^{-1}$	$-0,2679 \cdot 10^{-1}$	$-0,1684 \cdot 10^{-1}$

которое вызывает тепловые деформации [2]

$$\varepsilon_T = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 s^2 / r_1^2, \quad \kappa_T = 0, \quad \varepsilon_0 = \alpha_t \theta_0, \quad \varepsilon_1 = \alpha_t \theta_1,$$

где α_t — коэффициент линейного расширения. Результаты вычислений приведены в табл. 2, а графики распределения напряжений σ_s и σ_ϕ на внешней поверхности ундулоидной оболочки при $\alpha_t = 14 \cdot 10^{-6}$ 1/град, $\theta_0 = 200^\circ$, $\theta_1 = 140^\circ$ — на рис. 2.

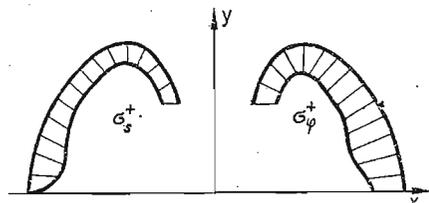


Рис. 2

Проведенные расчеты показали достаточно хорошую сходимость и устойчивость разработанного алгоритма, что свидетельствует об эффективности применения метода инвариантного погружения для практических целей,

в частности для расчета сложного вида оболочек вращения. Очевидно, что построенный алгоритм можно применять также к решению других одномерных осесимметричных задач теории упругости.

1. Касты Д., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. — М. : Мир, 1976. — 223 с.
2. Коваленко А. Д. Термоупругость. — Киев : Вища школа, 1975. — 216 с.
3. Черевачкий В. Б., Григорьев А. М. К исследованию нодоидных и ундулоидных оболочек. — Исслед. по теории пластин и оболочек, 1970, вып. 6/7, с. 251—275.
4. Численное решение задач статики ортотропных оболочек с переменными параметрами / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Е. И. Беспалова и др. — Киев : Наук. думка, 1975. — 183 с.