$$\Delta_2 t_k - \frac{1}{a}\frac{\partial t_k}{\partial \tau} = \left(\frac{\pi k}{h}\right)^2 t_k - \frac{Q_k}{\lambda} \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$\frac{\partial t_k}{\partial n} + H_0 (t_k - t_k^{(\Gamma_0)})|_{(\Gamma_0)} = 0 \quad (k = \overline{0, n}).$$

При полиномиальном представлении распределения температуры по толщине оболочки

$$t(\alpha, \beta, \gamma, \tau) = t_k(\alpha, \beta, \tau)\gamma^k$$

в соотношениях (12), (13) коэффициенты A_{km}, B_{km}, C_{km} определяются формулами

$$A_{km} = \frac{[1-(-1)^{k+m+1}]\,h^{k+m+1}}{k+m+1}, \quad C_{km} = H_0[1+(-1)^{k+m}]\,h^{k+m},$$

$$B_{0m} = B_{k0} = 0, \quad B_{km} = \frac{[1-(-1)^{k+m-1}]\,h^{k+m-1}}{k+m-1} \quad (k, m = \overline{1, n}).$$

При $n = 1$ (линейный закон распределения температуры по толщине) система (12), (13) совпадает с аналогичной, приведенной в работе [2].

1. *Айнола Л. Я.* Вариационные принципы для нестационарных задач теплопроводности.— Инж.-физ. журн., 1967, 12, № 4, с. 465—468.
2. *Ананьев Н. И., Няшин Ю. И., Скороходов А. Н.* Вариационный метод расчета нестационарного температурного поля.— Инж.-физ. журн., 1974, 26, № 3, с. 470—476.
3. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена.— М. : Энергия, 1975.— 208 с.
4. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла.— Прикл. математика и механика, 1960, 24, № 2, с. 361—363.
5. *Даниловская В. И.* Приближенное решение задачи о нестационарном тепловом температурном поле в тонкой оболочке произвольной формы.— Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 9, с. 157—158.
6. *Мотовиловець І. О.* Про виведення рівнянь теплопровідності пластин.— Прикл. механіка, 1960, 6, вип. 3, с. 346—350.
7. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках.— К. : Вид-во АН УРСР, 1961.— 212 с.
8. *Подстригач Я. С.* О применении операторного метода к выходу основных соотношений теории теплопроводности тонкостенных элементов и составных конструкций.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1965, вып. 5, с. 24—35.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 26.01.81

УДК 532.72 : 539.3

Ю. Д. Зозуляк

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ТВЕРДОГО РАСТВОРА

На основе представлений двухконтинуумной модели твердого раствора получено обобщенное уравнение диффузии, в котором учтены силы инерции примесных частиц.

Рассмотрим твердый раствор, состоящий из первой (основной) и второй (примеси) компонент (фаз), которые моделируются двумя взаимопроникающими континуумами. Принимается, что напряженное состояние внутри второй фазы определяется только шаровой частью тензора напряжений, характеризуемой давлением P_2. В дальнейшем все величины, относящиеся к основной фазе, будем обозначать индексом «1», к примеси — индексом «2», к центру масс раствора — без индексов.

Балансовые уравнения сохранения массы и импульса для каждой из компонент имеют вид [2]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$

$$\rho_1 \frac{d_1\vec{v}_1}{dt} = \operatorname{div}\hat{\sigma}_1 + \vec{F}_{12}, \tag{2}$$

$$\rho_2 \frac{d_2\vec{v}_2}{dt} = -\operatorname{qrad} P_2 - \vec{F}_{12}. \tag{3}$$

Здесь $\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}$; $\vec{F}_{12} = \beta\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ — сила трения; ρ_i, $\vec{v}_i$ — соответственно плотность и скорость i-й фазы; $\hat{\sigma}_1$ — тензор напряжений; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамильтона; β — коэффициент трения, зависящий от размеров, количества и формы частиц примеси, а также физических свойств фаз.

Запишем эквивалентную системе (1) — (3) систему уравнений сохранения массы и импульса для центра масс раствора и относительно центра масс:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0, \tag{4}$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{qrad} P_2 + \operatorname{div}\left(\hat{\sigma}_1 - \sum_{i=1}^{2} \rho_i \vec{w}_i \vec{w}_i\right) \tag{5}$$

для центра масс,

$$\rho \frac{dC}{dt} = -\operatorname{div}\vec{J}_2, \tag{6}$$

$$\frac{d\vec{J}_2}{dt} + 2\vec{J}_2 \operatorname{div}\vec{v} + (1 - C)\left[\operatorname{grad} P_2 + \vec{\nabla} \cdot (\vec{w}_2\vec{J}_2)\right] + C\operatorname{div}(\vec{\sigma}_1 - \vec{w}_1\vec{J}_1) +$$

$$+ \beta\left(\frac{1}{\rho_2}\vec{J}_2 - \frac{1}{\rho_1}\vec{J}_1\right) = 0 \tag{7}$$

относительно центра масс, где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}; \quad \vec{J}_i = \rho_i \vec{w}_i = \rho_i(\vec{v}_i - \vec{v});$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{2} \rho_i; \quad \rho\vec{v} = \sum_{i=1}^{2} \rho_i \vec{v}_i; \quad \sum_{i=1}^{2} \rho_i \vec{w}_i = 0; \quad C = \frac{\rho_2}{\rho}.$$

В дальнейшем принимается, что $\vec{v}_1 \simeq \vec{v}$, $|\vec{v}_2| \ll |\vec{v}|$, $C \ll 1$. При этом если ограничиться линейными составляющими в уравнении (7), то получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}_2 + \frac{\beta}{\rho_{20}}\vec{J}_2 + \operatorname{grad} P_2 = 0. \tag{8}$$

Здесь ρ_{20} — плотность примеси в начальном состоянии. В соотношении (8) первое слагаемое отражает влияние сил инерции примеси.

На основании линеаризованных уравнений (6), (8) имеем

$$\rho_{20} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial C}{\partial t} = C_0 \Delta P_2. \tag{9}$$

Для изотермических условий, принимая [1]

$$P_2 = P_{20} + K_2\left(\frac{C}{C_0} - 1\right),$$

из соотношения (9) получаем обобщенное уравнение диффузии

$$D\Delta C = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\rho_{20}}{\beta} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}. \tag{10}$$

Здесь $C_0 = \frac{\rho_{20}}{\rho_0}$; $D = \frac{K_2}{\beta}$ — коэффициент диффузии; K_2 — изотермический модуль сжатия; ρ_0, P_{20} — плотность и давление в начальном состоянии для раствора и примеси соответственно.

Отметим, что уравнение (10), учитывающее инерционность процесса диффузии в твердом растворе, аналогично обобщенному уравнению теплопроводности, учитывающему конечную скорость распространения тепла [3]. Такого же типа уравнение диффузии получено в работе [4] путем построения и минимизации соответствующего функционала.

1. *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах.— К. : Наук. думка, 1978.— 230 с.
2. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред.— М. : Наука, 1978.— 336 с.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика.— К. : Наук. думка, 1976.— 310 с.
4. *Müller I.* Thermodynamik von Mischungen als Modellfall der rationalen Thermodynamik.— Z. angew. Math. und Mech., 1977, 57, N 5, s. 36—42.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
04.01.81

УДК 536.12

А. Н. Кулик

НАГРЕВ ПЛАСТИНЫ С ТЕПЛООТДАЧЕЙ ДВИЖУЩИМСЯ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Первым шагом в исследовании сварочных деформаций и напряжений в пластине является определение температурного поля, возникающего при нагреве пластины сварочным источником тепла. При движении точечного источника тепла, моделирующего сварочный источник, по траектории, лежащей в плоскости параллельной боковым поверхностям пластины, обычные трудности, связанные с применением формулы обращения для преобразования Лапласа, могут быть легко преодолены.

Пусть в пластине толщиной $2l$, начальная температура которой равна нулю, в момент времени $\tau = 0$ включается и начинает движение в плоскости $z = z_0$ от точки $(0;\ 0;\ z_0)$ точечный источник тепла мощности $q(\tau)$. В момент времени $\tau = \tau_1$ источник прекращает движение и выключается. Для сокращения выкладок температуры сред, омывающих боковые поверхности $z = \pm l$ пластины, принимаем равными нулю. Если закон движения источника тепла

$$x(\tau) = \int_0^\tau v_x(\xi)\,d\xi,\quad y(\tau) = \int_0^\tau v_y(\xi)\,d\xi,\qquad z = z_0,$$

где $v_x(\tau)$, $v_y(\tau)$ — известные проекции вектора скорости источника на оси координат, то в предположении постоянства теплофизических характеристик материала пластины температурная функция должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\Delta t - \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{q(\tau)}{\lambda}\,\delta(x - x(\tau))\,\delta(y - y(\tau))\,\delta(z - z_0)\,[S_+(\tau) - S_+(\tau - \tau_1)] \qquad (1)$$

и краевым условиям

$$\left(\frac{\partial t}{\partial z} + h_1 t\right)_{z=+l} = 0,\quad \left(\frac{\partial t}{\partial z} - h_2 t\right)_{z=-l} = 0,$$

$$t|_{\tau=0} = 0,\quad t|_{\substack{|x|\to\infty \\ |y|\to\infty}} = 0,\quad \frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{|x|\to\infty} = 0,\quad \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{|y|\to\infty} = 0. \qquad (2)$$

Здесь a, λ — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности; α_1, α_2 — постоянные коэффициенты теплоотдачи с боковых поверхностей