Отметим, что уравнение (10), учитывающее инерционность процесса диффузии в твердом растворе, аналогично обобщенному уравнению теплопроводности, учитывающему конечную скорость распространения тепла [3]. Такого же типа уравнение диффузии получено в работе [4] путем построения и минимизации соответствующего функционала.

1. *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах.— К. : Наук. думка, 1978.— 230 с.
2. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред.— М. : Наука, 1978.— 336 с.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика.— К. : Наук. думка, 1976.— 310 с.
4. *Müller I.* Thermodynamik von Mischungen als Modellfall der rationalen Thermodynamik.— Z. angew. Math. und Mech., 1977, 57, N 5, s. 36—42.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 04.01.81

УДК 536.12

А. Н. Кулик

НАГРЕВ ПЛАСТИНЫ С ТЕПЛООТДАЧЕЙ ДВИЖУЩИМСЯ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Первым шагом в исследовании сварочных деформаций и напряжений в пластине является определение температурного поля, возникающего при нагреве пластины сварочным источником тепла. При движении точечного источника тепла, моделирующего сварочный источник, по траектории, лежащей в плоскости параллельной боковым поверхностям пластины, обычные трудности, связанные с применением формулы обращения для преобразования Лапласа, могут быть легко преодолены.

Пусть в пластине толщиной $2l$, начальная температура которой равна нулю, в момент времени $\tau = 0$ включается и начинает движение в плоскости $z = z_0$ от точки $(0;\ 0;\ z_0)$ точечный источник тепла мощности $q(\tau)$. В момент времени $\tau = \tau_1$ источник прекращает движение и выключается. Для сокращения выкладок температуры сред, омывающих боковые поверхности $z = \pm l$ пластины, принимаем равными нулю. Если закон движения источника тепла

$$x(\tau) = \int_0^\tau v_x(\xi)\,d\xi, \quad y(\tau) = \int_0^\tau v_y(\xi)\,d\xi, \quad z = z_0,$$

где $v_x(\tau)$, $v_y(\tau)$ — известные проекции вектора скорости источника на оси координат, то в предположении постоянства теплофизических характеристик материала пластины температурная функция должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\Delta t - \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{q(\tau)}{\lambda}\,\delta(x - x(\tau))\,\delta(y - y(\tau))\,\delta(z - z_0)\,[S_+(\tau) - S_+(\tau - \tau_1)] \tag{1}$$

и краевым условиям

$$\left(\frac{\partial t}{\partial z} + h_1 t\right)_{z=+l} = 0, \quad \left(\frac{\partial t}{\partial z} - h_2 t\right)_{z=-l} = 0,$$
$$t|_{\tau=0} = 0, \quad t|_{\substack{|x|\to\infty \\ |y|\to\infty}} = 0, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{|y|\to\infty} = 0. \tag{2}$$

Здесь a, λ — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности; α_1, α_2 — постоянные коэффициенты теплоотдачи с боковых поверхностей

$z = \pm l$ пластины;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad h_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda}; \quad h_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda}; \quad S_+(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leqslant 0. \end{cases}$$

Введем обозначение

$$f_1(\xi, \eta, s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} q(\tau)\, \delta(x - x(\tau))\, \delta(y - y(\tau))\, [S_+(\tau) - $$
$$- S_+(\tau - \tau_1)]\, e^{i(\xi x + \eta y) - s\tau} d\tau dx dy.$$

Применяя преобразование Лапласа по τ, экспоненциальные преобразования Фурье по x и y, вместо задачи (1), (2) получаем такую:

$$\frac{d^2 t^*}{dz^2} - \gamma^2 t^* = -\frac{1}{\lambda} f_1(\xi, \eta, s)\, \delta(z - z_0), \tag{3}$$

$$\left(\frac{dt^*}{dz} + h_1 t^*\right)_{z=+l} = 0, \quad \left(\frac{dt^*}{dz} - h_2 t^*\right)_{z=-l} = 0, \tag{4}$$

где

$$t^* = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} t e^{i(\xi x + \eta y) - s\tau} d\tau dx dy; \quad \gamma^2 = \xi^2 + \eta^2 + \frac{s}{a}.$$

Решением уравнения (3) будет

$$t^* = A \operatorname{ch} \gamma z + B \operatorname{sh} \gamma z + \frac{f_1(\xi, \eta, s)}{2\lambda\gamma} \exp(-\gamma |z - z_0|). \tag{5}$$

Постоянные A и B находим, удовлетворяя условиям (4). Найденные выражения для A и B подставим в (5) и после несложных преобразований приведем правую часть формулы (5) к виду

$$t^* = \frac{1}{2\lambda} f_1(\xi, \eta, s)\, f_2(\xi, \eta, z, s). \tag{6}$$

Здесь

$$f_2(\xi, \eta, z, s) = \frac{1}{\Delta^*} \left\{ \left[\operatorname{ch} \gamma (l + z) + \frac{h_2}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma (l + z) \right] (\gamma^2 - \gamma h_1) \times \right.$$
$$\times \exp(-\gamma |l - z_0|) + \left[\operatorname{ch} \gamma (l - z) + \frac{h_1}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma (l - z) \right] \times$$
$$\left. \times (\gamma^2 - \gamma h_2) \exp(-\gamma |l + z_0|) \right\} + \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma |z - z_0|); \tag{7}$$
$$\Delta^* = \gamma^2 \left[\gamma \operatorname{sh} 2\gamma l + (h_1 + h_2) \operatorname{ch} 2\gamma l + \frac{h_1 h_2}{\gamma} \operatorname{sh} 2\gamma l \right].$$

Положив в формулах (7) $h_1 = h_2 = 0$, из равенства (6) получим трансформанту температурной функции для пластины с теплоизолированными поверхностями:

$$t^* = \frac{1}{2\lambda} f_1(\xi, \eta, s) \left[\frac{\operatorname{ch} \gamma (l + z)}{\gamma \operatorname{sh} 2\gamma l} \exp(-\gamma |l - z_0|) + \right.$$
$$\left. + \frac{\operatorname{ch} \gamma (l - z)}{\gamma \operatorname{sh} 2\gamma l} \exp(-\gamma |l + z_0|) + \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma |z - z_0|) \right]. \tag{8}$$

Перенесем начало системы координат на поверхность $z = -l$ и положим $h_1 = 0$ или устремим h_1 к бесконечности. Затем, переходя в полученной из (6), (7) формуле к пределу при $2l \to \infty$, получаем трансформанту температурной функции для полупространства с теплоотдачей, нагреваемого движущимся точечным источником тепла:

$$t^* = \frac{1}{2\lambda} f_1(\xi, \eta, s) \left\{ \frac{\gamma - h_2}{\gamma(\gamma + h_2)} \exp[-\gamma (z' + z_0)] + \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma |z' - z_0|) \right\}. \tag{9}$$

Из формулы (6) находим

$$t = \frac{1}{4\pi\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_1(\xi, \eta, s) f_2(\xi, \eta, z,) \exp[s\tau - i(\xi x + \eta y)] \times$$

$$\times ds d\xi d\eta. \qquad (10)$$

Если $f_1(\xi, \eta, s)$ есть трансформанта функции $F_1(x, y, \tau)$, а $f_2(\xi, \eta, z, s)$ — трансформанта функции $F_2(x, y, z, \tau)$, то, используя теоремы о свертках для преобразования Фурье и Лапласа, вместо формулы (10) получаем

$$t = \frac{1}{4\pi\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\tau} F_1(x - x_0, y - y_0, \tau - \tau_0) F_2(x_0, y_0, z, \tau_0) d\tau_0 dx_0 dy_0. \qquad (11)$$

Для определения функции

$$F_2(x, y, z, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{-\infty} F_2^*(\xi, \eta, z, \tau) \exp[-i(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta \qquad (12)$$

сделаем в интеграле правой части формулы

$$F_2^*(\xi, \eta, z, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_2(\xi, \eta, z, s) e^{s\tau} ds \qquad (13)$$

замену переменной

$$\xi^2 + \eta^2 + \frac{s}{a} = \frac{p}{a}.$$

В результате будет

$$F_2^*(\xi, \eta, z, \tau) = \exp[-a\tau(\xi^2 + \eta^2)] f_2^*(z, \tau),$$

где

$$f_2^*(z, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma^*-i\infty}^{\sigma^*+i\infty} [\varphi_1(p, z)\varphi_2(p) + \psi_1(p, z)\psi_2(p) + \omega(p)] e^{p\tau} dp;$$

$$\varphi_1(p, z) = a\frac{\operatorname{ch}(l + z)\sqrt{\frac{p}{a}} + \frac{h_2\sqrt{a}}{\sqrt{p}}\operatorname{sh}(l + z)\sqrt{\frac{p}{a}}}{p\left[\sqrt{\frac{p}{a}}\operatorname{sh} 2l\sqrt{\frac{p}{a}} + (h_1 + h_2)\operatorname{ch} 2l\sqrt{\frac{p}{a}} + h_1 h_2\sqrt{\frac{a}{p}} \times \right.}$$
$$\left. \times \operatorname{sh} 2l\sqrt{\frac{p}{a}}\right];$$

$$\varphi_2(p) = \left(\frac{p}{a} - h_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\exp\left(-|l - z_0|\sqrt{\frac{p}{a}}\right);$$

$$\psi_1(p, z) = a\frac{\operatorname{ch}(l - z)\sqrt{\frac{p}{a}} + \frac{h_1\sqrt{a}}{\sqrt{p}}\operatorname{sh}(l - z)\sqrt{\frac{p}{a}}}{p\left[\sqrt{\frac{p}{a}}\operatorname{sh} 2l\sqrt{\frac{p}{a}} + (h_1 + h_2)\operatorname{ch} 2l\sqrt{\frac{p}{a}} + \right.}$$
$$\left. + h_1 h_2\sqrt{\frac{a}{p}}\operatorname{sh} 2l\sqrt{\frac{p}{a}}\right];$$

$$\psi_2(p) = \left(\frac{p}{a} - h_2\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\exp\left(-|l + z_0|\sqrt{\frac{p}{a}}\right);$$

$$\omega(p) = \sqrt{\frac{a}{p}}\exp\left(-|z - z_0|\sqrt{\frac{p}{a}}\right).$$

Подставляя найденное значение $F_2^*(\xi, \eta, z, \tau)$ в выражение (12) и выполняя интегрирование, получаем

$$F_2(x, y, z, \tau) = \frac{1}{2a\tau} \exp\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{4a\tau}\right)\right] f_2^*(z, \tau).$$

Внося $F_1(x, y, \tau)$ и $F_2(x, y, z, \tau)$ в соотношение (11) и используя свойства дельта-функции, получаем искомую температурную функцию для пластины с теплоотдачей:

$$t = \frac{1}{8\pi\lambda a} \int_0^\tau q(\tau-\tau_0)\,[S_+(\tau-\tau_0) - S_+(\tau-\tau_0-\tau_1)] \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{(x - x(\tau-\tau_0))^2 + (y - y(\tau-\tau_0))^2}{4a\tau_0}\right] f_2^*(z, \tau_0) \frac{d\tau_0}{\tau_0}. \qquad (14)$$

Положив $\tau - \tau_0 = \xi$, правую часть формулы (14) приведем к виду

$$t = \frac{1}{8\pi\lambda a} \int_0^{\tau,\tau_1} q(\xi) \exp\left[-\frac{(x - x(\xi))^2 + (y - y(\xi))^2}{4a(\tau-\xi)}\right] f_2^*(z, \tau-\xi) \frac{d\xi}{\tau-\xi},$$

где верхний предел следует взять равным τ при $\tau < \tau_1$ и равным τ_1 при $\tau > \tau_1$. Если источник тепла движется достаточно долго ($\tau_1 \to \infty$), то при постоянной мощности $q(\tau-\tau_0) = q$ источника вместо функции (14) будет функция

$$t = \frac{q}{8\pi\lambda a} \int_0^\tau \exp\left[-\frac{(x - x(\tau-\tau_0))^2 + (y - y(\tau-\tau_0))^2}{4a\tau_0}\right] f_2^*(z, \tau_0) \frac{d\tau_0}{\tau_0}. \qquad (15)$$

Функцию $f_2^*(z, \tau_0)$ находим, используя теорему разложения и теорему о свертке:

$$f_2^*(z, \tau_0) = \frac{l\sqrt{a}}{\sqrt{\pi\tau_0}} \left\{\left[a_0 - 4\sum_{k=1}^\infty a_k(z)\right]\left(\frac{l-z_0}{2a\tau_0} - h_1\right)\exp\left(-\frac{(l-z_0)^2}{4a\tau_0}\right) + \right.$$
$$\left. + \left[b_0 - 4\sum_{k=1}^\infty b_k(z)\right]\left(\frac{l+z_0}{2a\tau_0} - h_2\right)\exp\left(-\frac{(l+z_0)^2}{4a\tau_0}\right)\right\} +$$
$$+ a\sum_{k=1}^\infty \mu_k \exp\left(-\frac{a\tau_0\mu_k^2}{4l^2}\right)[a_k(z)\,\Phi_k(h_1, z_0) + b_k(z)\,\Phi_k(h_2, -z_0)] +$$
$$+ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi\tau_0}} \exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{4a\tau_0}\right], \qquad (16)$$

где

$$a_0 = \frac{1 + h_2(l+z)}{l(h_1+h_2+2lh_1h_2)}; \quad b_0 = \frac{1 - h_1(l-z)}{l(h_1+h_2+2lh_1h_2)};$$

$$a_k(z) = \frac{1}{\Delta_k}\left(\cos\mu_k\frac{l+z}{2l} + \frac{2lh_2}{\mu_k}\sin\mu_k\frac{l+z}{2l}\right);$$

$$b_k(z) = \frac{1}{\Delta_k}\left(\cos\mu_k\frac{l-z}{2l} + \frac{2lh_1}{\mu_k}\sin\mu_k\frac{l-z}{2l}\right);$$

$$\Delta_k = \left[1 + 2l(h_1+h_2) + \frac{4l^2h_1h_2}{\mu_k^2}\right]\mu_k\sin\mu_k + (\mu_k^2 - 4l^2h_1h_2)\cos\mu_k;$$

$$\Phi_k(h_1, z_0) = \left(\frac{\mu_k}{2l} + ih_1\right)\exp\left[-\frac{i\mu_k}{2l}(l-z_0)\right]\operatorname{erfc}\left(\frac{l-z_0}{2\sqrt{a\tau_0}} - \frac{i\mu_k\sqrt{a\tau_0}}{2l}\right) +$$
$$+ \left(\frac{\mu_k}{2l} - ih_1\right)\exp\left[\frac{i\mu_k}{2l}(l-z_0)\right]\operatorname{erfc}\left(\frac{l-z_0}{2\sqrt{a\tau_0}} + \frac{i\mu_k\sqrt{a\tau_0}}{2l}\right).$$

Характеристические числа μ_k определяются из уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu^2 - 4l^2 h_1 h_2}{2l\mu(h_1 + h_2)}.$$

Переходя в выражении (16) к пределу при $l \to \infty$, получаем

$$f_2^*(z, \tau_0) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi\tau_0}} \exp\left[-\frac{(z - z_0)^2}{4a\tau_0}\right].$$

Подставляя это в формулу (14), находим температурное поле неограниченного пространства, нагреваемого движущимся источником тепла постоянной мощности $q(\tau - \tau_0) = q$:

$$t = \frac{q}{8\pi\lambda a\sqrt{\pi}} \int_0^\tau [S_+(\tau - \tau_0) - S_+(\tau - \tau_0 - \tau_1)] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(x - x(\tau - \tau_0))^2 + (y - y(\tau - \tau_0))^2 + (z - z_0)^2}{4a\tau_0}\right] \frac{d\tau_0}{\sqrt{\tau_0^3}}. \quad (17)$$

При движении источника тепла с постоянной скоростью v по прямой $x(\tau - \tau_0) = 0$, $y(\tau - \tau_0) = v \cdot (\tau - \tau_0)$, $z = z_0$ вместо поля (17) будет поле

$$t = \frac{q}{8\pi\lambda R_-}\left\{e^{\frac{vR_-}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_-}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right) + \right.$$

$$+ e^{-\frac{vR_-}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_-}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right) - \left[e^{\frac{vR_-}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_-}{2\sqrt{a(\tau - \tau_1)}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau - \tau_1}{a}}\right) + e^{-\frac{vR_-}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_-}{2\sqrt{a(\tau - \tau_1)}} - \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau - \tau_1}{a}}\right)\right] \times$$

$$\left. \times S_+(\tau - \tau_1)\right\} e^{-\frac{y_1 v}{2a}}, \quad \text{где } y_1 = y - v\tau; \quad R_\pm^2 = x^2 + y^2 + (z \pm z_0)^2.$$

Если источник движется достаточно долго ($\tau_1 \to \infty$), то

$$t = \frac{q}{8\pi\lambda} e^{-\frac{y_1 v}{2a}} \left[e^{\frac{vR_-}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_-}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{vR_-}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_-}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right)\right] \frac{1}{R_-}.$$

Отсюда для квазистационарного режима следует известное [3] решение

$$t = \frac{q}{4\pi\lambda R_-} \exp\left[-\frac{v}{2a}(y_1 + R_-)\right].$$

Из формулы (8) для пластины с теплоизолированными боковыми поверхностями находим

$$f_2^*(z, \tau_0) = \frac{a}{2l}\left\{\operatorname{erfc}\frac{l - z_0}{2\sqrt{a\tau_0}} + \operatorname{erfc}\frac{l + z_0}{2\sqrt{a\tau_0}} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{a\tau_0\mu_k^2}{4l^2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times [a_k(z)\Psi_k(-z_0) + b_k(z)\Psi_k(z_0)]\right\} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi\tau_0}} \exp\left[-\frac{(z - z_0)^2}{4a\tau_0}\right], \quad (18)$$

где

$$\Psi_k(z_0) = \exp\left(-i\mu_k \frac{l + z_0}{2l}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{l + z_0}{2\sqrt{a\tau_0}} - i\mu_k \frac{\sqrt{a\tau_0}}{2l}\right) +$$

$$+ \exp\left(i\mu_k \frac{l + z_0}{2l}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{l + z_0}{2\sqrt{a\tau_0}} + i\mu_k \frac{\sqrt{a\tau_0}}{2l}\right).$$

Из выражения (9) для полупространства с теплоотдачей получаем

$$f_2^*(z, \tau_0) = a\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi a\tau_0}}\left[\exp\left(-\frac{(z'-z_0')^2}{4a\tau_0}\right) + \exp\left(-\frac{(z'+z_0')^2}{4a\tau_0}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - 2h_2 \exp\left[(z'+z_0')h_2 + a\tau_0 h_2^2\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{z'+z_0'}{2\sqrt{a\tau_0}} + h_2\sqrt{a\tau_0}\right)\right\}.$$

Подставляя это в формулу (15) для случая движения источника тепла с постоянной скоростью по прямой параллельной оси y, находим

$$t = \frac{q}{8\pi\lambda}\left\langle e^{-\frac{y_1 v}{2a}}\left\{\frac{1}{R_+}\left[e^{\frac{vR_+}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_+}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left. + e^{-\frac{vR_+}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_+}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{R_-}\left[e^{\frac{vR_-}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_-}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + e^{-\frac{vR_-}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_-}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right)\right]\right\} - 2h_2 \int_0^\tau \exp\left[-\frac{x^2 + (y_1 + v\tau_0)^2}{4a\tau_0} + \right.$$

$$\left. + h_2(z'+z_0) + a\tau_0 h_2^2\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{z'+z_0}{2\sqrt{a\tau_0}} + h_2\sqrt{a\tau_0}\right)\frac{d\tau_0}{\tau_0}\Bigg\rangle. \qquad (19)$$

Переходя в выражении (19) к пределу при $h_2 \to \infty$, получаем температурное поле полупространства, поверхность которого поддерживается при нулевой температуре:

$$t = \frac{q}{8\pi\lambda} e^{-\frac{y_1 v}{2a}}\left\{\frac{1}{R_-}\left[e^{\frac{vR_-}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_-}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + e^{-\frac{vR_-}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_-}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right)\right] -$$

$$- \frac{1}{R_+}\left[e^{\frac{vR_+}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_+}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right) + e^{-\frac{vR_+}{2a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_+}{2\sqrt{a\tau}} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right)\right]\right\}. \qquad (20)$$

При неподвижном источнике отсюда находим

$$t = \frac{q}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_-} \operatorname{erfc}\frac{R_-}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{1}{R_+} \operatorname{erfc}\frac{R_+}{2\sqrt{a\tau}}\right),$$

что совпадает с результатом, приведенным, например, в работе [3]. Из формулы (19) для полупространства при квазистационарном режиме получаем

$$t = \frac{q}{4\pi\lambda} e^{-\frac{y_1 v}{2a}}\left\{\frac{1}{R_+} e^{-\frac{vR_+}{2a}} + \frac{1}{R_-} e^{-\frac{vR_-}{2a}} - h_2 e^{h_2(z'+z_0)} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{x^2 + y_1^2}{4a\tau_0} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{v^2}{4a^2} - h_2^2\right) a\tau_0\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{z'+z_0}{2\sqrt{a\tau_0}} + h_2\sqrt{a\tau_0}\right)\frac{d\tau_0}{\tau_0}\right\}.$$

Отсюда для теплоизолированного полупространства с источником, движущимся по его поверхности [4], находим

$$t = \frac{q}{2\pi\lambda R} \exp\left[-\frac{v}{2a}(y_1 + R)\right], \quad R^2 = x^2 + y_1^2 + z'^2.$$

В работах [1, 2] получено выражение для температурной функции пластины, не позволяющее получить рассмотренные нами частные случаи. Температурная функция (14) может быть использована для определения температурных полей пластины с теплоотдачей при ее нагреве линейными, плоскими и объемными источниками тепла.

1. *Недосека А. Я., Санченко В. А., Ворона Г. А.* Распределение температуры при действии на поверхность пластины сосредоточенного источника тепла.— Автомат. сварка, 1977, № 6, с. 1—4.
2. *Недосека А. Я., Чернова О. И.* Распределение температуры в пластинках с источником сварочного нагрева на различной глубине.— Автомат. сварка, 1977, № 7, с. 1—4.
3. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— 364 с.
4. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения.— М. : Физматгиз, 1963.— 252 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
17.12.80

УДК 534.1 : 531.221.3 : 518.5

Л. М. Зорий, Б. А. Попов, Н. В. Шулык

МАШИННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Опишем машинно-аналитический способ определения собственных значений многопараметрических краевых задач, характеристические определители которых являются функциями нулевого рода от некоторых параметров. Такие задачи возникают, в частности, при изучении малых колебаний и устойчивости сложных континуально-дискретных упругих систем. Для их исследования разработан метод характеристических рядов, основой которого является построение характеристического ряда задачи (системы) и последующее применение обобщенных критериев устойчивости и двухсторонних оценок для низших частот и критических значений [4]. Существенно, что предлагаемый способ позволяет определить в некоторой области пространства параметров все собственные значения.

Пусть известно представление характеристического определителя некоторой краевой задачи в виде ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i (B_1, B_2, \ \ldots, \ B_k) \lambda^i = 0, \tag{1}$$

где λ — основной спектральный параметр (например, параметр частоты, приведенной нагрузки и т. п.); B_i $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$, $i = \overline{0, k}$ — целые функции всех других параметров $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

Изучим уравнение (1) в некоторой области Q пространства параметров, такой, что для значений $p \in Q$ $(p = (p_1, p_2, \ldots, p_r))$ все собственные значения (корни уравнения (1)) являются положительными и простыми (для консервативных упругих систем Q — область устойчивости, для неконсервативных — то же, если отсутствует дестабилизация [1]). Для этого рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=0}^{k} \psi_i (B_1, B_2, \ \ldots, \ B_k) \lambda^i = 0. \tag{2}$$

При $k \to \infty$ количество действительных корней этого уравнения стремится к бесконечности. Обозначим эти корни через

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ \ldots \tag{3}$$