1. *Байдак Д. А., Зорий Л. М.* Один способ обоснования динамического метода исследования упругих систем.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 89—98.
2. *Балинский А. И., Зорий Л. М.* К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров.— Физ.-хим. механика материалов, 1971, 7, № 3, с. 99—100.
3. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.— М. : Физматгиз, 1961.— 339 с.
4. *Зорий Л. М.* К развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 16—20.
5. *Зорій Л. М.* Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких крайових задач для систем з розподіленими параметрами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 12, с. 1072—1075.
6. *Попов Б. О., Монцібович Б. Р.* Розв'язання задач на машинах для інженерних розрахунків.— К. : Наук. думка, 1978.— 347 с.
7. *Чудновский В. Г.* Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем.— Киев : Изд-во АН УССР, 1952.— 416 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР
Физико-механический институт
им. Г. В. Карпенко АН УССР

Поступила в редколлегию
21.05.79

УДК 539.3 : 534.26

Е. А. Вдович

ОПТИМИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ, ПАДАЮЩЕЙ НА УПРУГИЙ СЛОЙ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим упругий слой (среда 2) толщины $2h$, контактирующий со стороны плоскопараллельных границ $z = \pm h$ с акустической средой, характеристики которой для $z > h$ (среда 1) равны ρ_1, c_1, а для $z < -h$ (среда 3) — ρ_3, c_3 (ρ_i, c_i — плотность и скорость продольных волн в i-й среде). В среде 1 на расстоянии $z = z_0$ ($z_0 \gg h$) расположена плоскость сосредоточенных массовых сил вида $\vec{F} = \left\{0,\ 0,\ k_0 f(t) \cos\left(\frac{\omega y}{c_1}\right) \frac{d}{dz}\ \delta(z - z_0)\right\}$, возбуждающих периодический по координате y импульс продолжительности t_1, который достигает поверхности $z = h$ в момент времени $t = \frac{z_0 - h}{c_1}$.

Задача определения отраженной волны, возникшей в результате взаимодействия звукового импульса с упругим слоем, с использованием метода разделения переменных [1] сводится к решению системы волновых уравнений

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\xi^2} - \varkappa_i^2 \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\tau^2} - a^2\omega^2\Phi_i = n_0 f_i(\tau)\,\delta(\xi - \xi_0), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} - c^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} - a^2\omega^2\Psi = 0 \quad (i = \overline{1, 3}) \tag{2}$$

с условиями сопряжения на границах раздела

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi} + a\omega\Psi, \quad \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\tau^2} + n_0\varkappa^{-2} f(\tau)\,\delta(\xi - \xi_0) =$$
$$= m_1\left[\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\tau^2} + 2c^{-2}a\omega\left(a\omega\Phi_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)\right] \text{ при } \xi = 1; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial\xi} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi} + a\omega\Psi; \quad \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\tau^2} = m_3\left[\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\tau^2} + 2c^{-2}a\omega\left(a\omega\Phi_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)\right] \tag{4}$$
$$\text{при } \xi = -1;$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} - 2c^{-2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + a\omega\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}\right) = 0 \text{ при } \xi = \pm 1; \tag{5}$$

условиями затухания на бесконечности

$$\lim_{\xi\to\infty}\Phi_1 = 0, \quad \lim_{\xi\to-\infty}\Phi_3 = 0 \tag{6}$$

и начальными условиями

$$\Phi_i(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_i(\xi, 0)}{\partial \tau} = 0, \quad \Psi(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \tau} = 0. \tag{7}$$

Здесь $f_1(\tau) = f(\tau)$; $f_2(\tau) = f_3(\tau) \equiv 0$; $\Phi_i(\xi, \tau) = \dfrac{\Phi_i^*(\xi, \eta, \tau)}{\cos(a\omega\eta)}$; $\Psi(\xi, \tau) = \dfrac{\Psi^*(\xi, \eta, \tau)}{\cos(a\omega\eta)}$; $\xi = \dfrac{z}{h}$; $\eta = \dfrac{y}{h}$; $\tau = \dfrac{c_2 t}{h}$; $\varkappa_1 = \dfrac{c_2}{c_1}$; $\varkappa_2 = 1$; $\varkappa_3 = \dfrac{c_2}{c_3}$; $m_1 = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$; $m_3 = \dfrac{\rho_2}{\rho_3}$; $a = \dfrac{h}{c_1}$; $c = \dfrac{c_2}{c_s}$; $f(\tau)$ — искомая функция управления; $\Phi_i^*(\xi, \eta, \tau)$ — скалярные потенциалы перемещений в i-й среде; $\Psi^*(\xi, \eta, \tau)$ — компонента векторного потенциала перемещений в среде 2; c_s — скорость поперечных волн в среде 2; ω — частота периодических колебаний; k_0, n_0 — множители, имеющие размерности силы и скалярного потенциала перемещений соответственно.

Потенциал Φ_1 представим суммой двух составляющих $\Phi_1 = \Phi_1^1 + \Phi_1^2$, где Φ_1^1 — скалярный потенциал перемещений падающей волны; Φ_1^2 — скалярный потенциал перемещений отраженной волны.

Задача (1) — (7) решается с помощью представления каждой из искомых функций в виде ряда по малому параметру

$$\Phi_i = \Phi_{i0} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_{im}, \quad \Psi = \Psi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Psi_m, \quad f = f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m f_m, \tag{8}$$

где $\varepsilon = a\omega$.

Ограничимся нахождением решений в нулевом и первом приближениях. В нулевом приближении решения рассматриваемой задачи с точностью до момента отсчета времени совпадают с решениями задачи нормального падения плоской волны на упругий слой в акустической среде [2]. В первом приближении решения задачи (1) — (7) находятся на основании результатов данной задачи в нулевом приближении и для соответствующих областей имеют вид

$$\Phi_{11}^1(\xi, \tau) = -n_0(1 + \varepsilon) \int_0^{\varphi_0} f_0(t)\, dt, \tag{9}$$

$$\Phi_{11}^2(\xi, \tau) = -n_0(1 + \varepsilon) \left\{ M \int_c^{\varphi_1} f_0(t)\, dt + L \sum_{n=0}^{k-1} N^n \int_0^{\varphi_1 - 4(n+1)} f_0(t)\, dt \right\}, \tag{10}$$

$$\Phi_{21}(\xi, \tau) = -\frac{n_0(1 + \varepsilon)}{\varkappa m + 1} \sum_{n=0}^{\infty} N^n \left\{ \int_0^{\varphi_2 - 4n} f_0(t)\, dt - M \int_0^{\varphi_3 - 4n} f_0(t)\, dt \right\}, \tag{11}$$

$$\Phi_{31}(\xi, \tau) = -\frac{2mn_0}{\varkappa m + 1}(1 + \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} N^n \int_0^{\varphi_4 - 2(1+2n)} f_0(t)\, dt. \tag{12}$$

Следует отметить, что компонента векторного потенциала перемещений Ψ в первом приближении отлична от нуля и определяется формулой

$$\begin{aligned}\Psi_1(\xi, \tau) = &-\frac{2n_0\varepsilon}{(\varkappa m + 1)c^2} \sum_{n=0}^{\infty} N^n \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{2\varkappa m}{\varkappa m + 1} \left[\int_0^{\varphi_5 - \lambda_1} f_0(t)(\varphi_5 - \lambda_1 - t)\, dt - \right.\right. \\ &\left. - \int_0^{\varphi_6 - \lambda_1} f_0(t)(\varphi_6 - \lambda_1 - t)\, dt \right] - \int_0^{\varphi_7 - \lambda_2} f_0(t)(\varphi_7 - \lambda_2 - t)\, dt + \\ &+ \int_0^{\varphi_8 - \lambda_2} f_0(t)(\varphi_8 - \lambda_2 - t)\, dt - M \left[\int_0^{\varphi_7 - \lambda_3} f_0(t)(\varphi_7 - \lambda_3 - t)\, dt - \right. \\ &\left.\left. - \int_0^{\varphi_8 - \lambda_3} f_0(t)(\varphi_8 - \lambda_3 - t)\, dt \right] \right\}.\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь

$$\varphi_0 = \varphi_0(\xi, \tau) = \tau - \varkappa|\xi_0 - \xi|; \quad \varphi_1 = \varphi_1(\xi, \tau) = \tau - \varkappa(\xi + \xi_0 - 2);$$
$$\varphi_2 = \varphi_2(\xi, \tau) = \tau - \varkappa(\xi_0 - 1) - (1 - \xi); \quad \varphi_3 = \varphi_3(\xi, \tau) = \tau - \varkappa(\xi_0 - 1) - (3 + \xi);$$
$$\varphi_4 = \varphi_4(\xi, \tau) = \tau - \varkappa(\xi_0 - \xi - 2); \quad \varphi_5 = \varphi_5(\xi, \tau) = \tau - \varkappa(\xi_0 - 1) - c(3 - \xi);$$
$$\varphi_6 = \varphi_6(\xi, \tau) = \tau - \varkappa(\xi_0 - 1) - c(1 + \xi); \quad \varphi_7 = \varphi_7(\xi, \tau) = \tau - \varkappa(\xi_0 - 1) - c(1 - \xi);$$
$$\varphi_8 = \varphi_8(\xi, \tau) = \tau - \varkappa(\xi_0 - 1) - c(3 + \xi); \quad \lambda_1 = \lambda_1(k, n) = 2[1 + 2(n + kc)];$$
$$\lambda_2 = \lambda_2(k, n) = 4(n + kc); \quad \lambda_3 = \lambda_3(k, n) = 4(1 + n + kc); \quad M = \frac{\varkappa m - 1}{\varkappa m + 1};$$
$$N = \left(\frac{\varkappa m - 1}{\varkappa m + 1}\right)^2; \quad L = -\frac{4\varkappa m(\varkappa m - 1)}{(\varkappa m + 1)^2} \quad (\varkappa = \varkappa_1 = \varkappa_3, \ m = m_1 = m_3).$$

В частности, когда среда 2 есть абсолютно жесткое или абсолютно мягкое тело [4], можно получить точные решения для потенциалов перемещений отраженных волн от абсолютно жесткого и абсолютно мягкого тел соответственно:

$$\Phi_1^2 = -\frac{n_0}{1 - \varepsilon} \int_0^{\varphi_1} f_0(t)\, dt, \quad \Phi_1^2 = \frac{n_0}{1 - \varepsilon} \int_0^{\varphi_1} f_0(t)\, dt. \tag{14}$$

Оптимальный закон изменения падающего импульса, обеспечивающего максимальную энергию отраженной волны, найдем с учетом представлений (8) из условия минимума разности энергий падающей и отраженной волн при $\xi = 1 + 0$:

$$I = \frac{\beta \rho_1^2 c_2^4}{2h^4} \int_0^{\tau_1} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_1^1}{\partial \tau^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \Phi_1^2}{\partial \tau^2}\right)^2\right] d\tau,$$

где β — сжимаемость акустической среды. Оптимальные решения в нулевом приближении аналогичны решениям задачи оптимизации нормально падающего звукового импульса в системе акустическая среда — упругий слой [2]. Оптимальное давление в падающем импульсе и соответствующее давление в дифракционной волне в первом приближении определяются на основании оптимальных решений рассматриваемой задачи в нулевом приближении.

Тогда в первом приближении для падающего звукового импульса продолжительности $\varkappa(\xi_0 - 1) < \tau_1 \leqslant 4 + \varkappa(\xi_0 - 1)$ функция управления определяется из полинома

$$\int_0^{\tau - \varkappa(\xi_0 - 1)} f_0(t) S_+(t)\, dt = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 \quad (\varkappa(\xi_0 - 1) \leqslant \tau \leqslant \tau_1). \tag{15}$$

Скалярные потенциалы перемещений падающей и отраженной волн согласно (9), (10) представляются формулами

$$\Phi_{11}^1 = (1 + \varepsilon)\frac{P_0 h^2}{2\rho_1 c_2^2 \tau_1}\tau^2, \quad \Phi_{11}^2 = -(1 + \varepsilon) M \frac{P_0 h^2}{2\rho_1 c_2^2 \tau_1}\tau^2. \tag{16}$$

Здесь P_0 — суммарное давление в падающей волне за время τ_1. Переходя согласно работе [3] от скалярных потенциалов к давлению, получаем, что в данном случае оптимальный падающий импульс имеет постоянную интенсивность во времени и с учетом результатов работы [1] определяется формулой

$$\mathcal{P}_{11}^{*1}(\xi, \eta, \tau) = (1 + \varepsilon)\frac{P_0}{\tau_1}\cos(a\omega\eta). \tag{17}$$

Для импульса продолжительности $4+\varkappa(\xi_0-1)<\tau_1\leqslant 8+\varkappa(\xi_0-1)$ функция управления будет такой:

$$\int_0^{\tau-\varkappa(\xi_0-1)} f_0(t)\,S_+(t)\,dt=\sum_{j=0}^{3}\tau^j\{a_jS_+[4+\varkappa(\xi_0-1)-\tau]+$$
$$+b_jS_+[\tau-(4+\varkappa(\xi_0-1))]\}. \qquad (18)$$

Оптимальное давление в падающем импульсе в этом случае изменяется по линейному закону

$$\mathcal{P}_{11}^{*1}(\xi,\eta,\tau)=(1+\varepsilon)\frac{2P_0(T_1-3T_2\tau)}{\tau_1(2T_1-3T_2\tau_1)}\cos(a\omega\eta)\quad(\varkappa(\xi_0-1)\leqslant\tau\leqslant\tau_1). \qquad (19)$$

Давление в отраженной волне представляется в виде

$$\mathcal{P}_{11}^{*2}(\xi,\eta,\tau)=(1+\varepsilon)\frac{2P_0}{\tau_1(2T_1-3T_2\tau_1)}\{M(T_1-3T_2\tau)S_+[4+\varkappa(\xi_0-1)-\tau]+$$
$$+[MT_1+12LT_2-3(M+L)T_2\tau]S_+[\tau-(4+\varkappa(\xi_0-1))]\}\cos(a\omega\eta). \qquad (20)$$

Здесь

$$T_1=[1-(M+L)^2]\tau_1^3+24L(M+L)\tau_1^2-48L(3L+M)\tau_1+$$
$$+128L(2L-M);$$
$$T_2=8L(M+L)(\tau_1-4-\varkappa(\xi_0-1)).$$

В качестве примера рассмотрим систему, когда акустической средой является вода, а упругий слой изготовлен из стали или алюминия. Для зондирующего импульса продолжительности $\varkappa(\xi_0-1)<\tau_1\leqslant 4+\varkappa(\xi_0-1)$ давление в геометрически отраженной волне от стального слоя будет $\mathcal{P}_{10}^2=0{,}231P_0$ в нулевом приближении и $\mathcal{P}_{11}^2=0{,}244P_0$ в первом приближении. Давление в первом отраженном сигнале от слоя, изготовленного из алюминия, в нулевом приближении будет $\mathcal{P}_{10}^2=0{,}210P_0$, и $\mathcal{P}_{11}^2=0{,}222P_0$

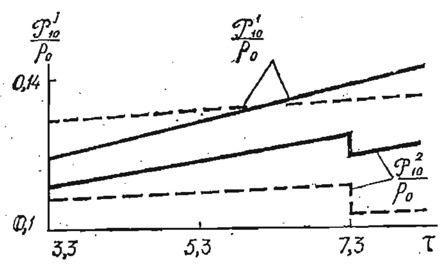

Рис. 1

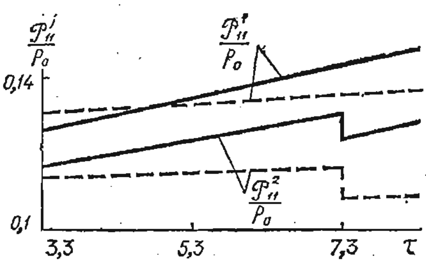

Рис. 2

в первом приближении. На рис. 1, 2 приведено оптимальное распределение давления в падающем импульсе и в дифракционной волне для импульса продолжительности $\tau_1=8{,}366$ в нулевом и первом приближениях. Сплошные линии соответствуют случаю стального слоя, штриховые — случаю слоя, изготовленного из алюминия. В частности, при $\varkappa(\xi_0-1)<\tau_1\leqslant 4+\varkappa(\xi_0-1)$ давление в отраженной волне от абсолютно жесткого слоя будет $\mathcal{P}_1^2=0{,}242P_0$, от абсолютно мягкого $\mathcal{P}_1^2=-0{,}242P_0$. Для импульса продолжительности $4+\varkappa(\xi_0-1)<\tau_1\leqslant 8+\varkappa(\xi_0-1)$ давления в отраженных волнах от абсолютно жесткого и абсолютно мягкого слоев будут соответственно $\mathcal{P}_1^2=0{,}128P_0$ и $\mathcal{P}_1^2=-0{,}128P_0$. Все расчеты проведены при частоте периодических колебаний $\omega=10^2$ с$^{-1}$. Численные результаты в первом приближении отличаются от численных результатов нулевого приближения на 5—6%. Для частот $\omega<10^2$ с$^{-1}$ эта разница уменьшается.

1. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн.— Киев : Наук. думка, 1978.— 308 с.
2. *Зозуляк Ю. Д., Вдович Е. А.* Оптимизация [illegible] [illegible]щей волны в системе акустическая среда — упругий слой.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 96—99.
3. *Скучик Е.* Основы акустики.— М. : Мир, [illegible].— Т. 2. [illegible]
4. *Эхо-сигналы* от упругих объектов / У. К. [illegible], [illegible] Метсавээр, Н. Д. Векслер, М. Э. Кутсер.— Таллин : Изд-во АН ЭССР, [illegible].— Т. 2. [illegible]

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
05.12.80

УДК 530.12 : 531.18

Р. Я. Мацюк

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ РАВНОУСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Равноускоренное движение пробных частиц в специальной теории относительности интересно по двум причинам. Во-первых, существуют примеры такого движения в конкретных физических задачах [2], во-вторых, оно рассматривается в теории равноускоренных систем отсчета [5]. Определяющее уравнение мировой линии $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ равноускоренно движущейся частицы записано в работе [4] так:

$$\left[1 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2\right] \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3} + 3\, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = 0. \qquad (*)$$

С другой стороны, существует понятие геодезической окружности в (псевдо)римановом пространстве V_k^n, которое изучается так называемой конциркулярной геометрией [1, 6]. Определяющее уравнение геодезической окружности $\mathrm{x}(\tau) = (x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau))$, параметризованной параметром τ, не зависит от выбора параметра и имеет согласно работе [6] вид

$$\frac{D^3x^l}{ds^3} + g_{ij} \frac{D^2x^i}{ds^2} \frac{D^2x^j}{ds^2} \frac{Dx^l}{ds} = 0 \quad (l = 1, \ldots, n), \qquad (**)$$

где $ds = \sqrt{\frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} g_{ij}}\, d\tau$ и действует правило суммирования в пределах от 1 до n. Если в качестве параметра τ выбрать время $t \equiv x^4$, положив $\frac{dx^4}{d\tau} = 1$, то уравнения $(*)$ и $(**)$ становятся алгебраически эквивалентными (в четырехмерном пространстве — времени). Таким образом, мировые линии равноускоренных частиц совпадают с геодезическими окружностями. Последние можно охарактеризовать еще и тем свойством, что вдоль них первая кривизна постоянна, а все остальные равны нулю. В настоящей работе получено уравнение (векторное) третьего порядка, решения которого суть параметризованные геодезические окружности в V_k^2 и которое обладает тем дополнительным свойством, что может рассматриваться как уравнение экстремалей вариационной задачи в параметрической форме с лагранжианом, включающим высшие производные. Это позволяет рассматривать двухмерную конциркулярную геометрию с точки зрения пространства Кавагучи, геодезические которого, как известно, являются экстремалями вариационного принципа с высшими производными. С другой стороны, открывается возможность построить механику Остроградского с высшими производными для равноускоренного движения в теории относительности.

В статье использованы матричные обозначения. Знаки «$\otimes$», «$\odot$» и «$\wedge$» обозначают соответственно тензорное, симметрическое и внешнее произведения. Запись $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ означает свертку матрицы $\mathbf{A}$ с матрицей $\mathbf{B}$ по всем парам соответствующих индексов, начиная справа. Для выполнения свертки