1. *Аминова А. В.* О конциркулярных движениях в римановых пространствах.— Гравитация и теория относительности, 1976, вып. 11, с. 127—138.
2. *Куканов А. Б., Константинович А. В.* Об излучении при гиперболическом движении.— История и методология естеств. наук, 1979, № 21, с. 105—109.
3. *Мацюк Р. Я.* О существовании лагранжиана для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1981, вып. 15, с. 35—39.
4. *Hill E. L.* On the kinematics of uniformly accelerated motions and classical electromagnetic theory.— Phys. Rev., 1947, 72, N 2, p. 143—149.
5. *Hill E. L.* The definition of moving coordinate systems in relativistic theories.— Phys. Rev., 1951, 84, N 6, p. 1165—1168.
6. *Yano K.* Concurcular geometry 1.— Proc. Impt. Acad. Tokyo, 1940, 16, N 6, p. 195—200

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР Поступила в редколлегию 08.09.80.

УДК 629.78

В. Е. Бербюк

К ВОПРОСУ О СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА ДВУНОГОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

Задачам, связанным с передвижением двуногих шагающих аппаратов, посвящен ряд исследований (см., например, работы [1—10, 12]). Особый интерес представляет проблема построения эффективных алгоритмов управления движением подобного рода механических систем. В настоящее время известно ряд подходов к решению проблемы управления. В работах [5, 12] предложены алгоритмы свободной стабилизации, обеспечивающие устойчивое движение двуногого механизма в произвольном режиме из заданного класса. Эффективные методы синтеза оптимальных линейных систем успешно применены в работах [8—10] для решения ряда задач стабилизации движения шагающего аппарата. Метод разделения движений оказался плодотворным при организации жесткого управления движением двуногого механизма [6]. Результаты статьи [13] являются примером использования общей теории Ляпунова для изучения устойчивости антропоморфных систем. В настоящей работе с помощью принципа максимума Понтрягина решена задача оптимальной по быстродействию стабилизации движения корпуса двуногого шагающего аппарата для модели, отличающейся от принятых в работах [5, 7—10, 12], а также изучено влияние отдельных кинематических и динамических параметров на величину времени оптимальной стабилизации.

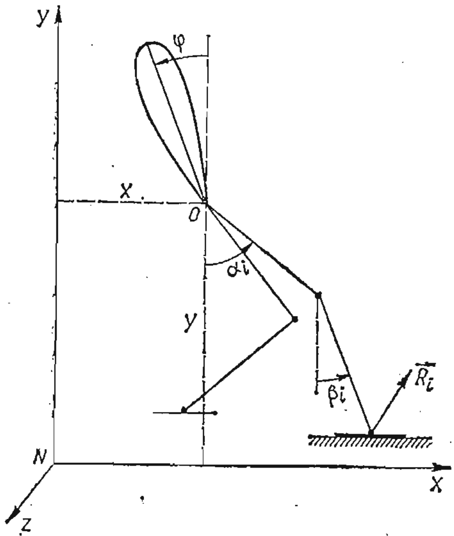

Рис. 1

Рассмотрим плоскую модель шагающего аппарата, состоящего из весомого корпуса и пары трехзвенных одинаковых ног [2] (рис. 1). Два весомых звена моделируют бедро и голень, третье невесомое звено — стопу конечности. Полагаем, что звенья аппарата соединены между собой идеальными шарнирами. Уравнения, описывающие движение механизма в фазе опоры на одну из ног, можно записать в виде [2]

$$f_1(t) - K_r(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = R_{1x}(t),$$

$$f_2(t) - K_r(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) = R_{1y}(t), \tag{1}$$

$$J\ddot{\varphi} - gK_r\sin\varphi - K_r(\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi) = -q_1 - q_2,$$

$$f_3(t) = q_1 - u_1 + 2a(R_{1x}\cos\alpha_1 + R_{1y}\sin\alpha_1),$$

$$f_4(t) = q_2 - u_2,\ f_5(t) = u_1 - p_1 + 2b(R_{1x}\cos\beta_1 + R_{1y}\sin\beta_1),\ f_6(t) = u_2,$$

где $f_1(t) = M\ddot{x} + \sum_{i=1}^{2}[K_a(\ddot{\alpha}_i\cos\alpha_i - \dot{\alpha}_i^2\sin\alpha_i) + K_b(\ddot{\beta}_i\cos\beta_i - \dot{\beta}_i^2\sin\beta_i)]$;

$$f_2(t) = M(\ddot{y} + g) + \sum_{i=1}^{2}[K_a(\ddot{\alpha}_i\sin\alpha_i + \dot{\alpha}_i^2\cos\alpha_i) + K_b(\ddot{\beta}_i\sin\beta_i + \dot{\beta}_i^2\cos\beta_i)]; \tag{2}$$

$$f_3(t) = I_a\ddot{\alpha}_1 + K_a(\ddot{x}\cos\alpha_1 + \ddot{y}\sin\alpha_1) + I_{ab}[\ddot{\beta}_1\cos(\alpha_1 - \beta_1) + \dot{\beta}_1^2\sin(\alpha_1 - \beta_1)] + gK_a\sin\alpha_1;$$

$$f_4(t) = I_a\ddot{\alpha}_2 + K_a(\ddot{x}\cos\alpha_2 + \ddot{y}\sin\alpha_2) + I_{ab}[\ddot{\beta}_2\cos(\alpha_2 - \beta_2) + \dot{\beta}_2^2\sin(\alpha_2 - \beta_2)] + gK_a\sin\alpha_2;$$

$$f_5(t) = J_b\ddot{\beta}_1 + K_b(\ddot{x}\cos\beta_1 + \ddot{y}\sin\beta_1) + I_{ab}[\ddot{\alpha}_1\cos(\alpha_1 - \beta_1) - \dot{\alpha}_1^2\sin(\alpha_1 - \beta_1)] + gK_b\sin\beta_1;$$

$$f_6(t) = J_b\ddot{\beta}_2 + K_b(\ddot{x}\cos\beta_2 + \ddot{y}\sin\beta_2) + I_{ab}[\ddot{\alpha}_2\cos(\alpha_2 - \beta_2) - \dot{\alpha}_2^2\sin(\alpha_2 - \beta_2)] + gK_b\sin\beta_2.$$

В уравнениях (1) — (2) обозначено: x, y — декартовые координаты точки подвеса ног; φ, α_i, β_i ($i = 1, 2$) — угловые координаты звеньев аппарата (см. рис. 1); q_i, u_i, p_i — управляющие воздействия соответственно в бедренных, коленных и стопных шарнирах; $R_{ix}(t)$, $R_{iy}(t)$ — горизонтальная и вертикальная составляющие реакции опоры $R_i(t)$; M_1 — масса корпуса; r — расстояние от точки подвеса ног O до центра масс корпуса; J — момент инерции корпуса относительно оси Z в точке O; m_a — масса бедра; $2a$ — длина бедра; J_a — момент инерции бедра относительно оси Z в точке O; m_b — масса голени; $2b$ — длина голени; J_b — момент инерции голени относительно оси Z в точке коленного шарнира; g — ускорение силы тяжести. Кроме того, $M = M_1 + 2(m_a + m_b)$, $K_r = rM_1$, $K_a = a(m_a + 2m_b)$, $K_b = bm_b$, $I_a = 4a^2m_b + J_a$, $I_{ab} = 2abm_b$. Везде индекс $i = 1$ будет соответствовать величинам опорной ноги, $i = 2$ — величинам переносимой ноги. Ходьба такого механизма представляет собой чередование одноопорных фаз с мгновенной сменой опоры с одной ноги на другую. Это передвижение промежуточное между собственно ходьбой (чередованием одноопорных и двуопорных фаз) и бегом [4].

Ранее [2] был построен энергетически оптимальный программный уровень системы управления движением двуногого шагающего аппарата. Однако в силу наличия разного рода возмущений реальное движение механизма может отличаться от программного. Возникает задача стабилизации, состоящая в том, чтобы тем или иным способом обеспечить минимизацию рассогласования между реальным и программным движениями. В настоящей работе решается задача стабилизации колебаний корпуса аппарата в предположении, что движение конечностей известно и не возмущается со временем.

При одноопорном движении механизма помимо уравнений (1) имеют место кинематические связи

$$x(t) = x_0 - 2(b\sin\beta_1 + a\sin\alpha_1),\quad y(t) = y_0 + 2(b\cos\beta_1 + a\cos\alpha_1), \tag{3}$$

где x_0, y_0 — декартовые координаты стопного шарнира опорной ноги. Посредством ряда элементарных преобразований системы (1) с учетом выражений

(3) для колебаний корпуса аппарата получаем дифференциальное уравнение

$$J\ddot{\varphi}-gK_r\sin\varphi-K_r(\ddot{x}\cos\varphi+\ddot{y}\sin\varphi)+K_r(y-y_0)(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi)-$$
$$-K_r(x-x_0)(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi)=-p_1-\sum_{j=3}^{6}f_j(t)+(y-y_0)f_1(t)-$$
$$-(x-x_0)f_2(t). \quad (4)$$

Выбирая некоторое допустимое управление в стопе $p_1=p_1(t)$ и решая краевую задачу для уравнения (4), находим T-периодическое колебание корпуса аппарата (T — длительность одиночного шага). Далее, реакции опоры $R_{1x}(t)$, $R_{1y}(t)$ определяем из первых двух уравнений системы (1). Управляющие воздействия в оставшихся шарнирах последовательно вычисляем в силу уравнений (1) — (2) по формулам

$$\begin{aligned} &u_1(t)=p_1(t)-2b(R_{1x}\cos\beta_1+R_{1y}\sin\beta_1)+f_5(t),\\ &q_1(t)=u_1(t)-2a(R_{1x}\cos\alpha_1+R_{1y}\sin\alpha_1)+f_3(t),\\ &u_2(t)=f_6(t),\quad q_2(t)=u_2(t)+f_4(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, в рамках рассматриваемых постановок задача управления движением двуногого аппарата сводится, по существу, к задаче управления движением корпуса механизма посредством надлежащего выбора управления в стопном шарнире. Решив задачу стабилизации движения корпуса, остальную часть динамики аппарата можно вычислить с помощью формул (1).

Предположим, что колебания корпуса малы, а кинематика опорной ноги такова, что движение точки подвеса ног происходит на постоянной высоте h от поверхности шагания, т. е. $y(t)-y_0=h=\text{const}$. Тогда из уравнения (4) получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее малые колебания корпуса шагающего механизма:

$$\ddot{\varphi}-k^2\varphi=-p_1/(J+hK_r)+f(t), \quad (6)$$

где

$$k^2=gK_r/(J+hK_r);$$

$$f(t)=[hf_1-(x-x_0)f_2-f_3-f_4-f_5-f_6+K_r\ddot{x}]/(J+hK_r).$$

Пусть $\varphi_b(t)$ — возмущенное движение корпуса, $\theta(t)=\varphi_b(t)-\varphi(t)$ — отклонение возмущенного движения корпуса от программного $\varphi(t)$ Пусть, далее, $p_1^b(t)$ — момент, развиваемый в стопном шарнире опорной ноги при возмущенном движении $\varphi_b(t)$. Тогда в силу уравнения (6) $\Theta(t)$ удовлетворяет такому:

$$\ddot{\theta}-k^2\theta=u, \quad (7)$$

где

$$u(t)=(p_1-p_1^b)/(J+hK_r). \quad (8)$$

Из физических соображений ясно, что необходимо выполнение условий

$$|u(t)|\leqslant u_0,\quad 0<u_0<\infty,\quad u_0=\text{const}. \quad (9)$$

Сформулируем задачу оптимальной по быстродействию стабилизации движения корпуса двуногого аппарата. Пусть при $t=t_0$ возмущение программного движения корпуса характеризуется величинами $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$. Найти такое управление $u(t)$, удовлетворяющее условиям (9), чтобы за наименьшее время выйти на программное движение $\varphi=\varphi(t)$. Другими словами, необходимо найти такое управление $u(t)$, чтобы перевести фазовую точку, движение которой подчинено уравнению (7), из состояния $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ в положение равновесия (0, 0). При этом время перехода должно быть минимальным. Решив эту задачу, найдем $u(t)$, а значит, согласно уравнениям (1), (5) и (8) можно рассчитать добавки к программным управлениям $p_1(t)$, $u_1(t)$,

$q_1(t)$, $u_2(t)$, $q_2(t)$, необходимые для оптимальной по быстродействию стабилизации движения корпуса шагающего механизма.

Пусть $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$. В силу уравнения (7) имеем нормальную систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = k^2 x_1 + u. \tag{10}$$

Функция Гамильтона в данном случае имеет вид

$$H(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 k^2 x_1 + \psi_2 u. \tag{11}$$

Далее, для вспомогательных переменных ψ_1, ψ_2 получаем систему

$$\dot{\psi}_1 = -k^2 \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1,$$

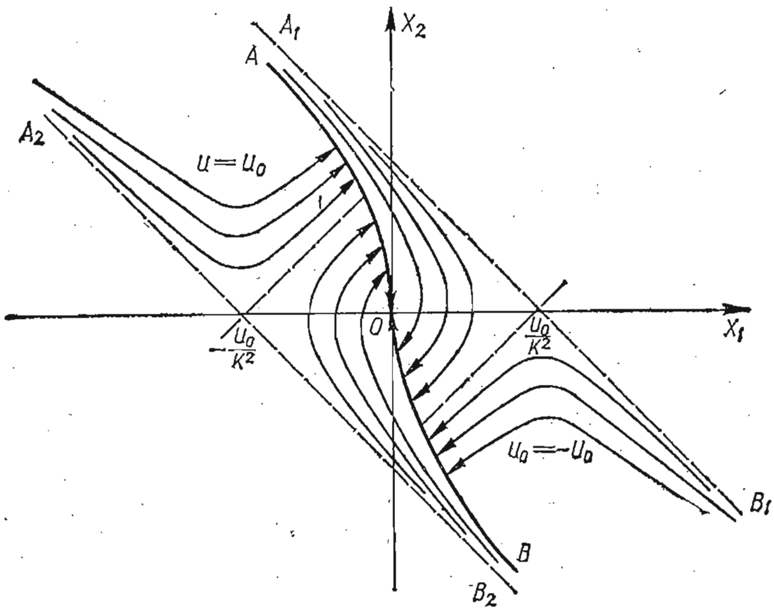

Рис. 2

откуда получаем $\psi_2(t) = c_1 \exp(kt) + c_2 \exp(-kt)$, где c_1, c_2— постоянные. Принцип максимума [11] с учетом выражений (9), (11) дает $u(t) = u_0 \operatorname{sgn} \psi_2(t)$. В силу того что при любых c_1, c_2, неравных одновременно нулю, функция $\psi_2(t)$ на любом отрезке времени не более одного раза меняет знак, каждое оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значение $\pm u_0$ и имеющей не более двух интервалов постоянства.

Для отрезка времени, на котором $u(t) = u_0$, в силу системы (10) имеем

$$x_1(t) = c_3 e^{kt} + c_4 e^{-kt} - \frac{u_0}{k^2}, \quad x_2(t) = k(c_3 e^{kt} - c_4 e^{-kt}), \tag{12}$$

где c_3, c_4— произвольные постоянные, откуда получаем

$$(k^2 x_1 + u_0)^2 - k^2 x_2^2 = 4k^4 c_3 c_4. \tag{13}$$

Следовательно, фазовые траектории изображающей точки при $u(t) = u_0$ и $c_3 c_4 \neq 0$ представляют собой гиперболы, асимптотами которых являются прямые $x_2 = k(x_1 + u_0/k^2)$ и $x_2 = -k(x_1 + u_0/k^2)$. Аналогично для отрезка времени, на котором $u(t) = -u_0$, находим

$$x_1(t) = c_5 e^{kt} + c_6 e^{-kt} + u_0/k^2, \quad x_2(t) = k(c_5 e^{kt} - c_6 e^{-kt}), \tag{14}$$

$$(k^2 x_1 - u_0)^2 - k^2 x_2^2 = 4k^4 c_5 c_6. \tag{15}$$

Здесь c_5, c_6— произвольные постоянные.

Из анализа поведения фазовых траекторий (13), (15) следует, что в рассматриваемом случае областью возможной стабилизации движения корпуса двуногого аппарата является полоса Ω, заключенная между линиями A_1B_1 $(x_2 = -k(x_1 - u_0/k^2))$ и A_2B_2 $(x_2 = -k(x_1 + u_0/k^2))$ (рис. 2). Линия переключения AOB состоит из дуги AO гиперболы $(k^2x_1 - u_0)^2 - x_2^2k^2 = u_0$ и из дуги BO гиперболы

$$(k^2x_1 + u_0)^2 - k^2x_2^2 = u_0^2 . \tag{16}$$

Отметим, что точки асимптот в область стабилизации Ω не входят.

Если при $t = t_0$ возмущение программного движения корпуса определяется точкой $(x_1^0, x_2^0) \in \Omega$, расположенной выше линии AOB, то для оптимальной стабилизации необходимо, чтобы $u(t) = -u_0$ до тех пор, пока изображающая точка не попадет на дугу BO. Далее, $u(t) = u_0$, что и завершает стабилизацию. Если же точка $(x_1^0, x_2^0) \in \Omega$ расположена ниже линии AOB, то для оптимальной стабилизации программного движения корпуса аппарата следует положить $u(t) = u_0$ и поддерживать таковым до выхода изображающей точки на дугу AO. Затем необходимо переключить управление, приняв $u(t) = -u_0$.

Согласно принципу максимума [11], только описанные выше траектории (см. рис. 2) могут быть оптимальными, причем из проведенного исследования видно, что из каждой точки полосы Ω исходит только одна траектория, ведущая в начало координат. В силу теоремы существования для линейных систем оптимального быстродействия [11] найденные траектории действительно являются оптимальными и других оптимальных траекторий, ведущих в начало координат, не существует.

Пусть при $t = t_0$ возмущение программного движения корпуса аппарата определяется точкой $(x_1^0, x_2^0) \in \Omega$, расположенной выше линии AOB. Для оптимальной стабилизации полагаем $u(t) = -u_0$. Используя уравнения (15), (16), находим координаты точки пересечения фазовой траектории системы (10), исходящей из точки (x_1^0, x_2^0) с линией переключения AOB:

$$x_1^b = [2u_0x_1^0 + (x_2^0)^2 - k^2(x_1^0)^2]/4u_0, \quad x_2^b = -\sqrt{x_1^b(k^2x_1^b + 2u_0)} . \tag{17}$$

По известным точкам (x_1^b, x_2^b) согласно уравнению (14) определяем момент времени выхода изображающей точки на AOB:

$$t_b = t_0 + \frac{1}{k} \ln\left(\frac{k^2x_1^b + kx_2^b - u_0}{k^2x_1^0 + kx_2^0 - u_0}\right). \tag{18}$$

И, наконец, зная (x_1^b, x_2^b), t_b, с учетом соотношения (12) находим момент времени завершения стабилизации движения корпуса механизма:

$$t_1 = t_b + \frac{1}{k} \ln\left(\frac{u_0}{k^2x_1^b + kx_2^b + u_0}\right). \tag{19}$$

Исходя из уравнений (1), (5), (8) можно вычислить добавки к программным значениям реакций опоры и управляющих воздействий в шарнирах ног, необходимые для оптимальной стабилизации движения корпуса механизма. На отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_b$ имеем

$$\begin{gathered} p_1^b(t) - p_1(t) = u_0(J + hK_r), \\ R_{1x}^b(t) - R_{1x}(t) = -K_r k^2(c_5e^{kt} + c_6e^{-kt}), \quad R_{1y}^b(t) - R_{1y}(t) = 0, \\ u_1^b(t) - u_1(t) = (p_1^b - p_1) - 2b\cos\beta_1(R_{1x}^b - R_{1x}), \end{gathered} \tag{20}$$

$$q_1^b(t) - q_1(t) = (p_1^b - p_1) - h(R_{1x}^b - R_{1x}),\ u_2^b(t) - u_2(t) = 0,\ q_2^b(t) - q_2(t) = 0,$$

где

$$c_5 = (k^2x_1^0 + kx_2^0 - u_0)/2k^2\exp(kt_0); \quad c_6 = (k^2x_1^0 - kx_2^0 - u_0)/2k^2\exp(-kt_0).$$

При $t_b < t \leqslant t_1$ необходимо выполнение условий $p_1^b(t) - p_1(t) = -u_0(J + hK_r)$, $R_{1x}^b(t) - R_{1x}(t) = -k^2K_r(c_3e^{kt} + c_4e^{-kt})$, где $c_3 = (k^2x_1^b + kx_2^b + u_0)/2k^2\exp(kt_b)$; $c_4 = (k^2x_1^b - kx_2^b + u_0)/2k^2\exp(-kt_b)$.

Приращения моментов $u_1(t)$, $q_1(t)$, $u_2(t)$, $q_2(t)$ при $t_b < t \leqslant t_1$ вычисляются согласно соотношениям (20).

Замечание 1. Если при $t = t_0$ возмущение программного движения корпуса аппарата определяется точкой $(x_1^0, x_2^0) \in \Omega$, расположенной ниже линии AOB, то в уравнениях (17) — (18) необходимо везде заменить u_0 на $-u_0$, а перед квадратным корнем в уравнении (17) поменять знак на противоположный.

Исследуем влияние отдельных параметров на величину времени оптимальной стабилизации $t_1 - t_0$. Отметим, что t_1 не зависит от массоинерционных характеристик ног, а в силу уравнений (17) — (19) является функцией только x_1^0, x_2^0, u_0, M_1, r, J, h. Пусть при $t_0 = 0$ возмущение программного движения корпуса определяется точкой $x_1 = 0{,}01$ рад, $x_2 = 0{,}2$ рад/с. На рис. 3,4 изображены кривые, характеризующие влияние отдельных параметров на время оптимальной стабилизации данного возмущенного движения.

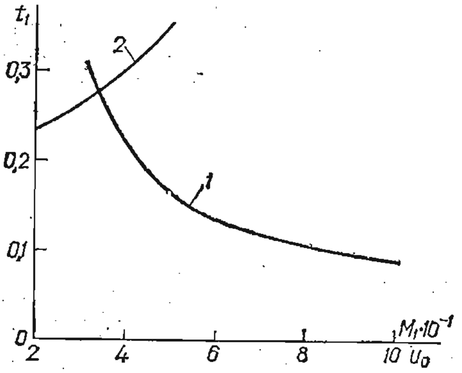

Рис. 3

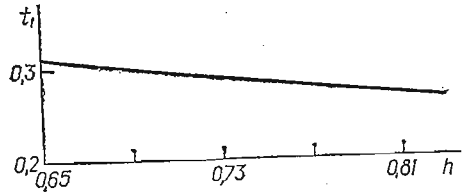

Рис. 4

На рис. 3 кривая $t_1 = t_1(u_0)$ (*1*) построена при $M_1 = 40$, $r = 0{,}5$, $J = 10$, $h = 0{,}65$, а кривая $t_1 = t_1(M_1)$ (*2*) при тех же значениях r, J, h и $u_0 = 3$. На рис. 4 кривая $t_1 = t_1(h)$ получена при тех же значениях r, J, u_0 и $M_1 = 40$. Как показали численные расчеты, с увеличением момента инерции корпуса J при фиксированных остальных параметрах время оптимальной стабилизации t_1 убывает практически по линейному закону. Характер влияния на значение t_1 величины параметра r аналогичен влиянию массы корпуса аппарата M_1.

Замечание 2. Если точка подвеса ног шагающего аппарата совпадает с центром масс корпуса, т. е. $r = 0$, задача оптимальной стабилизации движения корпуса механизма решается аналогичным методом без предположений малости колебаний корпуса и неизменности высоты точки подвеса ног относительно поверхности шагания. При этом областью оптимальной стабилизации является вся фазовая плоскость (x_1, x_2).

Проведенные исследования показывают, что введение дополнительного управляющего воздействия в стопе двуногого шагающего аппарата позволяет решать задачу оптимальной стабилизации углового движения корпуса в отличие от работ [5, 12] за счет управления только в шарнирах опорной ноги.

1. *Белецкий В. В.* Динамика двуногой ходьбы.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1975, № 3, с. 3—14; № 4, с. 3—13.
2. *Белецкий В. В., Бербюк В. Е.* Нелинейная модель двуногого шагающего аппарата снабженного управляемыми стопами. М., 1978.— 68 с.— (Препринт / Ин-т прикл. математики АН СССР, № 54).
3. *Бербюк В. Е.* Плоская модель двуногого стопоходящего аппарата.— В кн.: Некоторые вопросы механики роботов и биомеханики М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 52—62.
4. *Белецкий В. В., Кирсанова Т. С.* Плоские линейные модели двуногой ходьбы.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1976, № 4, с. 51—62.
5. *Белецкий В. В., Чудинов П. С.* Линейная задача стабилизации двуногой ходьбы.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1977, № 6, с. 32—40.
6. *Болотин Ю. В., Новожилов И. В.* Управление походкой двуногого шагающего аппарата.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1977, № 3, с. 47—52.

7. *Вукобратович М.* Шагающие роботы и антропоморфные механизмы.— М. : Мир, 1976.— 540. с.
8. *Карпинский Ф. Г.* Модель двуногого шагающего аппарата (описание и управление движением.— Киев, 1978.— 56 с. (Препринт/ Ин-т математики АН УССР, № 23).
9. *Ларин В. Б.* Стабилизация двуногого шагающего аппарата.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1976, № 5, с. 4—13.
10. *Ларин В. Б.* О непрерывном и импульсном управлении горизонтальным движением двуногого шагающего аппарата.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1977, № 6, с. 54—64.
11. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.— 3-е изд.— М. : Наука, 1976.— 392 с.
12. *Чудинов П. С.* Одна задача стабилизации двуногой ходьбы. М., 1977.— 42 с.— (Препринт / Ин-т прикл. математики АН СССР, № 93).
13. *Chow C. K., Jacobson D. H.* Further studies of human locomotion: postural stability and control.— Math. Biosci., 1972, 15, p. 93—108.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
25.10.79

УДК 517.944 : 536.13

О. В. Побережный

ТЕПЛОВЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ ПОЛОСЫ И СЛОЯ

В настоящее время достаточно хорошо разработаны теории ньютоновских [7, 8], тепловых [2, 6], аналогов логарифмических [5] потенциалов простого и двойного слоев. Как известно, все эти потенциалы определены в бесконечных областях. В данной работе получены потенциалы для областей типа полосы и слоя, исследованы их свойства и приведены предельные значения потенциалов и их нормальных производных.

Пусть в двухмерной области G $(0 \leqslant z \leqslant h, |x| < \infty)$ задана гладкая кривая L, не выходящая на границы $z=0$ и $z=h$ области G. Считаем L линией Ляпунова [7]. Рассмотрим в области G функции

$$\Phi_\nu = (x,\ z,\ t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_L \int\limits_0^t \frac{\varphi(\sigma,\ \tau)}{t-\tau} R_\nu(r_{mk},\ t-\tau)\, d\sigma d\tau, \qquad (1)$$

$$\Psi_\nu(x,\ z,\ t) = \frac{1}{8\pi c} \int\limits_L \int\limits_0^t \frac{\psi(\sigma,\ \tau)}{(t-\tau)^2} R_\nu^1(r_{mk},\ t-\tau)\, d\sigma d\tau, \qquad (2)$$

где σ — элемент дуги кривой L; $m=1,\ 2;\ -\infty < k < \infty$;

$$R_\nu(r_{mk},\ t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(\nu,\ k)\,[R(r_{1k},\ t-\tau) + E_2(\nu)\, R(r_{2k},\ t-\tau)];$$

$$R_\nu^1(r_{mk},\ t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(\nu,\ k)\,[R(r_{1k},\ t-\tau)\, r_{1k} \cos(\widehat{r_{1k},\ n}) +$$

$$+ E_2(\nu)\, R(r_{2k},\ t-\tau)\, r_{2k} \cos(\widehat{r_{2k},\ n'})];$$

$$E_1(\nu,\ k) = (-1)^{(\nu-1)(\nu-2)\frac{\nu}{6}k};\quad E_2(\nu) = (-1)^{(\nu-2)(\nu-3)\frac{\nu}{2}};$$

$$r_{1k}^2 = (x-\xi)^2 + (z-\zeta+2kh)^2;\quad r_{2k}^2 = (x-\xi)^2 + (z+\zeta-2kh)^2;$$

$$R(r_{mk},\ t-\tau) = \exp\left[-\frac{r_{mk}^2}{4c(t-\tau)} - \varkappa^2 c(t-\tau)\right];$$

$M(x,\ z)$ — произвольная точка области G; $N(\xi,\ \zeta) \in L$; n — внутренняя нормаль к контуру L; n' — зеркальное отображение нормали относительно оси $z=0$ или $z=h$.