В соотношениях (22), (23) введены обозначения

$$R_\nu^2(r_{mk}^0,\ t-\tau)=\frac{\partial R_\nu(r_{mk}^0,\ t-\tau)}{\partial n^0},\quad I_\nu(r_{mk}^0,\ t-\tau)=\frac{\partial R_\nu^1(r_{mk}^0,\ t-\tau)}{\partial n^0},$$

$$r_{1k}^0=\sqrt{(\xi_0-\xi)^2+(\eta_0-\eta)^2+(\zeta_0-\zeta+2kh)^2},$$

$$r_{2k}^0=\sqrt{(\xi_0-\xi)^2+(\eta_0-\eta)^2+(\zeta_0+\zeta-2kh)^2},$$

$M_0(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0)$ и $N(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ — точки поверхности S.

Доказательства теорем 3, 4 аналогичны доказательствам теорем 1, 2.

Функции Φ_ν, Ψ_ν (и соответственно W_ν, Ω_ν) будем называть тепловыми потенциалами простого и двойного слоев в области G с оператором D. Как частные случаи, из Φ_ν и Ψ_ν получаем тепловые [2, 6] логарифмические потенциалы [7, 8] и их аналоги [5], а из W_ν и Ω_ν — трехмерные тепловые [2, 6], ньютоновские [7, 8] потенциалы простого и двойного слоев.

Метод построения и исследования потенциалов для областей типа полосы и слоя может быть использован при построении и исследовании потенциалов в более сложных областях с произвольным оператором, для которого можно построить фундаментальное решение. Некоторые из таких фундаментальных решений известны [1, 3, 4] или легко находятся для тел, имеющих форму параллелограмма, параллелепипеда, клина.

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений.— М. : Мир, 1964.— 517 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1967.— 436 с.
3. *Карслоу П., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел.— М. : Наука, 1964.— 487 с.
4. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— 363 с.
5. *Побережный О. В., Кит Г. С.*— Об определении температурного поля в пластинке с шайбой при неидеальном тепловом контакте между ними.— Инж.-физ. журн., 1968, **15**, № 4, с. 703—709.
6. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики.— М. : Высш. школа, 1964.— 559 с.
7. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики.— М. : Гостехтеориздат, 1954.— 444 с.
8. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала.— М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1946.— 324 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
17.12.80

УДК 539.385

В. Ф. Емец, А. П. Поддубняк

К ЗАДАЧЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КРУЧЕНИЯ УПРУГОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЛОСКОЙ КРУГЛОЙ ЩЕЛЬЮ

Кручение упругого однородного или двухслойного полупространства с плоской щелью или жестким включением рассматривалось в работах [5, 6, 10, 11] для случая относительно глубокого размещения дефектов. В данной работе исследуется кручение двухслойной полубесконечной среды, содержащей в плоскости сопряжения материалов дискообразную щель, в предположении слоя произвольной толщины.

Рассмотрим упругую систему, состоящую из слоя $-h<z<0$ и полупространства $z>0$, ослабленную в плоскости $z=0$ щелью радиуса a. Пусть имеем тело скручивания осесимметричными касательными напряжениями, приложенными к поверхности $z=-h$. Для определения смещений и напряжений в среде, и в частности коэффициента интенсивности касательных напряжений в конце щели, следует решить уравнения осесимметричного кручения [2] при следующих условиях:

$$u_\theta^j\to 0\quad (\sqrt{r^2+z^2}\to\infty,\ j=1,\ 2),\quad \tau_{\theta z}^j=0\quad (0\leqslant r<a,\ z=0,\ j=1,\ 2),$$
$$u_\theta^1=u_\theta^2,\quad \tau_{\theta z}^1=\tau_{\theta z}^2\quad (r>a,\ z=0),\quad \tau_{\theta z}^2=G_2T(r/a)\quad (r\geqslant 0,\ z=-h).\quad (1)$$

При этом характеристики, относящиеся к полупространству, обозначаем индексом «1», а принадлежащие слою — индексом «2».

С помощью интегрального преобразования Ханкеля [7] и метода парных интегральных уравнений [8] напряжения и смещения в среде можно выразить через функцию $\Phi(x)$, удовлетворяющую интегральному уравнению Фредгольма I рода

$$\int_{-1}^{1} \Phi(t) K\left(\frac{t-x}{\lambda}\right) dt = \lambda [t(x) + c] \qquad (|x| < 1, \ c = \mathrm{const}), \tag{2}$$

где

$$K(y) = \int_0^\infty L(\eta) \cos(\eta y)\, dy; \quad L(\eta) = (1 + \beta_0 \operatorname{cth} \eta)^{-1};$$

$$t(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(\eta x)}{\operatorname{sh}(\lambda\eta)} \overline{T}(\eta) L(\eta)\, d\eta; \quad \overline{T}(\eta) = \int_0^\infty \rho T(\rho) J_1(\eta\rho)\, d\rho;$$

$$\beta_0 = \beta_1/\beta_2; \quad \beta_j = G_j/(G_1 + G_2) \quad (j = 1, 2); \quad \lambda = h/a;$$

$J_1(x)$ — функция Бесселя.

В частности, для коэффициента интенсивности касательных напряжений на краю щели [9]

$$K_{\mathrm{III}} = \lim_{r \to a} [\sqrt{2\pi(r-a)}\, \tau^i_{\theta z}(r, 0)] \qquad (i = 1, 2) \tag{3}$$

справедлива зависимость

$$K_{\mathrm{III}} = -2\sqrt{\pi a}\, G_1 \beta_2 \Phi(1). \tag{4}$$

Для решения интегрального уравнения (2) воспользуемся методом большого и малого параметров λ [3].

Исследовав поведение ядра $K(y)$ при $0 < y < \infty$, можно убедиться, что при больших λ уравнение (5) приводится к интегральному уравнению Фредгольма II рода, к которому применим метод последовательных приближений. Выполнив необходимые вычисления, получим

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) \qquad (|x| < 1), \tag{5}$$

где

$$\Phi_0(x) = g_1(x); \quad g_1(x) = \frac{1}{\pi\beta_2} [t_1(x) + c];$$

$$\Phi_m(x) = \varkappa_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-2k-1} \sigma(2k+1) \int_{-1} \Phi_{m-1}(t)(t-x)^{2k} dt \ (m = 1, 2, \ldots); \tag{6}$$

$$\sigma(k) = \lambda^{-k} \sum_{l=0}^{\infty} \beta^l (1+l)^{-k}; \quad \beta = \beta_1 - \beta_2; \quad \varkappa_1 = 2\beta_1/\pi.$$

В частном случае, когда скручивающее напряжение имеет вид

$$T(\rho) = J_1(\rho), \tag{7}$$

найдем

$$\Phi(x) = \frac{\varkappa_2}{R(\lambda)} \left[c + \cos x + \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varkappa_1^n \varphi_{jmn} x^{2m} (\delta_{j1} + c\delta_{j2})\right] + O(\lambda^{-6}) \tag{8}$$

$$(|x| < 1).$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера;

$$R(\lambda) = \operatorname{sh}\lambda + \beta_0 \operatorname{ch}\lambda; \quad \varkappa_2 = \frac{1}{\pi\beta_2};$$

$$\varphi_{101} = 0{,}841\sigma(1) - 0{,}060\sigma(3) + 0{,}001\sigma(5);$$

$$\varphi_{111} = -0{,}210\sigma(3) + 0{,}090\sigma(5); \quad \varphi_{121} = 0{,}015\sigma(5);$$

$$\varphi_{201} = \sigma(1) - 0{,}083\sigma(3) + 0{,}012\sigma(5);$$

$$\varphi_{211} = -0{,}250\sigma(3) + 0{,}125\sigma(5); \quad \varphi_{221} = 0{,}083\sigma(5);$$

$$\varphi_{j0n} = \theta_{jn}(1)\sigma(1) - 0{,}250\theta_{jn}(3)\sigma(3) + 0{,}062\theta_{jn}(5)\sigma(5);$$

$$\varphi_{j1n} = -0{,}250\theta_{jn}(1)\sigma(3) + 0{,}375\theta_{jn}(3)\sigma(5);$$

$$\varphi_{j2n} = 0{,}062\theta_{jn}(1)\sigma(5); \tag{9}$$

$$\theta_{jn}(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_{jmn-1}}{2m+k} \qquad (j = 1, 2;\ n = 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Таблица 1

λ	β				
	−0,9	−0,5	0	0,5	0,9
1,0	0,334	0,213	0,0956	0,0275	0,0026
1,5	0,160	0,103	0,0513	0,0163	0,0019
1,6	0,139	0,0896	0,0444	0,0115	0,0017
2,5	0,0517	0,0345	0,0188	0,0074	0,0010
5	0,0042	0,0030	0,0001	0,0001	0,0000

Таблица 2

λ	β				
	−0,9	−0,5	0	0,5	0,9
0,1	1,70	1,26	0,838	0,420	0,0843
0,4	0,577	0,350	0,241	0,125	0,0252
0,8	0,356	0,180	0,121	0,0653	0,0133
1,0	0,326	0,142	0,0956	0,0482	0,0104
1,5	0,240	0,0858	0,0535	0,0283	0,0057
1,6	0,223	0,0772	0,0484	0,0247	0,0050
2,5	0,124	0,0358	0,0197	0,0098	0,0019

Постоянную c, входящую в формулы (6), (8), определяем из условия

$$\int_{-1}^{1} \Phi(t)\,dt = 0.$$

При малых параметрах λ решение интегрального уравнения (2) удобно представить в виде [4]

$$\Phi(x) = f(1)\,g(x, 1) - \int_{|x|}^{1} f'(\zeta)\,g(x, \zeta)\,d\zeta \qquad (|x| < 1), \tag{11}$$

где

$$f(\zeta) = \frac{1}{M(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \int_{0}^{\zeta} g(s, \zeta)\,g_1(s)\,ds; \quad M(\zeta) = [g(\zeta, \zeta)]^2; \tag{12}$$

функция $g(s, \zeta)$ определяется из интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\int_{-s}^{s} g(t, \xi)\,K\left(\frac{t-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi\lambda\beta_2 \qquad (|t| < s < 1). \tag{13}$$

Способом, примененным в работе [1], приближенное решение уравнения (13) находим в виде

$$g(s, \xi) = \lambda^{-1}\beta_1\sqrt{\xi^2 - s^2} + \frac{\xi}{2\sqrt{\xi^2 - s^2}} + \frac{\lambda}{16\beta_1\sqrt{\xi^2 - s^2}} + o(\lambda^{3/2}),$$

$$g(\xi, \xi) = \sqrt{\frac{\pi\beta_1\xi}{2\lambda}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi\lambda}{2\beta_1\xi}} + o(\lambda^2). \tag{14}$$

При скручивающей нагрузке (7) имеем

$$\Phi(x) = Ag(x, 1) + \frac{\varkappa_2}{R(\lambda)} \int_{|x|}^{1} g(x, \xi) J_1(\xi) d\xi, \tag{15}$$

где

$$A = -\frac{1}{4\beta_2 R(\lambda)} (0{,}1149\beta_1\lambda^{-1} + 0{,}1545 + 0{,}1106\lambda\beta_1^{-1}) \times$$
$$\times \left(\sqrt{\frac{2\beta_1}{\pi\lambda}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi\beta_1}}\right)^{-1}. \tag{16}$$

В табл. 1, 2 приведены значения коэффициентов интенсивности касательных напряжений $K_0 = K_{III}(G_1\sqrt{a})^{-1}$ в зависимости от параметров системы λ и β, рассчитанные по формулам (4), (8), (9), (14) — (16). Из этих результатов следует, что приближенные методы для относительно толстого и тонкого слоев перекрываются.

1. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Смешанные задачи механики сплошных сред, связанных с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера — Фока.— Прикл. математика и механика, 1972, 36, № 3, с. 494—504.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел.— М. : Физматгиз, 1963.— 686 с.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М. : Наука, 1974.— 456 с.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложение.— М. : Наука, 1967.— 508 с.
5. *Грилицкий Д. В., Поддубняк А. П.* Кручение двухслойной упругой среды с плоской щелью или жестким включением.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1975, № 1, с. 30—35.
6. *Проценко В. С.* Кручение упругого полупространства, ослабленного плоской круглой щелью.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1969, № 6, с. 67—71.
7. *Снеддон И.* Преобразования Фурье.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.— 667 с.
8. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики.— Л. : Наука, 1977.— 220 с.
9. *Irwin G. R.* Fracture.— In: Handbuch der Physik. Bd. 6. Berlin, Springer-Verlag, 1958, S. 551—590.
10. *Low R.* On the torsion of elastic half-spaces with embedded penny-shaped flaws.— Trans. ASME, 1972, E39, N 3, p. 786—795 (Рус. пер.: Тр. амер. о-ва инж.-мех., 1972, E 39, № 3, с. 151—155).
11. *Phawan G. K.* On the torsion of elastic half-space with a penny-shaped inclusion.— Indian J. Pure and Appl. Math., 1975, 6, N 3, p. 253—263.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
28.03.80

УДК 621.318.13

Р. В. Фильц

ОБЩИЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД

При расчетах магнитных полей в нелинейных безгистерезисных средах сеточными методами с использованием для решения нелинейных уравнений итерационных методов (Ньютона, скорейшего спуска), а также метода продолжения решения по параметру используются дифференциальные магнитные параметры этих сред — тензоры дифференциальной магнитной проницаемости μ или дифференциального удельного магнитного сопротивления ν. Для простейшей нелинейной среды (изотропной) эти параметры вычисляются по весьма простым формулам [2]. Для более сложных сред, например двухкомпонентного плоскошихтованного ферромагнетика (сталь — немагнитные прослойки), даже при оптимальном ориентировании осей