При скручивающей нагрузке (7) имеем

$$\Phi(x) = Ag(x, 1) + \frac{\varkappa_2}{R(\lambda)} \int_{|x|}^{1} g(x, \xi) J_1(\xi) d\xi, \tag{15}$$

где

$$A = -\frac{1}{4\beta_2 R(\lambda)} (0{,}1149\beta_1\lambda^{-1} + 0{,}1545 + 0{,}1106\lambda\beta_1^{-1}) \times$$
$$\times \left(\sqrt{\frac{2\beta_1}{\pi\lambda}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi\beta_1}} \right)^{-1}. \tag{16}$$

В табл. 1, 2 приведены значения коэффициентов интенсивности касательных напряжений $K_0 = K_{III} (G_1 \sqrt{a})^{-1}$ в зависимости от параметров системы λ и β, рассчитанные по формулам (4), (8), (9), (14) — (16). Из этих результатов следует, что приближенные методы для относительно толстого и тонкого слоев перекрываются.

1. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Смешанные задачи механики сплошных сред, связанных с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера — Фока.— Прикл. математика и механика, 1972, 36, № 3, с. 494—504.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел.— М. : Физматгиз, 1963.— 686 с.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М. : Наука, 1974.— 456 с.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложение.— М. : Наука, 1967.— 508 с.
5. *Грилицкий Д. В., Поддубняк А. П.* Кручение двухслойной упругой среды с плоской щелью или жестким включением.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1975, № 1, с. 30—35.
6. *Проценко В. С.* Кручение упругого полупространства, ослабленного плоской круглой щелью.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1969, № 6, с. 67—71.
7. *Снеддон И.* Преобразования Фурье.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.— 667 с.
8. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики.— Л. : Наука, 1977.— 220 с.
9. *Irwin G. R.* Fracture.— In: Handbuch der Physik. Bd. 6. Berlin, Springer-Verlag, 1958, S. 551—590.
10. *Low R.* On the torsion of elastic half-spaces with embedded penny-shaped flaws.— Trans. ASME, 1972, E39, N 3, p. 786—795 (Рус. пер.: Тр. амер. о-ва инж.-мех., 1972, E 39, № 3, с. 151—155).
11. *Phawan G. K.* On the torsion of elastic half-space with a penny-shaped inclusion.— Indian J. Pure and Appl. Math., 1975, 6, N 3, p. 253—263.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
28.03.80

УДК 621.318.13

Р. В. Фильц

ОБЩИЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД

При расчетах магнитных полей в нелинейных безгистерезисных средах сеточными методами с использованием для решения нелинейных уравнений итерационных методов (Ньютона, скорейшего спуска), а также метода продолжения решения по параметру используются дифференциальные магнитные параметры этих сред — тензоры дифференциальной магнитной проницаемости μ или дифференциального удельного магнитного сопротивления ν. Для простейшей нелинейной среды (изотропной) эти параметры вычисляются по весьма простым формулам [2]. Для более сложных сред, например двухкомпонентного плоскошихтованного ферромагнетика (сталь — немагнитные прослойки), даже при оптимальном ориентировании осей прямоугольной системы координат (в плоскости шихтовки и перпендикулярно к ней) громоздкость окончательных формул для вычисления элементов тензоров μ и ν [1] находится на пределе целесообразности их практического применения, а при произвольно ориентированной системе осей, а также для трехкомпонентной среды (две разные стали с немагнитными прослойками) и при оптимальном ориентировании осей координат — далеко за пределами такой целесообразности. С усложнением структуры и свойств среды резко возрастает объем аналитической работы по выводу общих выражений для дифференциальных магнитных параметров. Вместе с тем, как показал опыт применения магнитных параметров, в процессе расчета поля кроме компонентов векторов $\overline{H}$ и $\overline{B}$ и тензора μ (или ν) для сплошной среды неизбежно приходится вычислять и вспомогательные величины, характеризующие магнитное поле (для сплошной изотропной стали — модули векторов напряженности и индукции; для сплошной среды, эквивалентной слоистой — модули и компоненты векторов напряженности и индукции в ферромагнетике и т. д.), для чего используются частные производные этих величин по компонентам векторов $\overline{H}$ или $\overline{B}$. По существу эти частные производные также являются своеобразными магнитными параметрами среды (или ее составных частей), хотя и не определяются в литературе специальными терминами.

В связи с изложенным актуальной является разработка метода, обеспечивающего единый подход к определению магнитных параметров разных сред; приемлемую простоту окончательных формул (с ориентацией на применение ЦВМ); возможность вычисления всех фигурирующих в расчете поля частных производных, т. е. тензоров μ или ν и частных производных используемых вспомогательных величин.

Введем следующие понятия и определения.

Неявной магнитной характеристикой рассматриваемой среды будем называть систему n уравнений с $n + 3$ переменными, позволяющую рассчитать все компоненты вектора индукции (или напряженности) при любых заданных компонентах вектора напряженности (или индукции) этой среды. Представим эту систему одним нелинейным векторным уравнением

$$\overline{f}\,(\overline{B}, \overline{H}, \overline{M}) = 0, \tag{1}$$

где $\overline{M}$ — $(n - 3)$-мерный вектор, охватывающий все вспомогательные величины, вычисление которых необходимо (или целесообразно) для расчета $\overline{B}$ (или $\overline{H}$) при заданном $\overline{H}$ (или $\overline{B}$), и, следовательно, неизбежно фигурирующие в уравнении (1). Назовем эти величины внутренними координатами магнитного состояния среды.

Вектор $\overline{H}$ (или $\overline{B}$), который в процессе расчета поля рассматривается как независимая переменная, будем называть аргументом магнитной характеристики. Обозначим его $\overline{A}$. Тогда зависимыми переменными будут совокупности n скалярных величин, охватываемых векторами $\overline{F}_1 = [\overline{B}, \overline{M}]$ или $\overline{F}_2 = [\overline{H}, \overline{M}]$. Образовав из них n-мерный вектор-столбец $\overline{F}$ зависимых переменных, запишем уравнение (1) в виде

$$\overline{f}\,(\overline{F}, \overline{A}) = 0. \tag{1'}$$

Для нелинейных сред, как правило, структура уравнений (1) такова, что их либо нельзя решить относительно вектора $\overline{F}$, либо такое решение нецелесообразно ввиду чрезмерной громоздкости результата. Но если такое решение найти (численным способом либо аналитически), то в результате будет получена магнитная характеристика в явном виде

$$\overline{F} = \overline{F}\,(A), \tag{2}$$

или, короче, явная магнитная характеристика. Входящую в нее зависимость $\overline{B} = \overline{B}\,(\overline{A})$ или $\overline{H} = \overline{H}\,(\overline{A})$ (если $\overline{A}$ есть соответственно $\overline{H}$ или $\overline{B}$) будем называть внешней явной, а зависимость $\overline{M} = \overline{M}(\overline{A})$ — внутренней явной магнитной характеристикой.

Магнитными параметрами среды будем называть полную производную ее явной магнитной характеристики, т. е. матрицу

$$\Pi = \frac{d\overline{F}}{d\overline{A}}. \tag{3}$$

При этом производную внешней явной магнитной характеристики будем называть внешними магнитными параметрами, а производную внутренней магнитной характеристики — внутренними.

Для численного определения магнитных параметров нет необходимости располагать магнитной характеристикой в явном виде. Для этого достаточно воспользоваться неявной магнитной характеристикой (1). Действительно, полагая $\overline{A} = \overline{H}$, $\overline{F} = \overline{F}_1 = [\overline{B}, \overline{M}]$ и дифференцируя (1′) по $\overline{H}$, с учетом выражения (2) получаем

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{F}_1}\frac{d\overline{F}_1}{d\overline{H}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{H}} = 0. \tag{4}$$

Аналогично, полагая $\overline{A} = \overline{B}$, $\overline{F} = \overline{F}_2 = [\overline{H}, \overline{M}]$, находим

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{F}_2}\frac{d\overline{F}_2}{d\overline{B}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{B}} = 0. \tag{4′}$$

Здесь частные производные $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{F}_1}$ и $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{F}_2}$ — квадратные матрицы размерности $n \times n$. Из уравнений (4), (4′) соответственно находим

$$\frac{d\overline{F}_1}{d\overline{H}} = -\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{F}_1}\right)^{-1}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{H}}, \quad \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial \overline{B}} = -\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{F}_2}\right)^{-1}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{B}}. \tag{5}$$

Формулы (5) определяют в общем виде магнитные параметры нелинейной безгистерезисной среды, неявная магнитная характеристика которой представлена уравнением (1).

Пример 1. Неявная магнитная характеристика изотропного нелинейного ферромагнетика описывается уравнениями [1]

$$\begin{aligned} H_{fx}B_f - B_{fx}H_f &= 0,\\ H_{fy}B_f - B_{fy}H_f &= 0,\\ H_{fz}B_f - B_{fz}H_f &= 0,\\ H_f - H_f(B_f) &= 0,\\ B_f^2 - B_{fx}^2 - B_{fy}^2 - B_{fz}^2 &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

четвертое из которых отражает характеристику одномерного намагничивания, причем под символом $H_f(B_f)$ подразумевается аналитическая аппроксимация этой характеристики. Здесь вспомогательные переменные H_f и B_f можно было бы исключить и, следовательно, сократить число уравнений до трех, но, как легко убедиться, это нецелесообразно, так как упрощенные таким способом уравнения окажутся на самом деле сложнее, а это существенно отразится на объеме программы и числе арифметических операций при вычислении магнитных параметров.

Полагая

$$\overline{A} = \overline{B}_f = \mathrm{colon}\,(B_{fx}, B_{fy}, B_{fz}), \tag{7}$$

получаем

$$\overline{F}_1 = \mathrm{colon}\,(H_{fx}, H_{fy}, H_{fz}\ H_f\ B_f), \tag{8}$$

и в соответствии с уравнениями (5) непосредственно находим

$$\frac{d\bar{F}_1}{d\bar{B}_f}=\begin{vmatrix} \nu_{fxx} & \nu_{fxy} & \nu_{fxz} \\ \nu_{fyx} & \nu_{fyy} & \nu_{fyz} \\ \nu_{fzx} & \nu_{fzy} & \nu_{fzz} \\ \dfrac{\partial H_f}{\partial B_{fx}} & \dfrac{\partial H_f}{\partial B_{fy}} & \dfrac{\partial H_f}{\partial B_{fz}} \\ \dfrac{\partial B_f}{\partial B_{fx}} & \dfrac{\partial B_f}{\partial B_{fy}} & \dfrac{\partial B_f}{\partial B_{fz}} \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} B_f & & & -B_{fx} & H_{fx} \\ & B_f & & -B_{fy} & H_{fy} \\ & & B_f & -B_{fz} & H_{fz} \\ & & & & -\nu_{f\rho} \\ & & & & 2B_f \end{vmatrix}^{-1}\times\begin{vmatrix} -H_f & & \\ & -H_f & \\ & & -H_f \\ & & \\ -2B_{fx} & -2B_{fy} & -2B_{fz} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

где

$$\nu_{fjk}=\frac{\partial H_{fj}}{\partial B_{fk}}\ (j,\ k=x,\ y,\ z);\quad \nu_{f\rho}=\frac{dH_f}{dB_f}\,.$$

В матрице $\frac{d\bar{F}_1}{d\bar{B}_f}$ верхний блок — это внешние магнитные параметры (тензор дифференциальных удельных магнитных сопротивлений), а нижний — внутренние.

Пример 2. Неявная магнитная характеристика сплошной среды, эквивалентной слоистой среде, состоящей из листов ферромагнетика толщиной b_f, разделенных немагнитными прослойками толщиной b_0, при условии, что ось Ox прямоугольной системы координат перпендикулярна плоскости листов, описывается уравнениями [1]

$$H_x-\beta_0\nu_0B_x-\beta_fH_{fx}=0,$$

$$H_yB_f-B_{fy}H_f=0,$$

$$H_zB_f-B_{fz}H_f=0,$$

$$H_f-H_f(B_f)=0, \tag{10}$$

$$B_f^2-B_{fx}^2-B_{fy}^2-B_{fz}^2=0,$$

$$B_x-B_{fx}=0,$$

$$B_y - \beta_0\mu_0 H_y - \beta_f B_{fy} = 0,$$

$$B_z - \beta_0\mu_0 H_z - \beta_f B_{fz} = 0,$$

где $\beta_0 = \dfrac{b_0}{b_0 + b_f}$; $\beta_f = \dfrac{b_f}{b_0 + b_f}$; $\mu_0 = \dfrac{1}{\nu_0}$ — магнитная проницаемость пустоты. Полагая

$$\overline{A} = \overline{B} = \operatorname{colon}(B_x, B_y, B_z), \tag{11}$$

получаем

$$F_1 = \operatorname{colon}(H_x, H_y, H_z, H_f, B_f, B_{fx}, B_{fy}, B_{fz}). \tag{12}$$

В соответствии с выражениями (5) непосредственно находим

$$\begin{vmatrix} \nu_{xx} & \nu_{xy} & \nu_{xz} \\ \nu_{yx} & \nu_{yy} & \nu_{yz} \\ \nu_{zx} & \nu_{zy} & \nu_{zz} \\ \dfrac{\partial H_f}{\partial B_x} & \dfrac{\partial H_f}{\partial B_y} & \dfrac{\partial H_f}{\partial B_z} \\ \dfrac{\partial B_f}{\partial B_x} & \dfrac{\partial B_f}{\partial B_y} & \dfrac{\partial B_f}{\partial B_z} \\ \dfrac{\partial B_{fx}}{\partial B_x} & \dfrac{\partial B_{fx}}{\partial B_y} & \dfrac{\partial B_{fx}}{\partial B_z} \\ \dfrac{\partial B_{fy}}{\partial B_x} & \dfrac{\partial B_{fy}}{\partial B_y} & \dfrac{\partial B_{fy}}{\partial B_z} \\ \dfrac{\partial B_{fz}}{\partial B_x} & \dfrac{\partial B_{fz}}{\partial B_y} & \dfrac{\partial B_{fz}}{\partial B_z} \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & & & & H_x - \beta_0\nu_0 B_x & & & \\ & B_f & & -B_{fy} & H_y & & -H_f & \\ & & B_f & -B_{fz} & H_z & & & -H_f \\ & & & 1 & -\nu_{f\rho} & & & \\ & & & & 2B_f & -2B_{fx} & -2B_{fy} & -2B_{fz} \\ & & & & & 1 & & \\ & -\beta_0\mu_0 & & & & & -\beta_f & \\ & & -\beta_0\mu_0 & & & & & -\beta_f \end{vmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \left|\begin{array}{c|c|c} -\beta_0\nu_0 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \end{array}\right| . \qquad (13)$$

Полезно оценить относительную эффективность формул для магнитных параметров в рассмотренных примерах. В первом примере матрица $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{F}_1}$ треугольна, поэтому ее обращение и последующее умножение на матрицу $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{H}}$ приводит к весьма простым формулам для элементов матрицы магнитных параметров (эти формулы иным путем получены в работах [1, 2]). Значит, выполнение операций в правой части (9) в буквенном виде здесь целесообразно. Во втором примере матрица $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{F}_1}$ уже не является треугольной, поэтому результат выполнения алгебраических операций в матрице (13) оказывается весьма громоздким (см., например, формулы для тензора μ в работе [1], выведенные иным путем), т. е. здесь предпочтительно ограничиться при вычислении магнитных параметров непосредственно формулой (13) и все операции выполнять в численном виде, причем следует воспользоваться тем обстоятельством, что матрица $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{F}_1}$ содержит треугольный блок размерности 6×6. Вместе с тем сравнение трудоемкости вывода на основе матрицы (13) формул магнитных параметров, приведенных в работе [1], по сравнению с выводом, описанным в той же работе, указывает на преимущество изложенного здесь метода.

Легко убедиться, что в более сложных случаях, например для сплошной среды, эквивалентной слоистой, при произвольной ориентации осей координат по отношению к плоскости листов для трехкомпонентных сплошных сред аналитический путь определения магнитных параметров является практически неприемлемым из-за его громоздкости, и тогда преимущества предложенного численного метода приобретают принципиальное значение.

1. *Дышовый Р. В., Фильц Р. В., Гаврилюк Р. Б.* Расчет магнитной проницаемости и характеристик намагничивания слоистой ферромагнитной среды.— Теорет. электротехника, 1973, вып. 15, с. 141—147.
2. *Фильц Р. В.* До теорії електромагнітного поля в нелінійних середовищах.— Вісн. Льв. політехн. ін-ту, 1967, вип. 15, с. 22—29.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
10.10.79