УДК 536.24

О. Ф. Кривий[1✉], Ю. О. Морозов[2]

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПРУЖНОГО ПРОСТОРУ

Проблема побудови фундаментальних розв'язків для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору зведена до матричної задачі Рімана в просторі узагальнених функцій повільного зростання, для якої запропоновано метод розв'язування. В результаті отримано в явному вигляді вирази для компонент вектора фундаментального розв'язку, а також прості подання для компонент тензора напружень і вектора переміщень у площині з'єднання трансверсально-ізотропних пружних півпросторів, які знаходяться під дією зосереджених нормальних і дотичних сил. Досліджено поля напружень і переміщень у площині з'єднання півпросторів. Зокрема, для деяких комбінацій матеріалів наведено числові значення коефіцієнтів впливу зосереджених сил на напруження і переміщення. Встановлено також умови, при яких відсутні нормальні переміщення в площині з'єднання трансверсально-ізотропних пружних півпросторів.

Ключові слова: *фундаментальні розв'язки, матрична задача Рімана, трансверсально-ізотропний неоднорідний простір, узагальнені функції.*

Дослідження концентрації напружень в околі міжфазних і внутрішніх дефектів типу тріщин або включень у термопружних полях має важливе практичне значення. Для різних середовищ цій проблемі присвячено чимало робіт. Зокрема, в [3–7] розглянуто задачі стаціонарної термопружності для тіл з теплопроникним дисковим включенням, між поверхнями якого існує неідеальний тепловий контакт, а також задачі з тонким теплоактивним дисковим включенням. Задачі зведено до гіперсингулярних інтегральних рівнянь першого та другого роду, для яких отримано точні розв'язки.

У роботах [2, 9–12, 15, 18] неосесиметричні задачі пружності і термопружності про міжфазні концентратори напружень типу тріщин або жорстких включень у кусково-однорідних трансверсально-ізотропних просторах за допомогою методу сингулярних інтегральних співвідношень (СІС) [29] зведено до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) і запропоновано метод їх розв'язування. Аналогічний підхід застосовано в роботах [8, 13, 14, 20–22] до розв'язання задач про міжфазні і внутрішні дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах.

При математичній постановці і розв'язанні таких задач про дефекти необхідно задати граничні умови на самому дефекті такі, як напруження на берегах тріщини або переміщення на включенні. Оскільки при фізичній постановці задач про визначення полів напружень і переміщень в околі концентраторів напружень відомі напруження або переміщення на границі області, в деяких внутрішніх точках або на нескінченності (для необмежених тіл), то визначення граничних умов на дефекті є окремою проблемою.

У рамках лінійної теорії пружності для розв'язання цієї проблеми потрібно знати розподіл поля напружень і переміщень у відповідних кусково-однорідних тілах без дефектів за наявності об'ємних сил.

Зокрема, для кусково-однорідного ізотропного і трансверсально-ізотропного просторів такі розв'язки наведено відповідно в роботах [33] і [32], однак у праці [32] розв'язки мають достатньо громіздку структуру. Функції Ґріна для кусково-однорідних трансверсально-ізотропних просторів за наявності зосередженого теплового джерела і за відсутності термодифузії побудовано у [24], а за наявності термодифузії – у [30]. У роботах [23, 31] побудовано функції Ґріна для шаруватого термопружного середовища.

✉ krivoy-odessa@ukr.net

Ефективним методом розв'язання вказаної проблеми є метод фундаментальних розв'язків у просторі $\Im'(\mathbb{R}^3)$ узагальнених функцій повільного зростання. Зокрема, в роботах [16, 17] задачу побудови фундаментальних розв'язків для кусково-однорідних двовимірних анізотропних середовищ зведено до матричної задачі Рімана за частиною змінних у просторі $\Im'(\mathbb{R}^3)$ і запропоновано підхід до її розв'язання. У цій роботі вказаний підхід узагальнено для побудови в явному аналітичному вигляді фундаментальних розв'язків для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору, що дозволило дослідити вплив об'ємних навантажень на напруження і переміщення у площині з'єднання матеріалів.

1. Постановка задачі. Нехай в неоднорідному просторі, складеному із двох різних трансверсально-ізотопних півпросторів, повністю зчеплених у площині $z = 0$, діють об'ємні сили $\mathbf{P}(x, y, z) = (P_1, P_2, P_3)$, зосереджені в деяких областях розмірності n, $n = 0, 1, 2, 3$. Пружно-деформований стан простору описується вектором

$$\mathbf{v} = \{v_k(x, y, z)\}_{k=1,\ldots,9} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}, u, v, w\}. \tag{1}$$

Виходячи із рівнянь рівноваги і узагальненого закону Гука відносно компонент вектора $\mathbf{v}$, у просторі узагальнених функцій повільного зростання $\Im'(\mathbb{R}^3)$ запишемо таку крайову задачу:

$$\mathbf{D}[z, \partial_1, \partial_2, \partial_3]\mathbf{v} = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{v}, \mathbf{F} \in \Im'(\mathbb{R}^3). \tag{2}$$

$$v_k(x, y, +0) = v_k(x, y, -0), \qquad k = 1, \ldots, 9, \qquad k \neq 1, 2, 6, \tag{3}$$

$$v_k(x, y, x)\big|_{(x,y,z)\to\infty} = 0, \qquad k = 1, \ldots, 9. \tag{4}$$

Тут введено позначення

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{O}_{3\times3} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{D}_0^\top \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{F}^\top = \| -P_1, -P_2, -P_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \| \cdot \delta(\Omega),$$

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{O}_{3\times3} \\ \mathbf{O}_{3\times3} & \mathbf{S}_2 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{D}_0 = \begin{Vmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{Vmatrix} s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{Vmatrix},$$

$\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$; $s_{kj} = \theta(z)s_{kj}^+ + \theta(-z)s_{kj}^-$; Ω – область зосередження об'ємних сил; $\delta(\Omega)$ – характеристична функція області Ω із $\Im'(\mathbb{R}^3)$; $s_{kj}^{\pm}$ – коефіцієнти узагальненого закону Гука відповідно для верхнього $z > 0$ і нижнього $z < 0$ півпросторів; $\mathbf{O}_{3\times3}$ – нульова матриця розмірності 3×3.

2. Побудова фундаментального розв'язку. Компоненти вектора $\mathbf{v}$ (1) подамо так:

$$v_k(x, y, z) = \sum_{j=1}^{3} w_{kj} * F_j, \tag{5}$$

де функції $w_{kj}(x, y, z) \in \Im'(\mathbb{R}^3)$ – компоненти системи фундаментальних розв'язків $\mathbf{w}_j = \{w_{kj}\}_{k=1,\ldots,9}$, $j = 1, 2, 3$, задачі (2)–(4), тобто $\mathbf{w}_j$ є розв'язками системи крайових задач

$$\mathbf{D}[z,\partial_1,\partial_2,\partial_3]\mathbf{w}_j = \mathbf{f}^0, \qquad \mathbf{w}_j, \mathbf{f}^0 \in \Im'(\mathbb{R}^3), \tag{6}$$

$$w_{kj}(x,y,+0) = w_{kj}(x,y,-0), \quad k = 1,\ldots,9, \quad k \neq 1,2,6, \tag{7}$$

$$w_{kj}(x,y,x)\big|_{(x,y,z)\to\infty} = 0, \qquad k = 1,\ldots,9, \tag{8}$$

де $\mathbf{f}^0 = \{\delta_{kj}\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\}_{k=1}^9$, δ_{kj} – символ Кронекера.

Компоненти векторів $\mathbf{w}_j$ подамо у вигляді

$$w_{kj} = \theta(z)w_{kj} + \theta(-z)w_{kj} = w_{kj}^+ + w_{kj}^-,$$

де $w_{kj}^\pm \in \Im'(\mathbb{R}_\pm^3)$, $\mathbb{R}_\pm^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_\pm$, і застосуємо до матричного рівняння (6) оператор тривимірного перетворення Фур'є F_3 із $\Im'(\mathbb{R}^3)$. Тоді, враховуючи рівності (7), умови (8) і результати робіт [7, 13, 14. 16, 17, 19–22], відносно $W_{kj}^\pm(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = F_3[w_{kj}^\pm] \in \Im'(\mathbb{R}^3)$ отримаємо таке матричне рівняння:

$$\mathbf{M}^+\mathbf{W}_j^+ = \mathbf{M}^-\mathbf{W}_j^- + \mathbf{F}_j^0, \qquad \mathbf{W}_j^\pm, \mathbf{F}_j^0 \in \Im'(\mathbb{R}^3), \quad j = 1,2,3. \tag{9}$$

Тут позначено

$$\mathbf{W}_j^\pm = \{W_{kj}^\pm\}_{k=1}^9, \quad \mathbf{M}^\pm = \mathbf{D}[\pm 0, -i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3], \quad \mathbf{F}_j^0 = \{\delta_{kj}e_0\}_{k=1}^9,$$

де $e_0 = \exp(i\alpha_1 x_0 + i\alpha_2 y_0 + i\alpha_3 z_0)$.

Функції $w_{kj}^\pm \in \Im'(\mathbb{R}_\pm^3)$ допускають аналітичне подання [7, 13, 14, 16] за змінною α_3, тому матричне рівняння (9) є крайовою умовою матричної задачі Рімана за змінною α_3.

Враховуючи властивості узагальнених функцій і застосовуючи методику робіт [7, 13, 14. 16, 17, 19–22], крайові умови (9) запишемо так:

$$\mathbf{M}_\pm\mathbf{W}_j^\pm = \mathbf{F}_j^\pm, \qquad \mathbf{W}_j^\pm, \mathbf{F}_j^\pm \in \Im'(\mathbb{R}^3), \quad j = 1,2,3, \tag{10}$$

де

$$\mathbf{F}_j^\pm = \{f_{kj}^\pm\}_{k=1,\ldots,9}, \qquad f_{kj}^\pm = \theta(\pm z_0)e_0\delta_{kj} \mp \frac{1}{2}\chi_k,$$

$$\boldsymbol{\chi} = \{\chi_k\}_{k=1,\ldots,9} \in \Im'(\mathbb{R}^2), \qquad \chi_k = 0, \qquad k = 4,5,9,$$

$\chi_k(\alpha_1,\alpha_2)$ – невідомі функції із $\Im'(\mathbb{R}^2)$, для визначення яких використаємо перетворені за Фур'є умови (7).

Подамо розшукувані функції у вигляді

$$W_{7j}^\pm = -(-i\alpha_2)\Psi_{1j}^\pm - (-i\alpha_1)\Psi_{2j}^\pm, \qquad W_{8j}^\pm = (-i\alpha_1)\Psi_{1j}^\pm - (-i\alpha_2)\Psi_{2j}^\pm, \tag{11}$$

$$W_{5j}^\pm = -(-i\alpha_2)T_{1j}^\pm - (-i\alpha_1)T_{2j}^\pm, \qquad W_{4j}^\pm = (-i\alpha_1)T_{1j}^\pm - (-i\alpha_2)T_{2j}^\pm, \tag{12}$$

де $\Psi_{kj}^\pm$, $T_{kj}^\pm$, $k = 1,2$, – нові невідомі функції. Тоді матричне рівняння (10) допускає розбиття на два незалежні рівняння

$$\mathbf{L}_\pm\mathbf{U}_j^\pm = \mathbf{F}_{j1}^\pm, \qquad \mathbf{G}_\pm\mathbf{V}_j^\pm = \mathbf{F}_{j2}^\pm. \tag{13}$$

Тут введено позначення

$$\mathbf{U}_j^\pm = \{U_{kj}^\pm\}_{k=1,2} = \{T_{1j}^\pm, \Psi_{1j}^\pm\}, \quad \mathbf{V}_j^\pm = \{V_{kj}^\pm\}_{k=1,4} = \{W_{3j}^\pm, T_{2j}^\pm, \Psi_{2j}^\pm, W_{9j}^\pm\},$$

$$\mathbf{F}_{j1}^\pm = \{(-i\alpha_2)f_{1j}^\pm - (-i\alpha_1)f_{2j}^\pm, (-i\alpha_2)f_{7j}^\pm - (-i\alpha_1)f_{8j}^\pm\},$$

$$\mathbf{F}_{j2}^{\pm} = \{f_{3j}^{\pm}, (-i\alpha_1)f_{1j}^{\pm} + (-i\alpha_2)f_{2j}^{\pm}, (-i\alpha_2)f_{8j}^{\pm} + (-i\alpha_1)f_{7j}^{\pm}, f_{6j}^{\pm}\},$$

$$\mathbf{G}_{\pm} = \{g_{kj}^{\pm}\}_{k,j=1,\ldots,4}, \qquad g_{11}^{\pm} = g_{44}^{\pm} = (-i\alpha_3), \qquad g_{12}^{\pm} = r^2,$$

$$g_{22}^{\pm} = g_{33}^{\pm} = (-i\alpha_3)r^2, \qquad g_{kj}^{\pm} = g_{jk}^{\pm} = 0, \quad k = 1,2, \quad j = 3,4,$$

$$g_{21}^{\pm} = -\frac{c_{13}^{\pm}}{c_{33}^{\pm}} g_{12}^{\pm}, \qquad g_{23}^{\pm} = -\frac{\overline{c}_{13}^{\pm} + c_{13}^{\pm\,2}}{c_{33}^{\pm}} r^4, \qquad g_{32}^{\pm} = -\frac{1}{c_{44}^{\pm}} g_{12}^{\pm},$$

$$g_{34}^{\pm} = -g_{12}^{\pm}, \qquad g_{41}^{\pm} = -\frac{1}{c_{33}^{\pm}}, \qquad g_{43}^{\pm} = \frac{c_{13}^{\pm}}{c_{33}^{\pm}} g_{12}^{\pm},$$

$$\mathbf{L}_{\pm} = \{\ell_{kj}^{\pm}\}_{k,j=1,2}, \qquad \ell_{11}^{\pm} = (-i\alpha_3)r^{-2}, \qquad \ell_{22}^{\pm} = (-i\alpha_3)r^2,$$

$$\ell_{21}^{\pm} = -\frac{r^2}{c_{44}^{\pm}}, \qquad \ell_{21}^{\pm} = -c_{66}r^4, \quad r^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Безпосередньо із рівнянь (13) отримаємо $\mathbf{U}_j^{\pm} = \mathbf{L}_{\pm}^{-1}\mathbf{F}_{j1}^{\pm}$, $\mathbf{V}_j^{\pm} = \mathbf{G}_{\pm}^{-1}\mathbf{F}_{j2}^{\pm}$, де $\mathbf{L}_{\pm}^{-1} = \{\ell_{kj}^{*,\pm}\}_{k,j=1,2}$, $\mathbf{G}_{\pm}^{-1} = \{g_{kj}^{*,\pm}\}_{i,j=1,\ldots,4}$ Далі, скориставшись поданнями (11), (12) після застосування оберненого перетворення Фур'є, компоненти векторів $\mathbf{u}_j^{\pm} = \{u_{kj}^{\pm}\}_{k=1,2} = F_3^{-1}[\mathbf{U}_j^{\pm}]$, $\mathbf{v}_j^{\pm} = \{v_{kj}^{\pm}\}_{k=1,\ldots,4} = F_3^{-1}[\mathbf{V}_j^{\pm}]$, $j = 1,2$, подамо так:

$$u_{kj} = \vartheta_{1j}\left\{ \frac{S_{k1}(r_0^2 + (\xi_0|z-z_0|)^2)^{(2-k)/2}}{\xi_0|z-z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_0|z-z_0|)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\tilde{\beta}_k(r_0^2 + (\hat{\xi}_0 z + \breve{\xi}_0 z_0)^2)^{(2-k)/2}}{\hat{\xi}_0|z| + \breve{\xi}_0|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\hat{\xi}_0 z + \breve{\xi}_0 z_0)^2}} \right\}, \qquad k = 1,2,$$

$$v_{1j} = -\vartheta_{2j}\sum_{n=1}^{2} \frac{R_{1,2,n}}{(r_0^2 + (\xi_n|z-z_0|)^2)^{3/2}} + \sum_{n,m=1}^{2} \frac{\beta_{1,n,m}^2}{(r_0^2 + (\hat{\xi}_n z + \breve{\xi}_m z_0)^2)^{3/2}},$$

$$v_{kj} = \vartheta_{2j}\sum_{n,m=1}^{2}\left\{ \frac{-R_{k,2,n}(r_0^2 + (\xi_n|z-z_0|^2))^{-1/2}}{|z-z_0|\xi_n^+ + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n|z-z_0|)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_{k,n,m}^2(r_0^2 + (\hat{\xi}_n z + \breve{\xi}_m z_0)^2)^{-1/2}}{\hat{\xi}_n|z| + \breve{\xi}_m|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\hat{\xi}_n z + \breve{\xi}_m z_0)^2}} \right\}, \qquad k = 2,4,$$

$$v_{3j} = \vartheta_{2j}\sum_{n,m=1}^{2}\left\{ \frac{-R_{3,2,n}}{|z-z_0|\xi_n^+ + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n|z-z_0|)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_{3,n,m}^2}{\hat{\xi}_n|z| + \breve{\xi}_m|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\hat{\xi}_n z + \breve{\xi}_m z_0)^2}} \right\},$$

$$v_{13} = -\sum_{n=1}^{2} \frac{|z-z_0|\hat{R}_n}{(r_0^2 + (\xi_n|z-z_0|)^2)^{3/2}} + \sum_{n,m=1}^{2} \frac{z\hat{\beta}_{n,m} + z_0\breve{\beta}_{n,m}}{(r_0^2 + (\hat{\xi}_n z + \breve{\xi}_m z_0)^2)^{3/2}},$$

$$v_{k3} = -\sum_{n=1}^{2} \frac{R_{k,1,n}}{(r_0^2 + (\xi_n|z-z_0|)^2)^{1/2}} + \sum_{n,m=1}^{2} \frac{\beta_{k,n,m}^1}{(r_0^2 + (\hat{\xi}_n z + \breve{\xi}_m z_0)^2)^{1/2}}, \quad k = 2,4,$$

$$v_{33} = \sum_{n=1}^{2} R_{3,1,n} \left(\left(\ln\frac{c}{2} + \ln\left(|z - z_0| \xi_n + \sqrt{r_0^2 + (\xi_m |z - z_0|)^2} \right) \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n,m=1}^{2} \beta^1_{3,n,m} \left(\ln\frac{c}{2} + \ln\left(\widehat{\xi}_m |z| + \breve{\xi}_m |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\widehat{\xi}_n z + \breve{\xi}_m z_0)^2} \right) \right) \right).$$

Тут введено такі позначення:

$$\vartheta_{1j} = \frac{(y - y_0)^{2-j}}{(x - x_0)^{1-j}}, \quad \vartheta_{2j} = \frac{(x - x_0)^{2-j}}{(y - y_0)^{1-j}}, \quad S^{\pm}_{pk} = \frac{\tilde{\ell}^{\pm}_{pk}(\xi_0)}{2\xi_0},$$

$$S_{pk} = \theta(z, z_0) S^{-}_{pk} + \theta(-z, -z_0) S^{+}_{pk}, \; p, k = 1, 2, \; \tilde{\ell}^{\pm}_{11} = \tilde{\ell}^{\pm}_{22} = \pm\xi_0, \; \tilde{\ell}^{\pm}_{21} = -\frac{1}{c^{\pm}_{44}},$$

$$\tilde{\ell}^{\pm}_{12} = -c^{\pm}_{66}, \quad \widehat{R}_n = \theta(z, z_0) \widehat{R}^{+}_n + \theta(-z, -z_0) \widehat{R}^{-}_n, \quad \widehat{R}^{\pm}_n = \xi^{\pm}_n R^{*,\mp}_{1,1,n},$$

$$\tilde{\beta}_p = -\theta(z, z_0) \tilde{\beta}^{++}_p + \theta(z, -z_0) \tilde{\beta}^{+-}_p + \theta(-z, z_0) \tilde{\beta}^{-+}_p - \theta(-z, -z_0) \tilde{\beta}^{+-}_p, \; p = 1, 2,$$

$$\widehat{\beta}_{n,m} = -\theta(z, z_0) \widehat{\beta}^{++}_{n,m} + \theta(z, -z_0) \widehat{\beta}^{+-}_{n,m} + \theta(-z, z_0) \widehat{\beta}^{-+}_{n,m} - \theta(-z, -z_0) \widehat{\beta}^{--}_{n,m},$$

$$\breve{\beta}_{n,m} = -\theta(z, z_0) \breve{\beta}^{++}_{n,m} + \theta(z, -z_0) \breve{\beta}^{+-}_{n,m} + \theta(-z, z_0) \breve{\beta}^{-+}_{n,m} - \theta(-z, -z_0) \breve{\beta}^{--}_{n,m},$$

$$\beta^{p}_{k,n,m} = -\theta(z, z_0) \beta^{p,++}_{k,n,m} + \theta(z, -z_0) \beta^{p,+-}_{k,n,m} + \theta(-z, z_0) \beta^{p,-+}_{k,n,m} - \theta(-z, -z_0) \beta^{p,--}_{k,n,m},$$

$$p = 1, 2,$$

$$\widehat{\beta}^{+\pm}_{n,m} = \xi^{+}_n \beta^{1,+\pm}_{1,n,m}, \quad \breve{\beta}^{+\pm}_{n,m} = \xi^{\pm}_m \beta^{1,+\pm}_{1,n,m}, \quad \widehat{\beta}^{-\mp}_{n,m} = \xi^{\mp}_n \beta^{1,-\mp}_{1,n,m}, \quad \breve{\beta}^{-\mp}_{n,m} = \xi^{-}_m \beta^{1,-\mp}_{1,n,m},$$

$$\widehat{\xi}_n = \theta(z, z_0) \xi^{+}_n + \theta(z, -z_0) \xi^{+}_n + \theta(-z, z_0) \xi^{-}_n - \theta(-z, -z_0) \xi^{-}_n, \qquad n = 0, 1, 2,$$

$$\breve{\xi}_m = \theta(z, z_0) \xi^{+}_m - \theta(z, -z_0) \xi^{-}_m - \theta(-z, z_0) \xi^{+}_m + \theta(-z, -z_0) \xi^{-}_m, \quad m = 0, 1, 2,$$

$$R_{k,p,n} = \theta(z, z_0) R^{*,-}_{k,p,n} + \theta(-z, -z_0) R^{*,+}_{k,p,n}, \quad k = 2, 3, 4, \quad p = 1, 2,$$

$$\tilde{\alpha}^{+}_p = \sum_{k=1}^{2} \tilde{a}^{*}_{pk} S^{+}_{k1}, \quad \tilde{\alpha}^{-}_p = \sum_{k=1}^{2} \tilde{a}^{*}_{pk} S^{-}_{k1}, \quad \tilde{\beta}^{+\pm}_p = \sum_{k=1}^{2} S^{+}_{pk} \alpha^{\pm}_k, \quad \tilde{\beta}^{-\pm}_p = \sum_{k=1}^{2} S^{-}_{pk} \alpha^{-}_k,$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1} = \{\tilde{a}^{*}_{kj}\}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{H}^{+} - \mathbf{H}^{-}, \quad \mathbf{H}^{\pm} = \pm\{S^{\pm}_{kp}\}_{k,p=1,2}, \quad \mathbf{A}_0^{-1} = \{a^{*}_{kj}\}_{k,j=1,\dots,4},$$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{N}^{+} - \mathbf{N}^{-}, \quad \mathbf{N}^{\pm} = \pm\{R^{\pm}_{k,p}\}_{k,p=1,\dots,4}, \quad R^{\pm}_{p,k} = \sum_{n=1}^{2} R^{*,\pm}_{p,k,n}, \quad \xi^{\pm}_0 = \sqrt{\frac{c^{\pm}_{66}}{c^{\pm}_{44}}},$$

$$R^{*,\pm}_{p,k,n} = \frac{\tilde{g}^{\pm}_{pk}(\xi_n)}{2\xi_n(\xi_{3-n} + \xi_n)(\xi_n - \xi_{3-n})}, \quad \alpha^{p,+}_{\ell,n} = \sum_{j=1}^{4} a^{*}_{\ell j} R^{*,-}_{j,p,n}, \quad \alpha^{p,-}_{4,n} = \sum_{j=1}^{4} a^{*}_{4j} R^{*,+}_{j,p,n},$$

$$\beta^{p,+\pm}_{\ell,n,m} = \sum_{k=1}^{4} R^{*,+}_{\ell,k,n} \alpha^{p,\pm}_{k,m}, \quad \beta^{p,-\pm}_{\ell,n,m} = \sum_{k=1}^{4} R^{*,-}_{\ell,k,n} \alpha^{p,\pm}_{k,m}, \quad \xi_0 = \theta(z_0) \xi^{+}_0 + \theta(-z_0) \xi^{-}_0,$$

$$\tilde{g}^{\pm}_{11}(\xi_n) = \tilde{g}^{\pm}_{44}(\xi_n) = \mp\xi_n(-\overline{c}_{34} \xi_n^2 + \overline{c}_{13} - c_{13}^2 - c_{13} c_{44}), \quad \overline{c}_{34} = c_{33} c_{44},$$

$$\overline{c}_{13} = c_{11} c_{33}, \quad \xi_n = \theta(z) \xi^{+}_n + \theta(-z) \xi^{-}_n, \quad \tilde{g}^{\pm}_{12}(\xi_n) = -(c_{33} \xi_n + c_{13}^2) c_{44},$$

$$\tilde{g}^{\pm}_{34}(\xi_n) = (c_{33} \xi_n^2 + c_{13}^2) c_{44}, \quad \tilde{g}^{\pm}_{41}(\xi_n) = c_{44} \xi_n^2 - c_{11}, \quad \tilde{g}^{\pm}_{42}(\xi_n) = \mp(c_{13}^2 + c_{44}) \xi_n,$$

$$\tilde{g}_{31}^{\pm}(\xi_n) = \pm(c_{13}^2 + c_{44})\xi_n, \quad \tilde{g}_{32}^{\pm}(\xi_n) = c_{33}\xi_n^2 - c_{44}, \quad \tilde{g}_{23}^{\pm}(\xi_n) = (\overline{c}_{13} - c_{13}^2)c_{44}\xi_n^2,$$

$$\tilde{g}_{14}^{\pm}(\xi_n) = -(\overline{c}_{13} - c_{13}^2)c_{44}, \qquad \tilde{g}_{22}^{\pm}(\xi_n) = \tilde{g}_{33}^{\pm}(\xi_n) = \pm(c_{33}\xi_n^2 + c_{13}^2)c_{44}\xi_n,$$

$$\tilde{g}_{k,k+2}^{\pm}(\xi_n) = \mp(-1)^k(\overline{c}_{13} - c_{13}^2)c_{44}\xi_n,$$

$$\tilde{g}_{2k,2k-1}^{\pm}(\xi_n) = (-1)^{k-1}(c_{13}\xi_n^2 + c_{11})c_{44}, \; k = 1,2, \quad c_{kj} = \theta(z)c_{kj}^{+} + \theta(-z)c_{kj}^{-},$$

$$c_{33}^{\pm}c_{44}^{\pm}(\xi_k^{\pm})^4 + [c_{13}^{\pm}(c_{13}^{\pm} + 2c_{44}^{\pm}) - c_{11}^{\pm}c_{33}^{\pm}](\xi_k^{\pm})^2 + c_{11}^{\pm}c_{44}^{\pm} = 0, \quad k = 1,2.$$

3. Поля напружень і переміщень у площині з'єднання півпросторів. Поклавши в фундаментальних розв'язках $z = 0$, отримаємо розподіл нормальних і дотичних напружень та переміщень у площині з'єднання півпросторів, коли в довільній точці $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ діє зосереджена сила $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$, $(P_k \ge 0)$. Зокрема, коли сила $\mathbf{P}$ діє тільки в напрямку осі X: $\mathbf{P} = (P_1, 0, 0)$ або Y: $\mathbf{P} = (0, P_2, 0)$, будемо мати $(j = 1,2)$:

$$\sigma_z = P_j \sum_{n=1}^{2} B_{1,n} \frac{\vartheta_{2j} z_0}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}},$$

$$\tau_{yz} = -P_j \left\{ -\partial_1 \frac{\vartheta_{1j}(-1)^{3-j}\left(r_0^2 + (\xi z_0)^2\right)^{-1/2} S_1}{\xi|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi z_0)^2}} + \right.$$

$$\left. + \partial_2 \sum_{n=1}^{2} \frac{\vartheta_{2j} B_{2,n}\left(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2\right)^{-1/2}}{\xi_n|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}} \right\},$$

$$\tau_{xz} = -P_j \left\{ \partial_2 \frac{\vartheta_{1j}(-1)^j S_1\left(r_0^2 + (\xi z_0)^2\right)^{-1/2}}{\xi|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi z_0)^2}} + \right.$$

$$\left. + \partial_1 \sum_{n=1}^{2} \frac{\vartheta_{2j} B_{2,n}\left(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2\right)^{-1/2}}{\xi_n|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}} \right\},$$

$$u = -P_j \left\{ -\partial_2 \frac{S_2 \vartheta_{1j}}{\xi|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi z_0)^2}} + \partial_1 \sum_{n=1}^{2} \frac{B_{3,n}\vartheta_{2j}}{\xi_n|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}} \right\},$$

$$v = -P_j \left\{ -\partial_1 \frac{S_2 \vartheta_{1j}}{\xi|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi z_0)^2}} + \partial_2 \sum_{n=1}^{2} \frac{B_{3,n}\vartheta_{2j}}{\xi_n|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}} \right\},$$

$$w = P_j \sum_{n=1}^{2} \frac{B_{4,n}\vartheta_{2j}}{\sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}\left(\xi_n|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}\right)}.$$

У випадку дії сили $\mathbf{P}$ тільки в напрямку осі Z: $\mathbf{P} = (0, 0, P_3)$, запишемо

$$\sigma_z = -P_3 \sum_{n=1}^{2} \frac{A_{1,n} z_0}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}},$$

$$\tau_{xz} = P_3 \sum_{n=1}^{2} \frac{A_{2,n}(x - x_0)}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}}, \qquad \tau_{yz} = P_3 \sum_{n=1}^{2} \frac{A_{2,n}(y - y_0)}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}},$$

$$u = P_3 \sum_{n=1}^{2} \frac{A_{3,n}(x - x_0)}{\sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}\left(\xi_n|z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}\right)},$$

$$v = P_3 \sum_{n=1}^{2} \frac{A_{3,n}(y - y_0)}{\sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}\,\left(\xi_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}\,\right)} \,,$$

$$w = -P_3 \sum_{n=1}^{2} \frac{A_{4,n}}{\sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2}} \,, \qquad (14)$$

де

$$S_p = \theta(z_0) S_{p1}^{+} + \theta(-z_0) S_{p1}^{-}, \quad A_{p,n} = \theta(z_0) A_{p,n}^{+} + \theta(-z_0) A_{p,n}^{-}, \quad p = 1, 2 \,,$$

$$B_{p,n} = \theta(z_0) B_{p,n}^{+} + \theta(-z_0) B_{p,n}^{-}, \quad A_{1,n}^{+} = -\widehat{R}_n^{+} + \widehat{\beta}_n^{++}, \quad A_{1,n}^{-} = -\breve{\beta}_n^{+-} \,,$$

$$\widehat{\beta}_n^{\pm\pm} = \sum_{m=1}^{2} \widehat{\beta}_{m,n}^{\pm\pm}, \quad \breve{\beta}_n^{\pm\mp} = \sum_{m=1}^{2} \breve{\beta}_{m,n}^{\pm\mp}, \quad \beta_{p,k,n}^{\pm\pm} = \sum_{m=1}^{2} \beta_{k,m,n}^{p,\pm\pm} \,,$$

$$\beta_{p,k,n}^{\pm\mp} = \sum_{m=1}^{2} \beta_{k,m,n}^{p,\pm\mp}, \quad A_{k,n}^{+} = -R_{k,1,n}^{-} + \beta_{1,k,n}^{++}, \quad A_{k,n}^{-} = -\beta_{1,k,n}^{+-}, \quad k = 2, 3, 4 \,,$$

$$B_{k,n}^{+} = -R_{k,2,n}^{+} + \beta_{2,k,n}^{++}, \quad B_{k,n}^{-} = -\beta_{2,k,n}^{+-}, \quad k = 1, \ldots, 4 \,.$$

У табл. 1, табл. 2 наведено значення коефіцієнтів впливу $A_{p,n}^{\pm}$ із подань (14) для деяких комбінацій трансверсально-ізотропних матеріалів [1]. Зокрема, для кераміки A ($BaTiO_3$) – матеріал ***m1***; кераміки B ($BaTiO_3$+5%$CaTiO_3$) – матеріал ***m2***; ітрію – матеріал ***m3***; магнію – матеріал ***m4***; берилу – матеріал ***m5***; кобальту – матеріал ***m6***; берилію – матеріал ***m7***; цинку – матеріал ***m8***.

Таблиця 1. Значення коефіцієнта $A_{p,n}^{+}$, $n = 1, 2$.

Комбінації матеріалів	$A_{1,n}^{+}$	$A_{2,n}^{+}$	$A_{3,n}^{+} \cdot 10^{-11}$	$A_{4,n}^{+} \cdot 10^{-11}$
m1 – m2	$0.365 \mid -0.72$	$-0.470 \mid 0.566$	$-0.543 \mid 0.541$	$0.354 \mid -0.842$
m3 – m2	$0.061 \mid -0.182$	$-0.094 \mid 0.121$	$-0.113 \mid 0.103$	$0.053 \mid -0.222$
m5 – m2	$-0.456 \pm i0.488$	$0.142 \mp i0.657$	$0.025 \mp i0.765$	$-0.621 \pm i0.462$
m3 – m4	$0.095 \mid -0.26$	$-0.132 \mid 0.191$	$-0.413 \mid 0.4574$	$0.233 \mid -0.799$
m6 – m5	$0.524 \mid -2.43$	$-0.864 \mid 1.65$	$-0.914 \mid 1.09$	$0.368 \mid -2.787$
m1 – m8	$0.561 \mid -1.062$	$-0.900 \mid 1.117$	$-1.223 \mid 1.267$	$0.990 \mid -2.278$
m3 – m8	$0.103 \mid -0.288$	$-0.184 \mid 0.252$	$-0.258 \mid 0.252$	$0.169 \mid -0.654$
m6 – m2	$0.490 \mid -2.345$	$-0.800 \mid 1.487$	$-0.970 \mid 1.24$	$0.408 \mid -2.887$
m8 – m4	$-0.105 \pm i0.121$	$0.028 \mp i0.147$	$0.0267 \mp i0.448$	$-0.373 \pm i0.302$

Таблиця 2. Значення коефіцієнта $A_{p,n}^{-}$, $n = 1, 2$.

Комбінації матеріалів	$A_{1,n}^{-}$	$A_{2,n}^{-}$	$A_{3,n}^{-} \cdot 10^{-11}$	$A_{4,n}^{-} \cdot 10^{-11}$
m1 – m2	$0.195 \mp i0.875$	$0.0549 \mp i0.9$	$-0.001 \pm i1.01$	$-0.281 \pm i0.977$
m3 – m2	$0.142 \mp i0.694$	$0.0564 \mp i0.71$	$-0.02 \mp i1.362$	$-0.36 \pm i1.321$
m5 – m2	$0.406 \mp i1.831$	$0.122 \mp i1.952$	$0.022 \pm i1.768$	$-0.535 \pm i1.774$
m3 – m4	$-0.062 \mid 0.178$	$-0.09 \mid 0.123$	$0.201 \mid -1.77$	$0.09 \mid -0.398$
m6 – m5	$0.6 \mp i0.586$	$0.135 \mp i0.811$	$0.03 \pm i0.515$	$-0.414 \pm i0.248$
m1 – m8	$0.156 \mp i0.156$	$0.038 \mp i0.227$	$0.007 \pm i0.282$	$-0.227 \pm i0.147$
m3 – m8	$0.123 \mp i0.139$	$0.044 \mp i0.178$	$-0.004 \pm i0.38$	$-0.318 \pm i0.287$
m6 – m2	$0.525 \mp i2.2$	$0.101 \mp i2.2$	$0.0394 \pm i1.258$	$-0.366 \pm i1.127$
m8 – m4	$-0.057 \mid 0.173$	$-0.105 \mid 0.137$	$0.148 \mid -0.126$	$0.0923 \mid -0.0402$

Якщо сила $\mathbf{P}$ розміщена на осі Z: $\mathbf{P} = (0,0,P_3)$, то подання (14) запишемо так:

$$\sigma_z = -P_3 \frac{A_{10}}{z_0^2}, \quad \tau_{xz} = P_3 \frac{A_{20} x}{|z_0^3|}, \quad \tau_{yz} = P_3 \frac{A_{20} y}{|z_0^3|}, \tag{15}$$

$$u = P_3 \frac{A_{30} x}{z_0^2}, \quad v = P_3 \frac{A_3^0 y}{z_0^2}, \quad w = -P_3 \frac{A_{40}}{|z_0|}, \tag{16}$$

де

$$A_{k0} = \sum_{n=1}^{2} \frac{A_{k,n}}{\xi_n^3}, \quad k = 1,2, \quad A_{30} = \sum_{n=1}^{2} \frac{A_{3,n}}{2\xi_n^2}, \quad A_{40} = \sum_{n=1}^{2} \frac{A_{4,n}}{\xi_n}.$$

Нехай уздовж осі Z в різних півпросторах діють дві протилежно направлені зосереджені сили $\mathbf{P}^{\pm} = (0,0,\pm P_3^{\pm})$ відповідно в точках $M^{\pm}(0,0,z_0^{\pm})$. Тоді нормальні переміщення при $z = 0$ подамо так:

$$w = -P_3^+ A_{40}^+ \frac{1}{z_0^+} + P_3^- A_{40}^- \frac{1}{|z_0^-|}.$$

Звідси визначаємо умову, коли нормальні переміщення w у площині з'єднання півпросторів дорівнюють нулеві:

$$\frac{P_3^+}{P_3^-} \frac{|z_0^-|}{z_0^+} = æ_0, \qquad æ_0 = \frac{A_{40}^-}{A_{40}^+}. \tag{17}$$

У табл. 3 наведено значення коефіцієнта $æ_0$ для деяких комбінацій матеріалів.

Таблиця 3. Значення коефіцієнта $æ_0$.

Комбінації матеріалів	***m1 − m2***	***m5 − m2***	***m8 − m4***	***m3 − m8***	***m3 − m4***
$æ_0$	0.9159	0.90887	1.4720	1.246	1.81397

Висновки. У роботі отримано в простому явному вигляді фундаментальні розв'язки для трансверсально-ізотопного кусково-однорідного простору, які дозволяють визначати умови на міжфазних дефектах за наявності об'ємного навантаження. Навантаження може бути як по об'єму, так і по поверхнях міри нуль у тривимірному просторі. Зокрема, отримано прості залежності напружень і переміщень у площині з'єднання півпросторів від значень зосереджених сил, що діють у довільних точках простору. Встановлено, що, на відміну від ізотропного кусково-однорідного простору, при симетричному нормальному навантаженні в площині з'єднання півпросторів появляється деформація. Встановлено умови (17), при виконанні яких деформація у площині з'єднання півпросторів відсутня.

Отримані результати мають як самостійне значення, так і дозволяють уточнювати формулювання задач про міжфазні дефекти.

1. *Александров К. С., Рыжова Т. В.* Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. – 1961. – **6**, вып. 2. – С. 289–314.
2. *Ефимов В. В., Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 2. – С. 42–58.
   Те саме: *Efimov V. V., Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Problems on the stress concentration near a circular imperfection in a composite elastic medium // Mech. Solids. – 1998. – **33**, No. 2. – P. 35–49.
3. *Кіт Г. С., Андрійчук Р. М.* Задача стаціонарної теплопровідності для кусково-однорідного простору за тепловиділення у круговій області // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 115–122.

4. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Задачі стаціонарної теплопровідності і термопружності для тіла з теплопроникним дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 150–159.
Те саме: *Kit H. S., Sushko O. P.* Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with a heat permeable disk-shaped inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 3. – P. 309–321.
– https:// doi.org/10.1007/s10958-011-0300-3.
5. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізольованим дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 1. – С. 58–70.
Те саме: *Kit H. S., Sushko O. P.* Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 561–577. – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0422-7.
6. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Розподіл стаціонарної температури та напружень у тілі з теплопроникним дисковим включенням // Методи розв'язування прикл. задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 145–153.
7. *Кіт Г., Сушко О.* Стаціонарне температурне поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізольованим дисковим включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 67–80.
8. *Кривий О. Ф.* Взаємний вплив міжфазних тунельних тріщини і включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 118–124.
Те саме: *Kryvyi O. F.* Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface tunnel inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 4. – P. 409–416.
– https://doi.org/10.1007/s10958-015-2455-9.
9. *Кривий О. Ф.* Кругова міжфазна тріщина в неоднорідному трансверсально-ізотропному просторі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 6. – С. 15–22.
Те саме:*Kryvyi O. F.* Interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space // Mater. Sci. – 2012. – **47**, No. 6. – P. 726–736.
– https://doi.org/10.1007/s11003-012-9450-9.
10. *Кривий О. Ф.* Міжфазне відшароване включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 2. – С. 77–84.
Те саме: *Kryvyi O. F.* Delaminated interface inclusion in a piecewise homogeneous transversely isotropic space // Mater. Sci. – 2014. – **50**, No. 2. – P. 245–253.
– https://doi.org/10.1007/s11003-014-9714-7.
11. *Кривий О. Ф.* Міжфазне кругове включення при змішаних умовах взаємодії з кусково-однорідним трансверсально-ізотропним простором // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 2. – С. 89–102.
Те саме: *Kryvyy O. F.* Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space // J. Math. Sci. – 2012. – **184**, No. 1. – P. 101–119.
– https://doi.org/10.1007/s10958-012-0856-6.
12. *Кривий О. Ф.* Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 1. – С. 23–35.
Те саме: *Kryvyy O. F.* Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 515–531.
– https://doi.org/10.1007/s10958-011-0419-2.
13. *Кривий О. Ф.* Тунельна внутрішня тріщина в кусково-однорідному анізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 4. – С. 54–63.
Те саме: *Kryvyy O. F.* Tunnel internal crack in a piecewise homogeneous anisotropic space // J. Math. Sci. – 2014. – **198**, No. 1. – P. 62–74.
– https://doi.org/10.1007/s10958-014-1773-7.
14. *Кривий О. Ф.* Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 2. – С. 55–65.

15. *Кривий О. Ф., Морозов Ю. А.* Розв'язок задачі теплопровідності для трансверсально-ізотропного кусково-однорідного простору з двома круговими включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 2. – С. 130–141.
Те саме: *Kryvyi O. F., Morozov Yu. O.* Solution of the problem of heat conduction for the transversely isotropic piecewise-homogeneous space with two circular inclusions // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, No. 1. – P. 162–182.
– https://doi.org/10.1007/s10958-019-04533-1.
16. *Кривой А. Ф.* Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2001. – **6**, вип. 3. – С. 108–115.
17. *Кривой А. Ф.* Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2003. – **8**, вип. 2. – С. 140–149.
18. *Кривой А. Ф., Морозов Ю. А.* Решение задачи теплопроводности для двух компланарных трещин в составном трасверсально-изотропном пространстве // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2014. – № 1. – С. 76–83.
19. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Межфазные туннельные трещины в составном анизотропном пространстве // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, № 4. – С. 689–700.
Те саме: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space // J. Appl. Math. Mech. – 2008. – **72**, No. 4. – P. 499–507.
– https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.08.001.
20. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 6. – С. 36–45.
Те саме: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 6. – P. 626–634. – https://doi.org/10.1007/s10778-008-0084-4.
21. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я., Радиолло М. В.* Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, № 4. – С. 622–632.
Те саме: *Krivoi A. F., Popov G. Ya., Radiollo M. V.* Certain problems of an arbitrarily oriented stringer in a composite an isotropic plane // J. Appl. Math. Mech. – 1986. – **50,** No. 4. – P. 475–483.
– https://doi.org/10.1016/0021-8928(86)90012-2.
22. *Кривой А. Ф., Радиолло М. В.* Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 3. – С. 84–92.
23. *Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б.* Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 7–18.
Те саме: *Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B.* Thermoelastic state of layered thermosensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // Mater Sci. – 2011. – **46**, No. 1. – P. 1–15.
– https://doi.org/10.1007/s11003-010-9258-4.
24. *Hou P.-F., Leung A. T. Y., He Y.-J.* Three-dimensional Green's functions for transversely isotropic thermoelastic bimaterials // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**, No. 24. – P. 6100–6113. – doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.07.022.
25. *Kryvyi O. F., Morozov Yu.* Thermally active interphase inclusion in a smooth contact conditions with transversely isotropic half-spaces // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2020 – **14**, No. 52. – P. 33–50.
– doi: 10.3221/IGF-ESIS.52.04.
26. *Kryvyi O. F., Morozov Yu.* The problem of stationary thermoelasticity for a piecewise homogeneous transversely isotropic space under the influence of a heat flux specified at infinity is considered // J. Phys.: Conf. Ser., **1474** 012025. – VI Int. conf. «Topical Problems of Continuum Mechanics», 1-6 Oct. 2019, Dilijan, Armenia.
– doi:10.1088/1742-6596/1474/1/012025.
27. *Kryvyi O. F., Morozov Yu.* The influence of mixed conditions on the stress concentration in the neighborhood of interfacial inclusions in an inhomogeneous transversely isotropic space // Proc. 3rd Int. conf. Theor. Appl. Exper. Mech., ICTAEM-2020. Structural Integrity / E. Gdoutos, M. Konsta-Gdoutos (eds). – Vol. 16. – P. 204–209. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_38.

28. *Kryvyi O. F., Morozov Yu. O.* Interphase circular inclusion in a piecewise-homogeneous transversely isotropic space under the action of a heat flux // Proc. 1st Int. conf. Theor. Appl. Exper. Mech., ICTAEM-2018 / E. Gdoutos (ed). – P. 394–396. – https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_94.
29. *Kryvyy O.* The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // Oper. Theory: Adv. Appl. – 2009. – **191**. – P. 395–406. – https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_25.
30. *Kumar R., Gupta V.* Green's function for transversely isotropic thermoelastic diffusion bimaterials // J. Therm. Stresses. – 2014. – **37**, No. 10. – P. 1201–1229. – https://doi.org/10.1080/01495739.2014.936248.
31. *Kushnir R., Protsiuk B.* A method of the Green's functions for quasistatic thermoelasticity problems in layered thermosensitive bodies under complex heat exchange // Oper. Theory: Adv. Appl. – 2009. – **191**. – P. 143–154. – doi.org/10.100 7/978-3-7643-9921-4_9.
32. *Li X.-F., Fan T.-Y.* The asymptotic stress field for a ring circular inclusion at the interface of two bonded dissimilar elastic half-space materials // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**, No. 44-45. – P. 8019–8035. – https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00010-5.
33. *Yue Z. Q.* Elastic fields in two joined transversely isotropic solids due to concentrated forces // Int. J. Eng. Sci. – 1995 – **33**, No. 3. – P. 351–369. – https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00063-P.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА

Проблема построения фундаментальных решений для кусочно-однородной трансверсально-изотропного пространства сведена к матричной задачи Римана в пространстве обобщенных функций медленного роста, для которой предложен метод решения. В результате получены в явном виде выражения для компонент вектора фундаментального решения, а также простые представления для компонент тензора напряжений и вектора перемещений в плоскости соединения трансверсально-изотропных упругих полупространств, которые находятся под действием сосредоточенных нормальных и касательных сил. Исследованы поля напряжений и перемещений в плоскости соединения полупространств. В частности, для некоторых комбинаций материалов приведены числовые значения коэффициентов влияния сосредоточенных сил на напряжения и перемещения. Установлены также условия, при которых отсутствуют нормальные перемещения в плоскости соединения трансверсально-изотропных упругих полупространств.

Ключевые слова: *фундаментальные решения, матричная задача Римана, трансверсально-изотропное неоднородное пространство, обобщенные функции.*

FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR A PIECE-HOMOGENEOUS TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC SPACE

The problem of constructing fundamental solutions for piecewise-homogeneous transversely isotropic space is reduced to a matrix Riemann problem in the space of generalized functions of slow growth, for which proposed method for solving. As a result, explicit expressions for the components of the fundamental solution vector are obtained, as well as simple representations for the components of the stress tensor and the displacement vector in the interface of transversely isotropic elastic half-spaces, which are under the action of concentrated normal and tangential forces. The fields of stresses and displacements in the i of the half-spaces compound are investigated. In particular, for some combinations of materials, numerical values of the coefficients of the influence of concentrated forces on stresses and displacements are given.. Also, the conditions are established under which there are no normal displacements in the plane of connection of transversely isotropic elastic half-spaces.

Key words*: fundamental solutions, matrix Riemann problem, transversely isotropic inhomogeneous space, generalized functions.*

[1]Нац. ун-т «Одеська морська акад.», Одеса,
[2]Одес. нац. політехн. ун-т, Одеса

Одержано
14.02.20