

ВІДТВОРЕННЯ ТЕПЛООВОГО НАВАНТАЖЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОЇ ПОРОЖНИСТОЇ КУЛІ ЗА ПОВЕРХНЕВИМИ ПЕРЕМІЩЕННЯМИ

Сформульовано та розв'язано задачу відтворення невідомого закону зміни в часі температури однієї з межових поверхонь функціонально-градієнтної порожнистої кулі за температурою і радіальними переміщеннями іншої поверхні. Запропоновано методикку зведення сформульованої задачі до оберненої задачі термопружності. З використанням методу скінченних різниць побудовано числовий алгоритм розв'язування оберненої задачі. За допомогою розв'язку прямої задачі термопружності проаналізовано стійкість знайденого розв'язку оберненої задачі та визначених на його основі розподілів переміщень і напружень до похибок вхідних даних.

Ключові слова: функціонально-градієнтна куля, обернена задача термопружності, метод безпосереднього інтегрування, метод скінченних різниць, стійкість розв'язку.

Вступ. Дослідження теплового і термонапруженого станів теплонавантажених деталей працюючого енергообладнання може бути ускладнене через відсутність повної інформації про їх теплове навантаження, зокрема, через неможливість доступу до частини межової поверхні [2]. Зазвичай задачі такого типу доозначають додатковою інформацією про поведінку деяких параметрів процесу на доступній для вимірювання частині межової поверхні і зводять до обернених задач. Тип додаткової інформації, яку використовують при цьому, має ключове значення для вибору моделі, в межах якої можуть бути сформульовані ті чи інші обернені задачі. Якщо, наприклад, задачу теплопровідності з невідомою на частині межової поверхні умовою теплообміну доозначити інформацією про поведінку параметрів теплового процесу (температури, теплового потоку) в деяких точках деталі, то задачу ідентифікації невідомого теплового навантаження можна звести до розв'язування обернених задач теплопровідності. Дослідження, що ґрунтуються на такому підході, систематизовано, зокрема, у монографіях [2, 19]. Однак експериментально встановлено [4], що існують випадки, коли відтворення усіх характеристик теплового навантаження в рамках оберненої задачі теплопровідності є неможливим. Якщо ж урахувати зв'язаність полів температури та деформацій і доозначити вихідну задачу теплопровідності інформацією про поведінку параметрів механічного процесу (переміщень чи деформацій), то математичну модель визначення теплового стану тіла можна розширити до оберненої задачі термопружності [1, 15, 25]. У праці [4] розглянуто задачу визначення теплового потоку на внутрішній межовій поверхні довгого порожнистого циліндра за температурою і деформаціями зовнішньої поверхні. На основі порівняльного аналізу отриманих експериментальних і числових результатів проілюстровано ефективність запропонованого підходу. У праці [17] в межах квазістатичної задачі термопружності запропоновано методикку визначення невідомої умови теплообміну на одній із межових поверхонь безмежного шару та довгого порожнистого циліндра за температурою і деформаціями, відомими на іншій поверхні. У праці [23] досліджено обернену квазістатичну задачу термопружності для довгого двошарового порожнистого циліндра, коли за додаткову інформацію вибрано радіальні переміщення однієї із межових поверхонь.

Задачі визначення температурного поля і термонапруженого стану

✉ yasinskyu.anatoliy@gmail.com

вільного від зовнішнього силового навантаження довгого порожнистого циліндра за невідомого теплового навантаження однієї з межових поверхонь і додатково відомої поведінки деформацій іншої поверхні в межах зв'язаної задачі термопружності досліджено у працях [12, 22]. Динамічну обернену задачу термопружності відтворення температури межової поверхні товстого шару досліджено у статті [5].

Обернені задачі термопружності для трансверсально-ізотропних тіл, зокрема, довгого циліндра та кругового композитного диска, складеного з трансверсально-ізотропних шарів вивчено у працях [3, 14].

Дво- та тривимірні обернені задачі термопружності розглянуто у працях [6, 7, 9, 13, 20, 24]. Зокрема, в [6, 7, 13] застосовано метод скінченних елементів до розв'язування обернених задач механіки деформівного твердого тіла, зокрема визначення механічних характеристик матеріалу. Обернені задачі термопружності для тонких круглих пластин, у яких за додаткову інформацію вибрано поведінку їхнього прогину, досліджено в [20, 24].

Питання єдиності розв'язків задач відтворення термонапруженого стану пружного тіла за температурою і температурними переміщеннями, відомими лише на деякій частині його межової поверхні для статичної, квазістатичної і динамічної задач термопружності, вивчено у праці [11].

Важливе прикладне значення мають задачі відтворення теплового і термонапруженого станів для елементів конструкцій, виготовлених із функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ). У праці [8] розглянуто нестационарну осесиметричну обернену задачу термопружності для функціонально-градієнтної циліндричної оболонки скінченної довжини. У ній запропоновано ітераційний алгоритм визначення невідомого теплового потоку на внутрішній межовій поверхні оболонки за інформацією про поведінку в часі температури і переміщень зовнішньої межової поверхні. У праці [26] досліджено обернену задачу термопружності для функціонально-градієнтного довгого порожнистого циліндра. Зазначимо, що задачі відтворення для тіл, виготовлених із ФГМ, є маловивченими і потребують подальшого дослідження.

У запропонованій статті розглянуто задачу визначення закону зміни в часі температури однієї з межових поверхонь функціонально-градієнтної порожнистої кулі, її теплового і термонапруженого станів за температурою і радіальними переміщеннями іншої поверхні.

1. Формулювання задачі. Розглянемо радіально-неоднорідну порожнисту кулю, яка за сталої початкової температури $T_0 = \text{const}$ перебуває у ненапруженому стані. Починаючи з певного моменту часу, куля зазнає дії центрально-симетричних силового і нестационарного теплового навантажень. Вважатимемо, що на внутрішній, $r = R_1$, і зовнішній, $r = R_2$, межових поверхнях кулі задано радіальні напруження стиску $P_i(\tau_*)$, $i = 1, 2$, і відомі закони зміни в часі температур цих поверхонь $t_i^*(\tau_*)$, $i = 1, 2$, де r – радіальна координата; τ_* – час; R_i , $i = 1, 2$, – відповідно її внутрішній і зовнішній радіуси. За цих припущень квазістатичний напружений стан кулі описується рівняннями рівноваги і суцільності [10]

$$\rho \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} = 2(\sigma_\varphi - \sigma_r), \quad \rho \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \rho} = \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi, \quad (1)$$

фізичними співвідношеннями

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_*} (\sigma_r - 2\nu\sigma_\varphi) + \alpha_* T_0 T, \quad (2)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E_*} ((1 - \nu)\sigma_\varphi - \nu\sigma_r) + \alpha_* T_0 T \quad (3)$$

та межовими умовами

$$\sigma_r(k, \tau) = -P_1(\tau), \quad \sigma_r(1, \tau) = -P_2(\tau), \quad (4)$$

де $\rho = r/R_2$ – безрозмірна радіальна координата; $\tau = a\tau_* / R_2^2$ – критерій Фур'є; a – коефіцієнт теплопровідності; $T(\rho, \tau) = (T_*(\rho, \tau) - T_0) / T_0$ – безрозмірна температура; $T_*(\rho, \tau)$ – температура; σ_j та ε_j , $j = r, \varphi$, – діагональні компоненти відповідно тензора напружень і деформацій; $E_*(\rho) = E_0 E(\rho)$ – модуль Юнга; $E(\rho)$ – безрозмірний модуль Юнга; E_0 – деяке сталє значення модуля Юнга; $\nu(\rho)$ – коефіцієнт Пуассона; $\alpha_*(\rho) = \alpha_0 \alpha(\rho)$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення; $\alpha(\rho)$ – безрозмірний коефіцієнт лінійного температурного розширення; α_0 – деяке сталє значення коефіцієнта лінійного температурного розширення.

Безрозмірне температурне поле $T(\rho, \tau)$ кулі за відсутності в ній теплових джерел задовольнятиме наступну задачу теплопровідності [10]:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \lambda(\rho) \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right) = c(\rho) \gamma(\rho) \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \tau}, \quad \rho \in (k, 1), \quad \tau \in (0, \tau_m], \quad (5)$$

$$T(k, \tau) = t_1(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m], \quad (6)$$

$$T(1, \tau) = t_2(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m], \quad (7)$$

$$T(\rho, 0) = 0, \quad \rho \in [k, 1], \quad (8)$$

де $\lambda(\rho) = \lambda_*(\rho) / \lambda_0$ і $c(\rho) = c_*(\rho) / c_0$ – безрозмірні коефіцієнт теплопровідності та питома масова теплоємність; $\gamma(\rho) = \gamma_*(\rho) / \gamma_0$ – безрозмірна густина матеріалу; λ_* , c_* , γ_* – відповідно коефіцієнт теплопровідності, питома масова теплоємність та густина матеріалу, а λ_0 , c_0 , γ_0 – деякі сталі значення цих величин; $\lambda_0 / (c_0 \gamma_0) = a$; $t_i = (t_i^* - T_0) / T_0$, $i = 1, 2$; $\tau_m = \text{const}$. Усі теплові і механічні характеристики матеріалу кулі вважаємо довільними неперервними функціями радіальної координати, а межові та початкові умови погодженими.

Ґрунтуючись на прямій задачі термопружності (1)–(8), сформулюємо задачу відтворення. Нехай через відсутність доступу до однієї з межових поверхонь кулі, наприклад внутрішньої, закон зміни її температури $t_1(\tau)$ є невідомим. Потрібно визначити тепловий і термонапружений стани кулі, якщо додатково відома зміна в часі радіальних переміщень іншої межової поверхні

$$u_r(1, \tau) = \varphi_*(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m], \quad (9)$$

де $\varphi_*(\tau)$ – задана функція.

2. Зведення задачі відтворення до оберненої задачі термопружності. Скористаємося методом безпосереднього інтегрування [21] диференціальних рівнянь термопружності (1)–(4) і запишемо умову (9) на радіальні переміщення як умову на температурне поле. З цією метою, увівши позначення $\sigma = \sigma_r / 2 + \sigma_\varphi$, перепишемо рівняння рівноваги (1) у вигляді

$$\frac{\partial(\rho^3 \sigma_r)}{\partial \rho} = 2\rho^2 \sigma. \quad (10)$$

Розв'язок рівняння (10) з урахуванням першої з умов (4) на напруження є таким:

$$\rho^3 \sigma_r = -k^3 P_1(\tau) + 2 \int_k^\rho \eta^2 \sigma(\eta, \tau) d\eta. \quad (11)$$

Поклавши $\rho = 1$ у виразі (11) і врахувавши другу умову (4), отримаємо

$$\int_k^1 \rho^2 \sigma(\rho, \tau) d\rho = \frac{1}{2} (k^3 P_1(\tau) - P_2(\tau)). \quad (12)$$

Використавши рівняння рівноваги (1) і фізичні співвідношення (2), (3), рівняння суцільності (1) можемо записати у напруженнях:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\sigma}{G_*} + 2(\alpha_0 T_0) \alpha T \right) = \frac{\sigma_r}{2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G_*} \right),$$

де $G_*(\rho) = G_0 G(\rho)$ – модуль зсуву; $G(\rho)$ – безрозмірний модуль зсуву; G_0 – деяке стале значення модуля зсуву; $G_* = E_* / (2 + 2\nu)$.

Розв'язок цього диференціального рівняння відносно сумарних напружень σ подамо так:

$$\sigma = \frac{E_*}{2(1-\nu)} \left(A(\tau) - 2(\alpha_0 T_0) \alpha T + \frac{1}{2} \int_k^\rho \sigma_r \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{G_*(\eta)} \right) d\eta \right), \quad (13)$$

де $A(\tau)$ – невідома функція, яку визначаємо з інтегральної умови (12).

Із залежності (11) виразимо радіальні напруження σ_r через сумарні σ і підставимо у формулу (13). У результаті отримаємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду для визначення сумарних напружень σ :

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, \tau) = & \int_k^\rho \mathcal{K}(\rho, \xi) \sigma(\xi, \tau) d\xi + \frac{A(\tau)}{2} \frac{E_*(\rho)}{1-\nu(\rho)} - \\ & - \frac{\alpha(\rho) E_*(\rho)}{1-\nu(\rho)} (\alpha_0 T_0) T(\rho, \tau) - \frac{k^3}{4} \frac{E(\rho)}{1-\nu(\rho)} P_1(\tau) V(\rho), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\mathcal{K}(\rho, \xi) = \xi^2 \frac{1+\nu(\rho)}{1-\nu(\rho)} G(\rho) \int_\xi^\rho \frac{1}{\eta^3} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{G(\eta)} \right) d\eta$$

– ядро рівняння;

$$V(\rho) = \int_k^\rho \frac{1}{\eta^3} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{G(\eta)} \right) d\eta.$$

Знаючи $\mathcal{K}(\rho, \xi)$, запишемо резольвентне ядро рівняння (14) у вигляді

$$\mathcal{R}(\rho, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_{n+1}(\rho, \xi),$$

де

$$\mathcal{R}_1(\rho, \xi) = \mathcal{K}(\rho, \xi), \quad \mathcal{R}_{n+1}(\rho, \xi) = \int_\xi^\rho \mathcal{R}_1(\rho, \eta) \mathcal{R}_n(\eta, \xi) d\eta.$$

За відомим резольвентним ядром розв'язок рівняння (14) можемо записати так:

$$\sigma(\rho, \tau) = \frac{A(\tau)}{2} f_A(\rho) - \frac{k^3}{4} P_1(\tau) f_P(\rho) - \Theta(\rho, \tau), \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned}
f_A(\rho) &= \frac{E_*(\rho)}{1-\nu(\rho)} + \int_k^\rho \mathcal{R}(\rho, \eta) \frac{E_*(\eta)}{1-\nu(\eta)} d\eta, \\
f_P(\rho) &= \frac{E(\rho)}{1-\nu(\rho)} V(\rho) + \int_k^\rho \mathcal{R}(\rho, \eta) \frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)} V(\eta) d\eta, \\
\Theta(\rho, \tau) &= \alpha_0 T_0 \frac{\alpha(\rho) E_*(\rho)}{1-\nu(\rho)} T(\rho, \tau) + \\
&\quad + \alpha_0 T_0 \int_k^\rho \mathcal{R}(\rho, \eta) \frac{\alpha(\eta) E_*(\eta)}{1-\nu(\eta)} T(\eta, \tau) d\eta.
\end{aligned}$$

Визначивши функцію $A(\tau)$ з інтегральної умови (12) і підставивши її у вираз (15), після перетворень матимемо

$$\begin{aligned}
\sigma(\rho, \tau) &= \frac{k^3}{4} P_1(\tau) \frac{2bf_A(\rho) - af_P(\rho)}{a} - \frac{f_A(\rho)}{2a} P_2(\rho) + \\
&\quad + \frac{f_A(\rho)}{a} \int_k^1 \eta^2 \Theta(\eta, \tau) d\eta - \Theta(\rho, \tau), \tag{16}
\end{aligned}$$

де

$$a = \int_k^1 \eta^2 f_A(\eta) d\eta, \quad b = 1 + \frac{1}{2} \int_k^1 \eta^2 f_P(\eta) d\eta.$$

Знайшовши сумарні напруження $\sigma(\rho, \tau)$, визначимо напружений стан кулі: за формулою (11) знайдемо радіальні напруження, а за формулою $\sigma_\varphi = \sigma - \sigma_r / 2$ – колові. Скориставшись, зокрема, останньою формулою і поданням (11), із фізичного співвідношення (3) можемо отримати

$$\frac{u_r}{R_2 \rho} = \frac{1}{E_*} \left((1-\nu)\sigma - \frac{1+\nu}{\rho^3} \int_k^\rho \eta^2 \sigma(\eta, \tau) d\eta \right) + \frac{1+\nu}{2E_*} \left(\frac{k}{\rho} \right)^3 P_1(\tau) + \alpha_* T_0 T.$$

Поклавши в отриманій формулі $\rho = 1$ і врахувавши вирази (12) і (16), отримаємо залежність безрозмірних радіальних переміщень зовнішньої межової поверхні кулі від неявно заданого температурного поля і силового навантаження:

$$\begin{aligned}
\frac{u_r(1, \tau)}{R_2 \alpha_0 T_0} &= \frac{1-\nu(1)}{2G(1)} \int_k^1 \frac{\alpha(\xi) E(\xi)}{1-\nu(\xi)} \left[\frac{f_A(1)}{a} \left(\xi^2 + \int_\xi^1 \eta^2 \mathcal{R}(\eta, \xi) d\eta \right) - \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{R}(1, \xi) \right] T(\xi, \tau) d\xi + \frac{k^3}{4} \frac{1-\nu(1)}{E(1)} \frac{2bf_A(1) - af_P(1)}{\alpha_0 T_0 a} p_1(\tau) + \\
&\quad + \left(1 - \frac{1-\nu(1)}{1+\nu(1)} \frac{f_A(1)}{a} \right) \frac{p_2(\tau)}{4\alpha_0 T_0 G(1)}, \tag{17}
\end{aligned}$$

де $p_i(\tau) = P_i(\tau) / G_0$, $i = 1, 2$.

На основі подання (17) умову (9) на радіальні переміщення запишемо як інтегральну крайову умову на температурне поле:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\nu(1)}{2G(1)} \int_k^1 \frac{\alpha(\xi) E(\xi)}{1-\nu(\xi)} \left[\frac{f_A(1)}{a} \left(\xi^2 + \int_\xi^1 \eta^2 \mathcal{R}(\eta, \xi) d\eta \right) - \right. \\
\left. - \mathcal{R}(1, \xi) \right] T(\xi, \tau) d\xi = \varphi(\tau), \tag{18}
\end{aligned}$$

де

$$\varphi(\tau) = \frac{\varphi_*(\tau)}{\alpha_0 T_0} - \frac{k^3}{4} \frac{1 - \nu(1)}{E(1)} \frac{2bf_A(1) - af_P(1)}{\alpha_0 T_0 a} p_1(\tau) - \left(1 - \frac{1 - \nu(1)}{1 + \nu(1)} \frac{f_A(1)}{a}\right) \frac{p_2(\tau)}{4\alpha_0 T_0 G(1)}.$$

Якщо тепер недоозначену через відсутність умови (6) задачу теплопровідності (5), (7), (8) доповнити інтегральною крайовою умовою (18), то отримаємо обернену задачу термопружності (5), (7), (8), (18), у якій за відомою поведінкою радіальних температурних переміщень зовнішньої межової поверхні кулі потрібно знайти невідоме температурне поле. Тоді за формулою (16) знаходимо сумарні напруження $\sigma(\rho, \tau)$, а потім, за наведеною вище схемою, – радіальні і колові напруження.

Якщо в умові (18) покласти $\tau = 0$, отримаємо умову погодження заданих радіальних переміщень зовнішньої межової поверхні кулі і силового навантаження у початковий момент часу:

$$\varphi_*(0) = \frac{k^3}{4} \frac{1 - \nu(1)}{E(1)} \frac{2bf_A(1) - af_P(1)}{a} p_1(\tau) + \left(1 - \frac{1 - \nu(1)}{1 + \nu(1)} \frac{f_A(1)}{a}\right) \frac{p_2(\tau)}{4G(1)}, \quad (19)$$

виконання якої забезпечуватиме неперервність розв'язку задачі (5), (7), (8), (18).

3. Побудова розв'язку оберненої задачі термопружності. Для відшукування розв'язків рівнянь зі змінними коефіцієнтами широко використовують числові методи. Одним із таких методів є метод скінченних різниць [16]. З метою побудови різницевої схеми оберненої задачі область неперервної зміни аргументів ρ і τ замінимо дискретною множиною точок – сіткою $\{\rho_i = k + ih, \tau_j = j\ell; i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M\}$, де h, ℓ – відстані між вузлами сітки; $N = (1 - k) / h$; $M = \tau_m / \ell$. Тоді замість функції $T(\rho, \tau)$ неперервних аргументів матимемо функцію дискретних аргументів $T_i^j = T(\rho_i, \tau_j)$. Якщо частинні похідні першого і другого порядків за змінною ρ у рівнянні (1) апроксимувати центральними різницями з точністю $O(h^2)$, а похідну за часом – несиметричною різницею з точністю $O(\ell)$, то записана на такій дискретній множині неявна різницева схема крайової задачі (5), (7), (8), (18) матиме вигляд

$$\sum_{i=0}^N g_i T_i^{j+1} = F_0^{j+1}, \quad (20)$$

$$-A_i T_{i-1}^{j+1} + C_i T_i^{j+1} - B_i T_{i+1}^{j+1} = F_i^j, \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad 0 \leq j \leq M, \quad (21)$$

$$T_N^{j+1} = F_N^{j+1}, \quad (22)$$

де

$$A_i = \frac{1}{h^2} \rho_{i-1/2}^2 \lambda(\rho_{i-1/2}), \quad B_i = \frac{1}{h^2} \rho_{i+1/2}^2 \lambda(\rho_{i+1/2}),$$

$$C_i = \frac{1}{h^2} (\rho_{i-1/2}^2 \lambda(\rho_{i-1/2}) + \rho_{i+1/2}^2 \lambda(\rho_{i+1/2})) + \rho_i^2 c(\rho_i) \gamma(\rho_i) \frac{1}{\ell},$$

$$\rho_{i-1/2} = k + h \left(i - \frac{1}{2}\right), \quad \rho_{i+1/2} = k + h \left(i + \frac{1}{2}\right),$$

$$g_0 = \frac{1 - \nu(1)}{G(1)} \frac{h}{4} \frac{\alpha(k)E(k)}{1 - \nu(k)} \left[\frac{f_A(1)}{a} \left(k^2 + \int_k^1 \eta^2 \mathcal{R}(\eta, k) d\eta \right) - \mathcal{R}(1, k) \right],$$

$$g_N = \frac{1 - \nu(1)}{G(1)} \frac{h}{4} \frac{\alpha(1)E(1)}{1 - \nu(1)} \frac{f_A(1)}{a},$$

$$g_i = \frac{1 - \nu(1)}{2G(1)} \frac{h\alpha(\rho_i)E(\rho_i)}{1 - \nu(\rho_i)} \left[-\mathcal{R}(1, \rho_i) + \frac{f_A(1)}{a} \left(\rho_i + \int_{\rho_i}^1 \eta^2 \mathcal{R}(\eta, \rho_i) d\eta \right) \right], \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

$$F_0^{j+1} = \varphi^{j+1} = \frac{\Phi_*^{j+1}}{\alpha_0 T_0} - \frac{1 - \nu(1)}{E(1)} \frac{2bf_A(1) - af_P(1)}{\alpha_0 T_0 a} \frac{k^3}{4} p_1^{j+1} - \left(1 - \frac{1 - \nu(1)}{1 + \nu(1)} \frac{f_A(1)}{a} \right) \frac{p_2(\tau)}{4\alpha_0 T_0 G(1)},$$

$$F_N^{j+1} = t_2(\tau_{j+1}), \quad F_i^j = \rho_i^2 c(\rho_i) \gamma(\rho_i) \frac{T_i^j}{\ell}, \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

$$\varphi^{j+1} = \varphi(\tau_{j+1}), \quad \varphi_*^{j+1} = \varphi_*(\tau_{j+1}), \quad p_1^{j+1} = p_1(\tau_{j+1}), \quad p_2^{j+1} = p_2(\tau_{j+1}).$$

Апроксимацію інтеграла у лівій частині умови (18) здійснено за формулою трапецій. Розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (20)–(22) знаходимо методом прогонки для складних систем [16], подавши шукану функцію у вигляді лінійної комбінації трьох допоміжних сіткових функцій:

$$T_i^{j+1} = u_i^{j+1} + T_0^{j+1} v_i^{j+1} + T_N^{j+1} w_i^{j+1}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (23)$$

де у розглядуваному випадку u_i^{j+1} , v_i^{j+1} , w_i^{j+1} – розв'язки таких дискретних крайових задач:

$$-A_i u_{i-1}^{j+1} + C_i u_i^{j+1} - B_i u_{i+1}^{j+1} = F_i^j, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (24)$$

$$u_0^{j+1} = 0, \quad u_N^{j+1} = 0,$$

$$-A_i v_{i-1}^{j+1} + C_i v_i^{j+1} - B_i v_{i+1}^{j+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (25)$$

$$v_0^{j+1} = 1, \quad v_N^{j+1} = 0,$$

$$-A_i w_{i-1}^{j+1} + C_i w_i^{j+1} - B_i w_{i+1}^{j+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (26)$$

$$w_0^{j+1} = 0, \quad w_N^{j+1} = 1.$$

Системи лінійних алгебричних рівнянь (24)–(26) розв'язуємо методом прогонки. Величину T_N^{j+1} визначаємо із межової умови (22), а величину T_0^{j+1} – за формулою

$$T_0^{j+1} = \frac{1}{\Delta} \left(F_0^{j+1} - \sum_{i=1}^{N-1} g_i u_i^{j+1} - F_N^{j+1} \left(g_N + \sum_{i=1}^{N-1} g_i w_i^{j+1} \right) \right), \quad (27)$$

де

$$\Delta = g_0 + \sum_{i=1}^{N-1} g_i v_i^{j+1}.$$

Для систем алгебричних рівнянь (24)–(26) справджуються умови діагонального переважання $C_i > A_i + B_i$, $1 \leq i \leq N-1$. Крім того, $0 \leq v_i^{j+1} \leq 1$, $0 \leq i \leq N$, як розв'язок задачі (25). Тому, якщо характеристики матеріалу є такими, що $\Delta \neq 0$, то у процесі реалізації методу прогонки для складних систем будуть відсутні ділення на нуль і накопичення похибок вхідних даних і заокруглень поточних обчислень [16].

Розв'язавши системи рівнянь (24)–(26), за формулою (23) знаходимо температурне поле кулі T_i^j , $0 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq M$, зокрема, невідому температуру внутрішньої межової поверхні T_0^j , $0 \leq j \leq M$. Термонапружений стан кулі, який відповідає знайденому температурному полю, знаходимо за допомогою співвідношень (2), (3), (11), (16).

4. Числові результати та їх аналіз. Апробацію запропонованої методики розв'язування сформульованої задачі відтворення проведемо для випадку, коли ФГМ, з якого виготовлена куля, є композицією нікелю (перший матеріал) і нержавіючої сталі (другий матеріал). Використавши модель двокомпонентного ФГМ [18], приймемо, що теплофізичні і механічні характеристики матеріалу мають подання $v(\rho) = v_1 C_1(\rho) + v_2 C_2(\rho)$, де v_1 , v_2 – відповідно характеристики першого та другого матеріалів, $v_i = \text{const}$, $i = 1, 2$; $C_i(\rho)$, $i = 1, 2$, – об'ємні концентрації складових матеріалу, причому $C_1(\rho) + C_2(\rho) = 1$. Вважаємо, що концентрація другого матеріалу змінюється за товщиною кулі за степеневим законом

$$C_2(\rho) = \left(\frac{\rho - k}{1 - k} \right)^{s_0}, \quad s_0 = \text{const}.$$

Покладемо (може, треба [...]?)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 90.4 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}, & \lambda_2 &= 17.5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}, & c_1 &= 457 \text{ Вт} \cdot \text{с/(кг} \cdot \text{°C)}, \\ c_2 &= 504 \text{ Вт} \cdot \text{с/(кг} \cdot \text{°C)}, & \gamma_1 &= 8.9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & \gamma_2 &= 8.166 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ \alpha_1 &= 13.3 \cdot 10^{-6} \text{ 1/°C}, & \alpha_2 &= 12.33 \cdot 10^{-6} \text{ 1/°C}, & E_1 &= 223.95 \text{ ГПа}, \\ E_2 &= 201.04 \text{ ГПа}, & v_1 &= 0.31, & v_2 &= 0.3262, & \lambda_0 &= \lambda_2, & c_0 &= c_2, \\ \gamma_0 &= \gamma_2, & \alpha_0 &= \alpha_2, & E_0 &= E_2, & v_0 &= v_2, & s_0 &= 2. \end{aligned}$$

Розглянемо спочатку пряму задачу термопружності для кулі і приймемо, що відомі закони зміни температур її межових поверхонь і силового навантаження:

$$\begin{aligned} t_1(\tau) &= x_1 \tau + x_2 \sin 4\tau, & t_2(\tau) &= x_3(1 - \exp(-2\tau)), \\ P_1(\tau) &= Q H(\tau), & P_2(\tau) &= 0, \end{aligned}$$

де x_1 , x_2 , x_3 , Q – сталі; $H(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases}$ – функція Гевісайда.

Зміну в часі безрозмірної температури $T(\rho, \tau)$, визначеної як розв'язок прямої задачі теплопровідності в окремих точках кулі, коли $k = 0.7$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $x_1 = 10$, $x_2 = x_3 = 5$, $h = \ell = 0.01$, $\tau_m = 1.5$, наведено на рис. 1.

Розподіл за радіальною координатою ρ безрозмірної температури, безрозмірних радіальних $\sigma_r^* = \sigma_r / (\alpha_0 T_0 E_0)$ і колових $\sigma_\phi^* = \sigma_\phi / (\alpha_0 T_0 E_0)$ напружень, а також безрозмірних радіальних переміщень $u_* = u_r / (\alpha_0 T_0 R_2)$ в окремі моменти часу, коли $Q = 50$ МПа, зображено відповідно на рис. 2 – рис. 5 суцільними лініями.

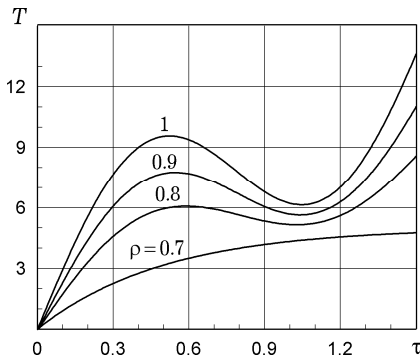


Рис. 1

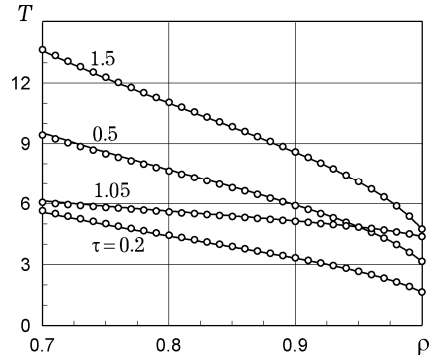


Рис. 2

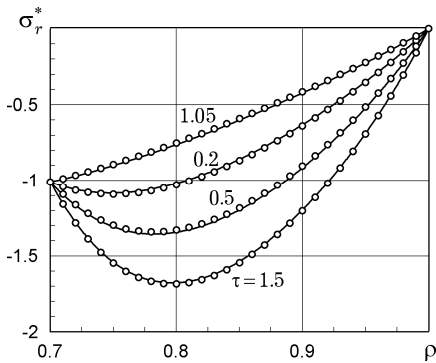


Рис. 3

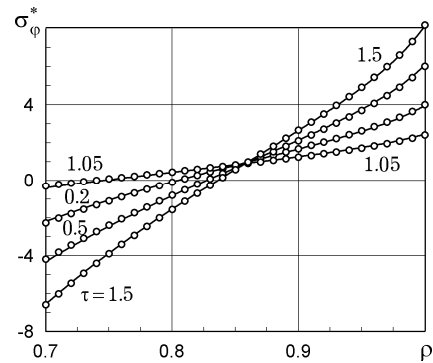


Рис. 4

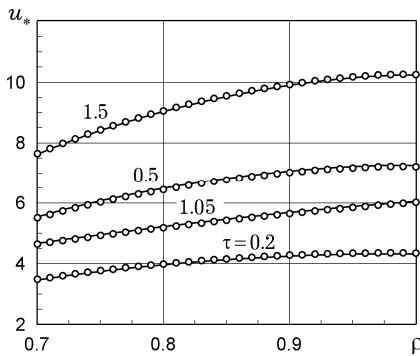


Рис. 5

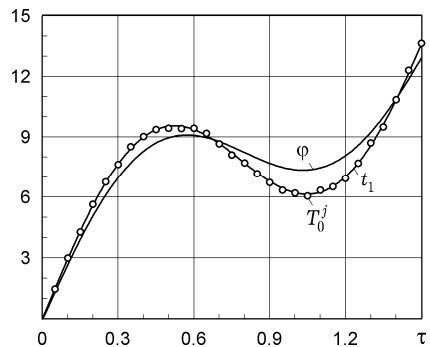


Рис. 6

Поведінку в часі безрозмірних радіальних температурних переміщень зовнішньої межевої поверхні кулі

$$\varphi(\tau) = \frac{u_r(1, \tau)}{\alpha_0 T_0 R_2} - \frac{k^3}{4} \frac{1 - \nu(1)}{E(1)} \frac{2bf_A(1) - af_P(1)}{\alpha_0 T_0 a} p_1(\tau),$$

що відповідає знайденому температурному полю, зображено на рис. 6. Зазначимо, що у початковий момент часу справджується умова погодження (19).

Моделюючи появу випадкової похибки в експериментальних вимірюваннях переміщень $\varphi(\tau)$, замінимо значення $\varphi(\tau_j)$ у моменти часу τ_j на $\tilde{\varphi}(\tau_j)$ за формулою $\tilde{\varphi}(\tau_j) = \varphi(\tau_j)(1 + \theta_j/100)$, де θ_j – випадкові числа з проміжку $[-1, 1]$ із рівномірним законом розподілу, тобто у вхідні дані обер-

неної задачі внесемо випадкові похибки, що не перевищують 1%. Апроксимуючи переміщення $\tilde{\varphi}(\tau_j)$ лінійним сплайном, використаємо їх як задані в оберненій задачі (5), (7), (8), (18). Кружечками на рис. 6 зображено поведінку в часі температури внутрішньої межевої поверхні кулі T_0^j , $0 \leq j \leq M$, знайденої як розв'язок оберненої задачі термопружності. Кружечками на рис. 2 – рис. 5 зображено розподіли за радіальною координатою у відповідні моменти часу безрозмірних температури T , напружень σ_r^* , σ_φ^* і переміщень u_* , визначених на основі розв'язку оберненої задачі. Встановлено, що максимальне відносне відхилення знайденої температури внутрішньої межевої поверхні кулі T_0^j , $0 \leq j \leq M$, від заданої у прямій задачі $t_1(\tau)$ (рис. 6) не перевищує 2%. Максимальні відносні відхилення розподілів безрозмірних температури, напружень і переміщень, визначених на основі розв'язків прямої та оберненої задач, не перевищують 1.3, 1.9, 0.8 %, відповідно. Отримані порівняльні результати підтверджують стійкість розробленого числового алгоритму до малих похибок вхідних даних.

Висновки. Сформульовано задачу визначення теплового і термонапруженого станів радіально-неоднорідної порожнистої кулі, коли теплове навантаження на одній із її межових поверхонь невідоме. За додаткову інформацію для розв'язування сформульованої задачі відтворення вибрано поведінку в часі радіальних переміщень межевої поверхні, теплове навантаження на якій є відомим. Із використанням методу безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь термопружності запропоновано методику зведення сформульованої задачі до оберненої задачі термопружності. На основі методу скінченних різниць розроблено стійкий до малих похибок вхідних даних числовий алгоритм побудови розв'язку оберненої задачі. Для конкретних залежностей теплових і механічних характеристик матеріалу від радіальної координати з використанням розв'язку прямої задачі термопружності проведено числову апробацію запропонованої методики, яка підтвердила стійкість знайденого розв'язку до малих похибок вхідних даних.

1. Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В. 5 т. – Т. 5.
2. Alifanov O. M. Inverse heat transfer problems. – Berlin: Springer, 1994. – 348 p.
3. Ashida F., Sakata S., Tauchert T. R., Yamashita Y. Inverse transient thermoelastic problem for a composite circular disk // J. Therm. Stresses. – 2002. – **25**, No. 5. – P. 431–455.
– <https://doi.org/10.1080/01495730252890177>.
4. Blanc G., Raynaud M. Solution of the inverse heat conduction problem from thermal strain measurements // J. Heat Transfer. – 1996. – **118**, No. 4. – P. 842–849. – <https://doi.org/10.1115/1.2822579>.
5. Chen H.-T., Wu X.-Y., Hsiao Y.-S. Estimation of surface condition from the theory of dynamic thermal stresses // Int. J. Thermal Sci. – 2004. – **43**, No. 1. – P. 95–104. – [https://doi.org/10.1016/S1290-0729\(03\)00105-4](https://doi.org/10.1016/S1290-0729(03)00105-4).
6. Dennis B. H., Jin W., Dulikravich G. S., Jaric J. Application of the finite element method to inverse problems in solid mechanics // Int. J. Struct. Changes Solids. – 2011. – **3**, No. 2. – P. 11–21.
7. Dulikravich G. S., Dennis B. H., Baker D. P., Kennon S. R., Orlande H. R. B., Colaco M. J. Inverse problems in aerodynamics, heat transfer, elasticity and materials design // Int. J. Aeronaut. Space Sci. – 2012. – **13**, No. 4. – P. 405–420. – <https://doi.org/10.5139/IJASS.2012.13.4.405>.
8. Golbahar Haghighi M. R., Malekzadeh P., Afshari M. Inverse estimation of heat flux and pressure in functionally graded cylinders with finite length // Compos. Struct. – 2015. – **121**. – P. 1–15.
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.11.025>.

9. Grysa K., Maciag A. Solving direct and inverse thermoelasticity problems by means of Trefftz base functions for finite element method // *J. Therm. Stresses*. – 2011. – **34**, No. 4. – P. 378–393. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2010.550818>.
10. Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal stresses – Advanced theory and applications. – Dordrecht: Springer, 2009. – 559 p.
11. Kozlov V., Mazya V., Fomin A. The inverse problem of coupled thermoelasticity // *Inverse Probl.* – 1994. – **10**, No. 1. – P. 153–160. – <https://doi.org/10.1088/0266-5611/10/1/012>.
12. Lee H.-L., Yang Y.-C. Inverse problem of coupled thermoelasticity for prediction of heat flux and thermal stresses in an annular cylinder // *Int. Commun. Heat Mass Transfer*. – 2001. – **28**, No. 5. – P. 661–670. – [https://doi.org/10.1016/S0735-1933\(01\)00270-6](https://doi.org/10.1016/S0735-1933(01)00270-6).
13. Nicholson D. W. On finite element analysis of an inverse problem in elasticity // *Inverse Probl. Sci. Eng.* – 2012. – **20**, No. 5. – P. 735–748. – <https://doi.org/10.1080/17415977.2012.668677>.
14. Noda N., Ashida F., Tsuji T. An inverse transient thermoelastic for problem of a transversely isotropic body // *J. Appl. Mech.* – 1989. – **56**, No. 4. – P. 791–797. – <https://doi.org/10.1115/1.3176173>.
15. Ootao Y. Inverse problem of thermal deformation in a cylinder // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 5. – P. 2578–2585. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_223.
16. Samarskii A. A., Nikolaev E. S. Numerical method for grid equations. Vol. I: Direct methods. – Basel: Birkhäuser Verlag, 1989. – 242 p.
17. Segall A. E., Engels D., Drapaca C. Inverse determination of thermal boundary conditions from transient surface temperatures and strains in slabs and tubes // *Mater. Manuf. Process.* – 2012. – **27**, No. 8. – P. 860–868. – <https://doi.org/10.1080/10426914.2012.663130>.
18. Shen H.-S. Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 280 p.
19. Taler J., Duda P. Solving direct and inverse heat conduction problems. – Berlin: Springer, 2006. – xxvi+889 p.
20. Tikhe A. K., Deshmukh K. C. Inverse heat conduction problem in a thin circular plate and its thermal deflection // *Appl. Math. Model.* – 2006. – **30**, No. 6. – P. 554–560. – <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.12.014>.
21. Tokovyy Y. V. Direct integration method // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 951–960. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_621.
22. Yang Y. C., Chen U. C., Chang W. J. An inverse problem of coupled thermoelasticity in predicting heat flux and thermal stresses by strain measurement // *J. Therm. Stresses*. – 2002. – **25**, No. 3. – P. 265–281. – <https://doi.org/10.1080/014957302317262305>.
23. Yasinskiy A. V. Identification of the thermal and thermostressed states of a two-layer cylinder from surface displacements // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 1. – P. 34–40. – <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0014-5>.
Те саме: Ясинский А. В. Идентификация теплового и термонапряженного состояния двухслойного цилиндра по поверхностным перемещениям // *Прикл. механика*. – 2008. – **44**, № 1. – С. 40–47.
24. Yasinskiy A. V., Shipka R. I. Determination of the axisymmetric thermal field and thermostressed state of a circular plate from its deflection // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, No. 8. – P. 1075–1082. – <https://doi.org/10.1023/A:1013030822563>.
Те саме: Ясинский А. В., Шипка Р. И. Определение осесимметричного температурного поля и термонапряженного состояния круглой пластинки по прогибу // *Прикл. механика*. – 2001. – **37**, № 8. – С. 118–124.
25. Yasinskyu A. Determination and optimization of stress state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 916–924. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_607.
26. Yasinskyu A., Tokova L. Inverse problem on the identification of temperature and thermal stresses in an FGM hollow cylinder by the surface displacements // *J. Therm. Stresses*. – 2017. – **40**, No. 12. – P. 1471–1483. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1357455>.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО ПОЛОГО ШАРА ПО ПОВЕРХНОСТНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ

Сформулирована и решена задача восстановления неизвестного закона изменения во времени температуры одной из граничных поверхностей функционально-градиентного полого шара по температуре и радиальным перемещениям другой поверхности. Предложена методика сведения исходной задачи к обратной задаче термоупругости. С использованием метода конечных разностей построено решение обратной задачи. При помощи решения прямой задачи термоупругости проанализирована устойчивость решения обратной задачи и полученных на его основе распределений перемещений и напряжений к малым погрешностям исходных данных.

Ключевые слова: функционально-градиентный шар, метод непосредственного интегрирования, метод конечных разностей, устойчивость решения.

RECONSTRUCTION OF THERMAL LOADING OF A FUNCTIONALLY-GRADED HOLLOW SPHERE BY THE SURFACE DISPLACEMENTS

A problem on the reconstruction of an unknown time-dependent temperature distribution on one of the limiting surfaces of a functionally-graded hollow sphere is formulated and solved by making use of the temperature and radial displacements on the other limiting surface. A technique is suggested for reduction of the formulated problem to an inverse thermoelasticity problem. By making use of the finite-difference method, a numerical algorithm is constructed in order to solve the obtained inverse problem. By means of a solution to the direct thermoelasticity problem, the stability of the constructed solution to the inverse problem is analyzed along with the distributions of displacements and stresses, obtained on this basis, with regard to the errors of input data.

Key words: functionally-graded sphere, direct integration method, finite-difference method, solution stability.