

СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ПЛОЩИНИ З ЕЛІПТИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ НАЯВНОСТІ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

Розглядається задача про визначення пружно-пластичного напружено-деформованого стану матриці з еліптичним включенням з іншого матеріалу при наявності дугової тріщини на межі поділу під дією механічних зусиль, прикладених на нескінченності, які можуть бути довільним чином орієнтовані відносно тріщини. Допускається виникнення контактних макрозон між берегами тріщини. Прийнято модель ізотропного зміцнення матеріалів з дволанковою апроксимацією кривих «напруження – деформація». Розглядаються числові розв'язки пружних і пружно-пластичних задач. Відмічається зростання розбіжностей між цими результатами в міру переходу від пружного до пружно-пластичного стану в процесі зростання рівня навантаження.

Ключові слова: біматеріали, кругове або еліптичне включення, міжфазна тріщина, пружно-пластичне деформування, контактні макрозони, метод скінченних елементів.

Вступ. Дослідження залежностей параметрів руйнування біматеріалів з міжфазними тріщинами від виду і рівня діючих навантажень, а також форми і механічних властивостей взаємодіючих матеріалів є важливим з точки зору підвищення надійності та працездатності систем і пристроїв при наявності міжфазних дефектів. Найпростіші безконтактні моделі для кругових включень дозволяють отримувати точні розв'язки на основі теорії аналітичних функцій комплексної змінної. Перехід до більш складних моделей, пов'язаний зі зміною канонічної форми включень, а також з необхідністю моделювання різноманітних особливостей контактної взаємодії берегів тріщин, значно ускладнює процес розв'язування. Ще більші труднощі виникають при необхідності врахування фізичної нелінійності процесу деформування взаємодіючих матеріалів, що робить неможливими аналітичні підходи і спонукає до використання чисельних методів.

Однією з перших робіт, у яких розглядалась задача про кругове пружне включення, зв'язане з іншим еластичним матеріалом, за винятком дугової тріщини, була робота [9]. У ній встановлено, що розв'язок задачі має осциляційний характер в околі кінців тріщини, і наголошується на тому, що в цих областях лінійна теорія пружності не підходить для прогнозування напружень і переміщень. Дугоподібні тріщини на межі кругового включення в площині з відмінними пружними властивостями при рівномірному розтягненні докладно досліджувались у роботах [5, 12, 14, 17]. Розв'язки задач у цих статтях подано в замкненому вигляді. В роботі [4] з використанням методу Вінера – Гопфа у замкненому вигляді отримано розв'язок задачі про міжфазну тріщину на межі кругового включення у пластині під дією однорідного поля напружень на нескінченності з урахуванням фрикційного контакту берегів тріщини в околі її вершини. В роботі [1] розглянуто задачу про визначення напружено-деформованого стану пружної електрострикційної площини з дуговою тріщиною під дією електричних і механічних зусиль, прикладених на нескінченності, які можуть бути довільним чином орієнтовані відносно осі тріщини. Задача конкурентного розвитку тріщини та двох відшарувань на межі кругового жорсткого включення у нескінченній площині при різних навантаженнях розглядалась у роботі [11].

✉ lobvv@ua.fm

Невелика кількість робіт стосується тріщин на межі включення еліптичної форми. Так, у роботі [15] методом комплексних змінних у замкненій формі отримано розв'язок задачі про міжфазну тріщину на межі жорсткого еліптичного включення в площині з пружними властивостями. У [16] розглянуто задачу плоскої деформації для двох симетричних тріщин на межі жорсткого включення у матриці з нестисливого матеріалу під дією двох-осьового навантаження на нескінченності. В роботах [7, 8] для знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) використовувався чисельний метод фундаментальних функцій, що описують дію дублетів в точках, розміщених поза еліптичним включенням у нескінченній площині. Метод граничних елементів застосовано в праці [10] для обчислення КІН у задачах про тріщини на межі еліптичного включення і нескінченної матриці. В роботі [13] інтерфейс між нескінченною матрицею та еліптичним включенням моделювався шаром з пружин нескінченно малої товщини. Методом комплексних змінних побудовано нескінченні ряди, що описують напруження вздовж інтерфейсу.

В усіх наведених вище роботах використовувались рівняння лінійної теорії пружності. Така постановка є виправданою у випадку прийняття гіпотези крихкого руйнування. Однак, як відомо [3], утворення і розповсюдження тріщин у ряді випадків супроводжується виникненням пластичних зон, розміри яких інколи є сумірними з розміром самої тріщини. У випадку матеріалів з вираженими пластичними властивостями виникає питання про вплив пластичного характеру деформування на параметри руйнування. У цій роботі для включень кругової та еліптичної форми робиться спроба дослідження такого впливу в випадку, коли пластична поведінка контактуючих матеріалів описується дволанковими кусково-лінійними діаграмами «напруження – деформація».

1. Постановка задачі. Розглядається ізотропна площина (матриця), що містить еліптичне включення, скріплене з площиною уздовж всієї межі, за винятком дуги AB , симетрично розташованої відносно осі ординат (рис. 1). Параметричне рівняння цієї дуги $x = a \cos \vartheta$, $y = b \sin \vartheta$, $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi - \vartheta_0$, де a , b – півосі еліпса. Береги тріщини вважаються гладкими і такими, що можуть взаємодіяти з утворенням контактних макрозон. На нескінченності задано головні напруження N_1 , N_2 , також задано кут α між напрямом дії

напруження N_2 і віссю абсцис. Дуга $s_0 = \int_{\vartheta_0}^{\pi - \vartheta_0} \sqrt{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta} d\vartheta$, кут

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \vartheta_0\right).$$

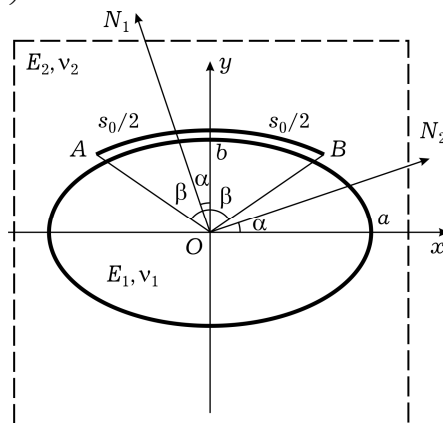


Рис. 1. Розрахункова схема біматеріалу з еліптичною тріщиною на межі поділу.

Матеріали матриці та включення можуть мати відмінні механічні властивості і при певних рівнях навантаження можуть деформуватися пружно-пластично. Пружні властивості обох матеріалів описуються модулем Юнга E_i та коефіцієнтом Пуассона ν_i , де $i = 1$ відповідає матеріалу включення, $i = 2$ – матеріалу матриці. Для кожного з матеріалів прийнято критерій текучості Мізеса з ізотропним зміцненням [2] і застосовано дволанкову апроксимацію діаграми $\sigma - \varepsilon$ «напруження – деформація» при одноосьовому розтягуванні:

$$t_{in} = \begin{cases} E_i \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \sigma_i^T / E_i, \\ \sigma_i^T + E_i^t (\varepsilon - \sigma_i^T / E_i), & \varepsilon > \sigma_i^T / E_i, \end{cases}$$

де σ_i^T – межа текучості; E_i^t – тангенціальний модуль.

Ставиться задача про визначення контактних зусиль, параметрів руйнування (J -інтеграла, розкриття тріщини) і порівняння результатів, отриманих для чисто пружних моделей, з результатами, отриманими за моделлю пружно-пластичного деформування. Задача розглядається у рамках гіпотез плоскої деформації.

2. Скінченноелементна модель деформування тіла з тріщиною. Числове розв'язання зазначеної задачі здійснювалось у середовищі пакета COSMOS/M 2.6, у якому процедури методу скінченних елементів реалізовано для широкого кола задач механіки суцільного середовища.

Нескінченну площину моделювали квадратною областю з довжиною сторони $2L$ при $L = 20 \max\{a, b\}$, що, як показали числові експерименти, забезпечує достатню збіжність з наявними аналітичними результатами для нескінченної області. У процесі дискретизації використовувались чотирикутні 8-вузлові скінченні елементи PLANE2D з поліноміальною апроксимацією переміщень другого порядку. Неоднорідні сітки скінченних елементів згущувались в околі границі між включенням і матрицею й розріджувались при наближенні до зовнішньої границі матриці. У середньому використовувалось близько 10000 скінченних елементів, що забезпечувало практичну незмінність результатів, отриманих при ще більш щільних сітках.

Для моделювання контактної взаємодії берегів тріщини застосовували контактні елементи GAP, які не перешкоджають розкриттю тріщини і водночас запобігають взаємопроникненню берегів. Такі елементи реалізують односторонні зв'язки за допомогою ітераційного застосування методів штрафних функцій і множників Лагранжа [18].

Напруження на зовнішній границі матриці задавали відповідно до умов навантаження на нескінченності:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= N_2 \sin^2 \alpha + N_1 \cos^2 \alpha, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (N_2 - N_1) \sin 2\alpha, \quad x = \pm L, \quad |y| \leq L, \\ \sigma_y &= N_2 \cos^2 \alpha + N_1 \sin^2 \alpha, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (N_2 - N_1) \sin 2\alpha, \quad y = \pm L, \quad |x| \leq L. \end{aligned}$$

Для стабілізації системи від переміщень як жорсткого цілого в кожному куті зовнішньої границі матриці додавали стержневий елемент, жорсткість якого була на декілька порядків меншою, ніж жорсткість матеріалу матриці. Другий кінець кожного стержня жорстко закріплювався. Така фіксація матриці не вносила помітних змін у напружений стан.

Для отримання інформації про швидкість вивільнення енергії деформації обчислювали значення інваріантного J -інтеграла Черепанова – Райса [3] уздовж замкнутих контурів навколо вершин тріщини. Оскільки концеп-

ція інваріантності J -інтеграла виходить з припущення про прямолінійність тріщини в межах контуру інтегрування, початкову і кінцеву точки кожного контуру обирали достатньо близько від вершини тріщини, в той час як сам контур інтегрування проводили поза межами можливих пластичних зон.

Розглядали пропорційне навантаження системи, при якому напруження N_1 і N_2 водночас змінювались лінійно залежно від значення параметра навантаження. Покроковий процес навантаження дозволяв відслідковувати поступовий перехід від чисто пружного деформованого стану до пружно-пластичного.

3. Числові результати. Описану скінченноелементну модель тестували з використанням ряду задач у пружній постановці, які мають точні розв'язки. Так, наприклад, у випадку безконтактного деформування, коли тріщина розкривається по всій довжині, використовували аналітичні результати [6] для коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах кругової тріщини в однорідному матеріалі при $\alpha = 0^\circ$, $N_2 = 0$:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{343 + 168 \cos \beta - 20 \cos 2\beta + 24 \cos 3\beta - 3 \cos 4\beta}{128 (\cos \beta - 3)^2},$$

де $J_0 = (1 - \nu_1^2)E_1^{-1}\pi a N_1^2 \sin \beta$ – значення J -інтеграла для прямолінійної тріщини, довжина якої дорівнює довжині хорди, що з'єднує вершини дугової тріщини. Порівняльні результати для пружної та пружно-пластичної моделей (при $a = b$, $\sigma_1^T = 10^{-3}E_1$, $E_1^t = 0.1E_1$) наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Залежність J/J_0 від рівня навантаження для різних значень кутів піврозхилу тріщини β .

N_1/σ_1^T	β		
	15°	45°	90°
0.1	0.96	0.68	0.32
0.2	0.98	0.68	0.34
0.3	1.00	0.69	0.37
0.4	1.01	0.70	0.41
0.5	1.02	0.73	0.44
0.6	1.03	0.76	0.46
результати [6]	0.95	0.67	0.31

З обчислених даних випливає, що при врахуванні пружно-пластичної поведінки матеріалу значення J -інтеграла дещо зростають порівняно з пружною моделлю, особливо для більш довгих тріщин. З іншого боку, вказане підвищення не є істотним до моменту вичерпання тріщиностійкості внаслідок досягнення J -інтегралом критичного значення.

Далі наведемо результати для випадку еліптичних включень з тріщиною на межі поділу при значеннях параметрів навантаження $N_2 = 0$, $\alpha = 70^\circ$. Розглядали три варіанти геометричних параметрів еліптичного включення: $a/b = 0.5, 1, 2$. При цьому довжина дуги s_0 в кожному випадку дорівнювала $2\pi b/3$, тому $\vartheta_0 = 9.4^\circ$, $\beta = 71.7^\circ$ при $a/b = 0.5$, $\vartheta_0 = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ при $a/b = 1$ і $\vartheta_0 = 58.9^\circ$, $\beta = 50.4^\circ$ при $a/b = 2$. Фізичні параметри матеріалу матриці вибрали такими: $E_2 = 210$ ГПа, $\nu_2 = 0.28$, $E_2^t = 0.1E_2$, $\sigma_2^T = 250$ МПа.

Як показав аналіз числових результатів, при такого типу навантаженні рівень напружень в околі вершини A тріщини був значно вищим, ніж в околі вершини B . У табл. 2 – табл. 4 наведено значення J -інтеграла у вер-

шині тріщини A , вимірюваного в $\text{кН} \cdot \text{м}^{-1}$, для різних співвідношень геометричних і фізичних параметрів еліптичного включення і матриці. Розглядали такі значення параметрів матеріалу включення: $E_1 = kE_2$, $E_1^t = kE_2^t$, $\sigma_1^T = k\sigma_2^T$, де числовий множник $k = 0.5, 1.0, 2.0$, а $\nu_1 = \nu_2$.

Таблиця 2. Значення J -інтеграла у вершині A тріщини при $a = 0.5b$.

N_1/σ_2^T	$k = 0.5$		$k = 1.0$		$k = 2.0$	
	пружна модель	пружно-пластична модель	пружна модель	пружно-пластична модель	пружна модель	пружно-пластична модель
0.1	0.99	0.99	1.16	1.16	1.21	1.21
0.2	3.98	3.70	4.66	4.57	4.85	4.77
0.3	8.95	7.96	10.48	9.65	10.91	10.63
0.4	15.92	12.69	18.63	17.05	19.39	19.76
0.5	24.87	18.81	29.11	27.08	30.29	33.18
0.6	35.82	29.50	41.92	39.11	43.62	51.13
0.7	48.75	46.19	57.05	54.48	59.38	74.70
0.8	63.68	68.09	74.52	75.02	77.55	104.00

Таблиця 3. Значення J -інтеграла у вершині A тріщини при $a = b$.

N_1/σ_2^T	$k = 0.5$		$k = 1.0$		$k = 2.0$	
	пружна модель	пружно-пластична модель	пружна модель	пружно-пластична модель	пружна модель	пружно-пластична модель
0.1	0.38	0.38	0.47	0.47	0.53	0.53
0.2	1.52	1.57	1.99	2.04	2.60	2.70
0.3	3.42	3.59	4.48	5.06	5.85	6.94
0.4	6.07	6.70	7.96	9.42	10.41	14.08
0.5	9.49	9.70	12.44	16.28	16.26	25.90
0.6	13.67	13.82	17.91	25.99	23.41	41.43
0.7	18.60	20.83	24.38	38.20	31.87	60.37
0.8	24.30	32.75	31.84	52.92	41.63	82.56

Таблиця 4. Значення J -інтеграла у вершині A тріщини при $a = 2b$.

N_1/σ_2^T	$k = 0.5$		$k = 1.0$		$k = 2.0$	
	пружна модель	пружно-пластична модель	пружна модель	пружно-пластична модель	пружна модель	пружно-пластична модель
0.1	0.30	0.30	0.36	0.36	0.42	0.42
0.2	1.08	1.11	1.47	1.44	1.68	1.65
0.3	2.64	2.34	3.27	3.21	3.75	3.81
0.4	4.68	4.11	5.82	5.55	6.66	6.96
0.5	7.32	6.81	9.12	8.56	10.31	11.79
0.6	10.53	10.14	13.11	13.02	15.00	18.48
0.7	14.31	14.37	17.85	18.27	20.41	26.97
0.8	18.69	19.53	23.21	25.05	26.67	38.10

Аналіз наведених результатів свідчить, що зменшення жорсткості матеріалу включення приводить до зменшення значень J -інтеграла, і навпаки. При цьому результати для пружно-пластичної моделі при $N_2/\sigma_2^T < 0.4$ неістотно відрізняються від результатів для пружної моделі. Подальше збільшення рівня навантаження призводить до зростання зон пластичної деформації, чим можна пояснити зростання розбіжностей між

результатами для пружної та пружно-пластичної моделей. Слід зазначити, що залежно від рівня тріщиностійкості матеріалів руйнування може початися при порівняно низьких рівнях навантаження, і тоді результати, отримані для обох моделей, будуть близькими.

На рис. 2 – рис. 4 показано результати розрахунків полів інтенсивностей напружень σ_i/σ_2^T , отримані в рамках пружно-пластичної моделі при $N_1 = 0.8\sigma_2^T$. Тут $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$, де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження у заданій точці. Темним кольором виділено зони пластичних деформацій. Очевидно, що у випадку включення з більш жорсткого матеріалу, ніж матеріал матриці, пластичні зони в околі вершини тріщини розвиваються переважно в матриці, і навпаки. У випадку однорідного матеріалу ці зони мали характерну для плоскої деформації форму «вісімки».

Окрім околів вершин тріщини, області пластичної деформації спостерігаються в матриці біля границі включення в зоні перетину границі включення з прямою, ортогональною до напрямку дії напружень N_1 . Ці пластичні деформації виникають внаслідок концентрації розтягувальних напружень аналогічно до того, як це відбувається у випадку площини з отвором.

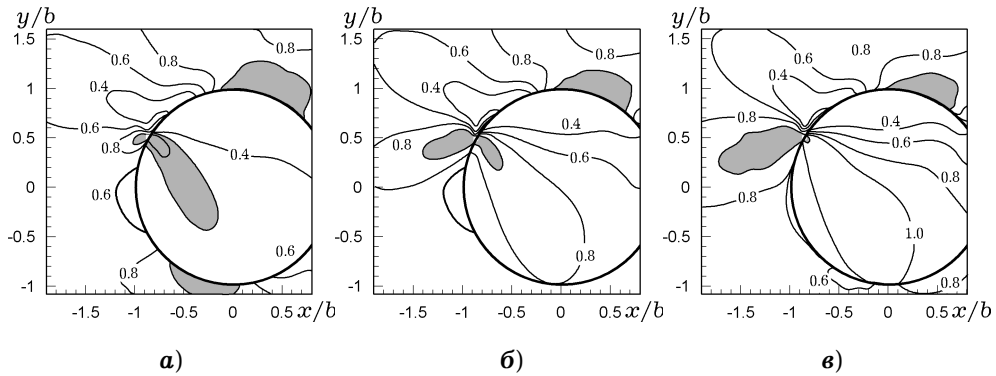


Рис. 2. Розподіл інтенсивностей напружень σ_i/σ_2^T в околі вершини A тріщини для пружно-пластичної моделі при $a = b$, $N_1 = 0.8\sigma_2^T$:

а) – $E_1 = 0.5E_2$; б) – $E_1 = E_2$; в) – $E_1 = 2E_2$.

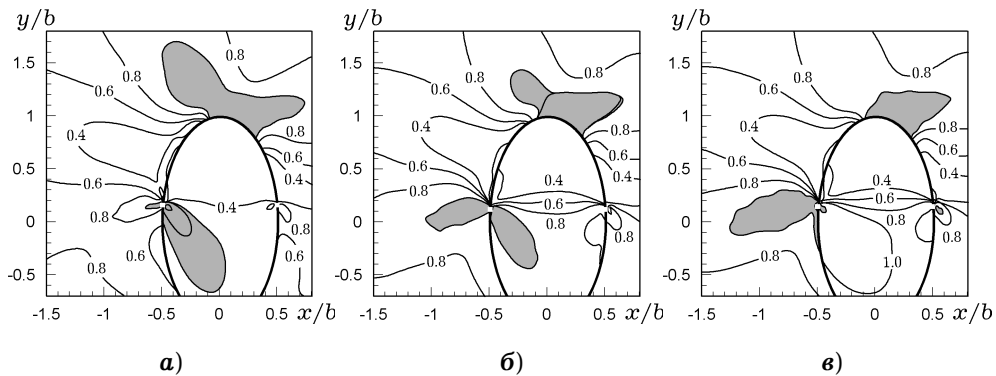


Рис. 3. Розподіл інтенсивностей напружень σ_i/σ_2^T в околі вершини A тріщини для пружно-пластичної моделі при $a = 0.5b$, $N_1 = 0.8\sigma_2^T$:

а) – $E_1 = 0.5E_2$; б) – $E_1 = E_2$; в) – $E_1 = 2E_2$.

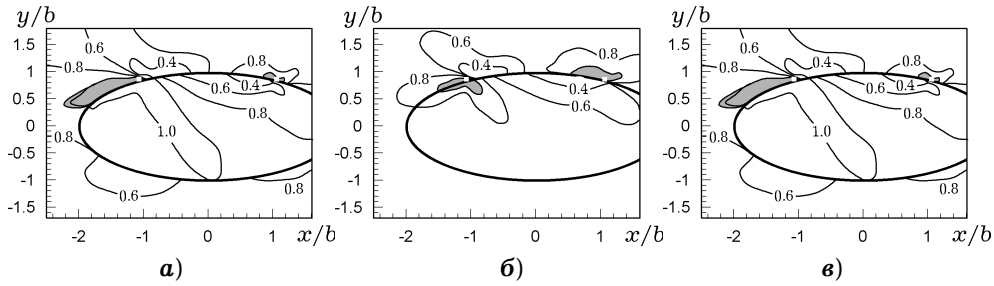


Рис. 4. Розподіл інтенсивностей напружень σ_i/σ_2^T в околі вершини A тріщини для пружно-пластичної моделі при $a = 2b$, $N_1 = 0.8\sigma_2^T$:
а) – $E_1 = 0.5E_2$; **б)** – $E_1 = E_2$; **в)** – $E_1 = 2E_2$.

На рис. 5, рис. 6 показано результати розрахунків розкриття тріщини Δ при рівні навантаження $N_1 = 0.8\sigma_2^T$. Тут $\mu_1 = E_1 / [2(1 + \nu_1)]$ – модуль зсуву матеріалу включення. Суцільними лініями зображено результати для пружно-пластичної моделі, штриховими – для пружної моделі. Як впливає з наведених графіків, для варіантів $a = b$ і $a = 0.5b$ утворюється одна макрозона контакту берегів тріщини та дві зони розкриття тріщини. Для еліптичного включення з параметрами $a = 2b$ зона контакту берегів тріщини відсутня. Найбільшу розбіжність між результатами для обох моделей спостерігаємо ближче до вершини A тріщини. При цьому, як і слід було очікувати, розкриття тріщини при врахуванні пластичного деформування є більшим, ніж у випадку чисто пружного деформування.

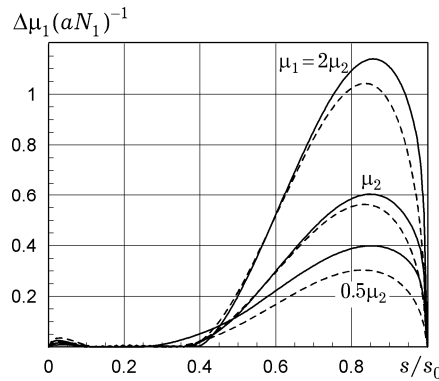


Рис. 5. Розкриття тріщини Δ для кругового включення при $N_1 = 0.8\sigma_2^T$.

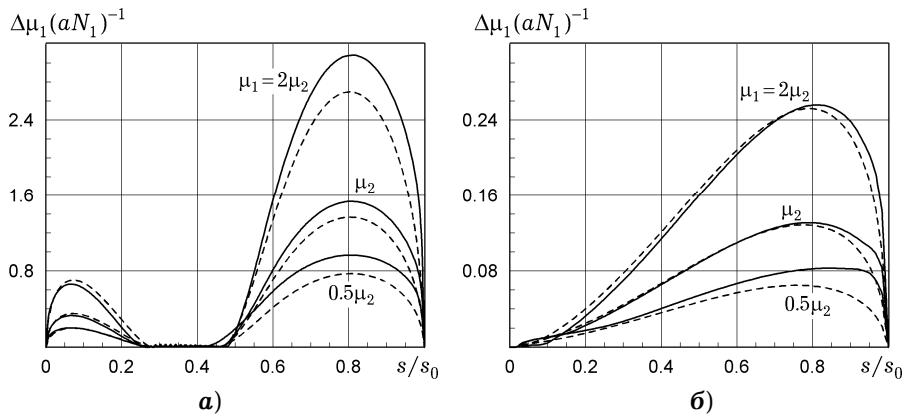


Рис. 6. Розкриття тріщини Δ для еліптичного включення при $N_2 = 0.8\sigma_2^T$:
а) – $a = 0.5b$; **б)** – $a = 2b$.

На рис. 7 зображено контактні зусилля σ_n для рівня навантаження $N_1 = 0.8\sigma_2^T$. Суцільними лініями зображено результати для пружно-пластичної моделі, а штриховими – для пружної моделі. Бачимо, що значення σ_n для пружно-пластичної моделі дещо нижчі, ніж для чисто пружної моделі.

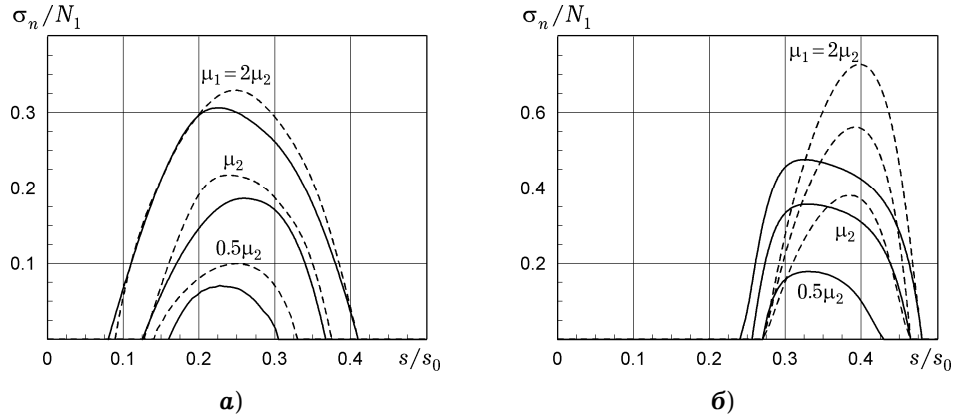


Рис. 7. Контактні зусилля σ_n при $N_1 = 0,8\sigma_2^T$: **а)** – $a = b$; **б)** – $a = 0.5b$.

Висновки. Застосування методу скінченних елементів дозволяє істотно розширити клас задач, що виникають при дослідженні напружено-деформованого стану біматеріалів з міжфазними тріщинами. Цей підхід не тільки забезпечує задовільний збіг отриманих результатів з наявними розв'язками в замкненій формі, але й дає можливість моделювати ті важливі особливості деформування, які до цього часу не розглядались через труднощі аналітичного характеру. У цій роботі поряд з чисто пружною моделлю деформування розглядалась і пружно-пластична модель, що дало можливість порівняти результати їх застосування і зробити такі висновки.

- Врахування пластичного деформування матеріалів в околі вершин тріщин у міру зростання рівня навантаження на нескінченності призводить до певного зростання розбіжностей між значеннями J -інтегралів для чисто пружної та пружно-пластичної моделей деформування. При цьому для останньої ці значення є більш високими. Однак оскільки внаслідок вичерпання тріщиностійкості матеріалу процес руйнування може починатися при достатньо низьких рівнях навантаження, результати для обох моделей можуть відрізнитися мало.
- Утворення пластичних зон в околах вершин тріщини при наявності двох різних матеріалів відбувається переважно в сторону більш м'якого матеріалу. У випадку двох однакових матеріалів пластичні зони набувають характерної для плоского деформованого стану форми «вісімки».
- Окрім вершин тріщини, області пластичної деформації можуть також утворюватися в матриці біля границі включення внаслідок концентрації напружень аналогічно до того, як це відбувається у випадку площини з отвором.
- Розкриття тріщини при врахуванні пластичного деформування є дещо більшим, ніж у випадку чисто пружного деформування. Найбільші розбіжності між результатами для обох моделей спостерігаються ближче до вершин тріщин.
- Значення нормальних контактних зусиль для пружно-пластичної моделі є дещо нижчими, ніж для чисто пружної моделі. Розміри макрозон контактної взаємодії для обох моделей відрізняються незначно.

Все це дає підстави для висновку про те, що в докритичному стані зазначені відмінності не є суттєвими, а отже, використання моделі пружного деформування для розглянутих задач є виправданим.

1. Годес А. Ю., Лобода В. В. Дугова тріщина в однорідному електрострикційному матеріалі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – **58**, № 1. – С. 92–102.
Te same: Hodes A. J., Loboda V. V. Arc crack in a homogeneous electrostrictive material // *J. Math. Sci.* – 2017. – **222**, No. 2. – P. 114–130.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3286-7>.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – Москва: Наука. – 1969. – 420 с.
3. Керштейн И. М., Клоушиников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А. Основы экспериментальной механики разрушения. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 140 с.
4. Улітко А., Острик В. Міжфазна тріщина на межі розділу кругового включення і матриці // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2006. – Вип. 3. – С. 138–149.
5. Bhargava R. D., Narayan R. Circular inhomogeneity and two concentric symmetric circular arc cracks problem in an infinite isotropic elastic plate under tension // *Int. J. Fract.* – 1975. – **11**, No. 3. – P. 509–520.
– <https://doi.org/10.1007/BF00033537>.
6. Cotterell, B., Rice J. R. Slightly curved or kinked cracks // *Int. J. Fract.* – 1980. – **16**, No. 2. – P. 155–169.
– <https://doi.org/10.1007/BF00012619>.
7. Dai-Heng Chen, Seiji Nakamichi. Plane problem of cracks generated from the interface of an elliptical inclusion // *JSME Int. J. Ser. A.: Solid Mech. & Mater. Eng.* – 1997. – **40**, No. 3. – P. 275–282.
– <https://doi.org/10.1299/jsmea.40.275>.
8. Dai-Heng Chen, Seiji Nakamichi. Stress intensity factors for an interface crack along an elliptical inclusion // *Int. J. Fract.* – 1996. – **82**, No. 2. – P. 131–152.
– <https://doi.org/10.1007/BF00034660>.
9. England A. H. An arc crack around a circular elastic inclusion // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1966. – **33**, No. 3. – P. 637–640.
– <https://doi.org/10.1115/1.3625132>.
10. Gao Y. L., Tan C. L., Selvadurai A. P. S. Stress intensity factors for cracks around or penetrating an elliptic inclusion using the boundary element method // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 1992. – **10**, No. 1. – P. 59–68.
– [https://doi.org/10.1016/0955-7997\(92\)90079-M](https://doi.org/10.1016/0955-7997(92)90079-M).
11. Norio Hasebe, Yasumiki Yamamoto. A crack initiation and two debondings development at the interface of a circular rigid inclusion under uniform loading // *Int. J. Damage Mech.* – 2015. – **24**, No. 7. – P. 965–982.
– <https://doi.org/10.1177/1056789514560774>.
12. Piva A. A crack along a circular interface between dissimilar media // *Meccanica.* – 1982. – **17**, No. 2. – P. 85–90.
– <https://doi.org/10.1007/BF02135007>.
13. Shen H., Schiavone P., Ru C. Q., Mioduchowski A. Stress analysis of an elliptic inclusion with imperfect interface in plane elasticity // *J. Elasticity.* – 2001. – **62**, No. 1. – P. 25–46.
– <https://doi.org/10.1023/A:1010911813697>.
14. Toya M. A crack along the interface of a rigid circular inclusion embedded in an elastic solid // *Int. J. Fract.* – 1973. – **9**, No. 4. – P. 463–470.
– <https://doi.org/10.1007/BF00036326>.
15. Toya M. Debonding along the interface of an elliptic rigid inclusion // *Int. J. Fract.* – 1975. – **11**, No. 6. – P. 989–1002.
– <https://doi.org/10.1007/BF00033845>.
16. Viola E., Piva A. Fracture behaviour by two cracks around an elliptic rigid inclusion // *Eng. Fract. Mech.* – 1981. – **15**, No. 3–4. – P. 303–325.
– [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(81\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(81)90063-1).
17. Viola E., Piva A. Two arc cracks around a circular rigid inclusion // *Meccanica.* – 1980. – **15**, No. 3. – P. 166–176.
– <https://doi.org/10.1007/BF02128927>.
18. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method for solid and structural mechanics. – Vol. 2. – Oxford etc.: Elsevier, 2005. – 736 p.

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОСКОСТИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ

Рассматривается задача об определении упругопластического напряженно-деформированного состояния матрицы с эллиптическим включением из другого материала при наличии дуговой трещины на границе раздела под действием механических усилий, приложенных на бесконечности и произвольным образом ориентированных относительно трещины. Допускается возникновение контактных макрозон между берегами трещины. Принята модель изотропного упрочнения материалов с двухзвенной аппроксимацией кривых «напряжение – деформация». Рассматриваются численные решения упругих и упругопластических задач. Отмечается возрастание отличий между этими результатами по мере перехода от упругого к упругопластическому состоянию в процессе роста уровня нагружения.

Ключевые слова: биматериалы, круговое или эллиптическое включение, межфазная трещина, упругопластическая деформация, контактные макрозоны, метод конечных элементов.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF ELASTIC-PLASTIC STATE OF THE PLANE WITH ELLIPTIC INCLUSION IN THE PRESENCE OF INTERPHASE CRACK

A problem of determining of elastic-plastic stress-strain state of a matrix with an elliptic inclusion made from another material in the presence of an arc crack at the interface under action of arbitrarily oriented relative to the crack mechanical loadings applied at infinity is considered. The possibility of appearance of contact macrozones between crack faces is assumed. A model of isotropic hardening of materials with double-link approximation of «stress – strain» curves is used. Numerical solutions of pure elastic and elastic-plastic problems are considered. An increase in the discrepancies in these results is noted as the transition from elastic to elastic-plastic state occurs during the increasing of loading level.

Key words: bimetals, circular or elliptical inclusion, interphase crack, elastic-plastic deformation, contact macrozone, finite element method.

Дніпровський нац. ун-т
ім. О. Гончара, Дніпро

Одержано
13.01.20