

## ДВОВИМІРНІ ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕРУХОМИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

*Розглянуто двовимірні динамічні задачі теорії пружності, що зводяться до сингулярних інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь з нерухомими особливостями. Це задачі про визначення напруженого стану в тілах з крайовими дефектами, з дефектами з перерізом у вигляді ламаної, а також деякі контактні задачі. Для розв'язування отриманих рівнянь запропоновано числовий метод, який враховує справжню асимптотику розв'язків і ґрунтується на застосуванні спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів.*

**Ключові слова:** тріщина, тонке включення, контактна взаємодія, сингулярне інтегральне рівняння.

**Вступ.** Одним із поширених сучасних методів розв'язування задач механіки деформівного твердого тіла є метод інтегральних рівнянь. Особливо ефективним цей метод стає при розв'язанні задач для тіл з тріщинами, тонкими включеннями, контактної взаємодії. Існує багато способів зведення подібних задач до інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь. Але найбільш універсальним є метод потенціалів, який відразу дає інтегральне подання розв'язків у вигляді пружних потенціалів з невідомими густинами [10, 18, 19, 21]. Значний внесок у створення і розвиток методу потенціалів, особливо в напрямку застосування його для тіл з тріщинами і тонкостінними дефектами, здійснено Г. С. Кітом. Так, метод потенціалів стосовно задач пружної і теплової рівноваги тіл з тріщинами викладено в статтях [3, 6, 7] і узагальнено в монографіях [2, 8]. Поширення методу потенціалів на динамічні задачі механіки деформівного твердого тіла Г. С. Кітом і співавторами здійснено у монографії [5] і статтях [4, 9]. Як правило, особливо при розв'язанні динамічних задач, отримані інтегральні рівняння вимагають наближеного розв'язання числовими методами. У вказаних вище монографіях і статтях пропонуються такі методи, зокрема такі, що ґрунтуються на процедурі регуляризації сингулярних інтегралів. Ці методи є досить ефективними у випадках тріщин і тонких включень, які містяться в необмежених тілах або є внутрішніми і не перетинають межі тіла. При розв'язуванні двовимірних задач припускається, що ці дефекти розміщуються на відрізках гладких кривих. У тривимірному випадку вважається, що вони займають плоскі області, обмежені гладкими лініями. Але реальні дефекти можуть мати більш складну форму: бути кусково-гладкими, перетинатись, розгалужуватись, перетинати межу тіла. Розв'язання задач про визначення напруженого стану в тілах з такими дефектами методом інтегральних рівнянь пов'язано з певними математичними труднощами. Вони полягають у наявності нерухомих особливостей у сингулярних складових ядер цих рівнянь. Як показано у праці [1], наявність нерухомих особливостей суттєво впливає на асимптотику розв'язків сингулярних інтегральних рівнянь. Ця асимптотика повинна бути досліджена і врахована при визначенні класу функцій, у якому слід будувати наближений розв'язок. Для числового розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями також потрібні спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

У пропонованій статті досліджуємо двовимірні динамічні задачі теорії пружності, які зводяться до сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Отримані рівняння розв'язуються числовим методом,

✉ dr.vg.popov@gmail.com

яким враховується справжня асимптотика розв'язків і використовуються спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

**1. Гармонічні коливання півпростору з крайовими дефектами.** Розглянемо ізотропний пружний півпростір  $y \geq 0$ , який перебуває в умовах деформації поздовжнього зсуву і містить похилий смуговий дефект (тріщину або тонке жорстке включення), що перетинає його поверхню під кутом  $\alpha$  і займає у площині  $Oxy$  відрізок довжини  $2a$  (рис. 1).

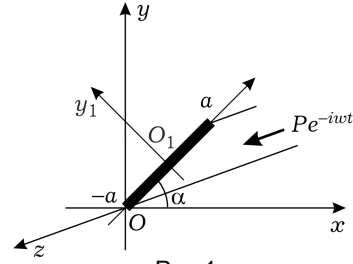


Рис.1

У півпросторі відбуваються гармонічні коливання або внаслідок дії на включення зсувної уздовж осі  $Oz$  сили  $P e^{-i\omega t}$ , або внаслідок прикладання до берегів тріщини гармонічного навантаження інтенсивності  $p(x_1) e^{-i\omega t}$ . Надалі множник  $e^{-i\omega t}$ , що визначає залежність від часу, опускаємо. За таких умов єдина відмінна від нуля  $z$ -компонента вектора переміщень задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + x_2^2 W = 0, \quad x_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина,  $G$  – модуль зсуву пружного матеріалу. Поверхню півпростору вважаємо ненавантаженою:

$$\tau_{zy}(x, 0) = G \frac{\partial W}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Для формулювання умов на поверхні дефекту вводимо локальну систему координат  $Ox_1y_1$ , центр якої співпадає з серединою відрізка зайнятого дефектом (рис. 1). У випадку включення з огляду на його малу товщину  $h$ , граничні умови формулюємо на його серединній поверхні. Через  $W_1(x_1, y_1)$  позначимо переміщення  $W(x, y)$  після переходу до координат  $Ox_1y_1$ . Тоді при повному зчепленні між включенням і півпростором повинна виконуватись рівність

$$W_1(x_1, 0) = d, \quad -a \leq x_1 \leq a. \quad (3)$$

Крім цього, на поверхні включення повинне бути розривним дотичне напруження, для стрибка якого вводимо позначення

$$\chi_1(x_1) = \tau_{zy_1}(x_1, +0) - \tau_{zy_1}(x_1, -0), \quad -a < x_1 < a, \quad \tau_{zy_1} = G \frac{\partial W_1}{\partial y_1}. \quad (4)$$

Стала  $d$  у правій частині рівності (3) – невідома амплітуда зсувних коливань включення під дією прикладеної сили  $P$ . Вона визначається з рівняння руху включення, яке при гармонічних коливаннях має вигляд

$$-ah\omega^2\rho_0 d = P + \int_{-a}^a \chi_1(\eta) d\eta, \quad (5)$$

де  $\rho_0$  – густина матеріалу включення.

Умови на поверхні тріщини формулюємо згідно з умовами навантаження її берегів:

$$\tau_{zy_1}(x_1, \pm 0) = G \frac{\partial}{\partial y_1} W_1(x_1, \pm 0) = p(x_1), \quad -a \leq x_1 \leq a. \quad (6)$$

Наявність тріщини викликає також стрибок переміщень на її поверхні

$$\chi_2(x_1) = W_1(x_1, +0) - W_1(x_1, -0), \quad -a \leq x_1 \leq a, \quad \chi_2(-a) = 0. \quad (7)$$

За таких умов необхідно визначити напружений стан у півпросторі з дефектом.

Розв'язання сформульованих граничних задач ґрунтується на розривних розв'язках рівняння Гельмгольца (1) зі стрибками (4) і (7) [16], побудованих у системі координат  $O_1x_1y_1$ . Після реалізації умови (3) у випадку включення і умови (6) у випадку тріщини приходимо до рівнянь відносно стрибків на поверхні дефекту. За наявності включення отримуємо сингулярне інтегральне рівняння з додатковою умовою [12]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left[ -\frac{1}{\tau - \zeta} - \frac{(\tau + 1) \cos 2\alpha - (\zeta + 1)}{q^2(\tau, \zeta)} + \right. \\ \left. + R(\tau - \zeta) + F(\tau, \zeta) \right] d\tau = 0, \quad -1 < \zeta < 1, \\ \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) [-\ln(1 + \tau) + R_0(\tau + 1)] d\tau = d_0. \end{aligned} \quad (8)$$

У рівняннях (8) введено такі позначення:

$$\begin{aligned} \eta = a\tau, \quad x_1 = a\zeta, \quad \varphi(\tau) = \frac{\chi_1(a\tau)}{G}, \quad d_0 = \frac{d}{a}, \\ q^2(\tau, \zeta) = (\tau + 1)^2 + (\zeta + 1)^2 - 2(\tau + 1)(\zeta + 1) \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

До рівнянь (8) необхідно долучити ще рівняння (5) для визначення невідомої амплітуди коливань включення, яке після введення позначень (9) набуває вигляду

$$d_0 = -\frac{1}{2\varepsilon\bar{\rho}\alpha_0^2} \left( P_0 + \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) d\tau \right), \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a}.$$

У випадку тріщини рівняння є інтегро-дифференціальним [11]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2'(\tau) \left[ \frac{1}{\tau - \zeta} - \frac{(\tau + 1) \cos 2\alpha - (\zeta + 1)}{q^2(\tau, \zeta)} \right] d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \left[ -\frac{\alpha_0^2}{2} \ln|\tau - \zeta| + \right. \\ \left. + U(\tau - \zeta) + V(\tau, \zeta) \right] d\tau = p_0(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1. \end{aligned} \quad (10)$$

У рівнянні (10) позначено

$$\chi_2(a\tau) = a\varphi_2(\tau), \quad \chi_2'(a\tau) = \varphi_2'(\tau), \quad p_0(\zeta) = \frac{P(a\zeta)}{G}.$$

Функції  $R(\tau - \zeta)$ ,  $F(\tau, \zeta)$ ,  $R_0(\tau + 1)$ ,  $U(\tau - \zeta)$ ,  $V(\tau, \zeta)$ , що входять у рівняння (8), (10), є обмеженими при  $-1 \leq \zeta, \tau \leq 1$  і визначають регулярні інтеграли. Як можемо бачити, функція  $q^2(\tau, \zeta)$ , означена у (9), при  $\zeta = \tau = -1$  дорівнює нулеві. Це означає, що сингулярна складова рівнянь (8), (10) має нерухому особливість у цій точці. Наявність у сингулярній складовій цих рівнянь нерухомої особливості впливає на асимптотики їх розв'язків в околі точки  $\tau = -1$ . Особливість розв'язку в околі цієї точки може бути визначена шляхом дослідження асимптотичних властивостей сингулярних інтегралів [13] або шляхом дослідження символу сингулярного ядра [1]. В результаті встановлено, що розв'язки рівнянь (8), (10) слід розшукувати у вигляді [11, 12]

$$\varphi_1(\tau) = (1 - \tau)^{-1/2} (1 + \tau)^{-\delta} \psi(\tau), \quad \varphi_2'(\tau) = (1 - \tau)^{-1/2} (1 + \tau)^{-\gamma} \psi(\tau), \quad (11)$$

де степеневі показники визначаються формулами

$$\delta = \frac{2\alpha - \pi}{2(\pi - \alpha)}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\pi - \alpha}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Далі числовий метод розв'язування базується на наближенні функцій  $\psi(\tau)$  інтерполяційними многочленами, де за вузли інтерполяції вибираємо корені многочленів Якобі, ортогональних з відповідною вагою. За таким наближенням для сингулярних інтегралів отримано спеціальні квадратурні формули, наведені в [11, 12]. Для визначення значень функцій  $\psi(\tau)$  у вузлах інтерполяції використовуємо метод механічних квадратур з коренями функцій Якобі як точок колокації.

Графіки на рис. 2 і рис. 3 ілюструють результати дослідження практичної збіжності числового методу.

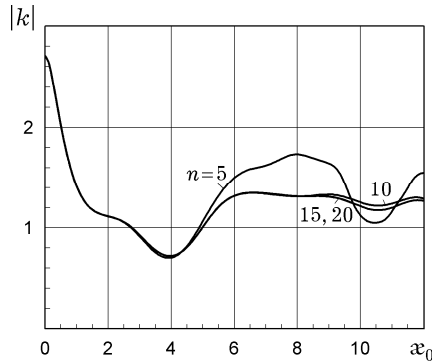


Рис. 2

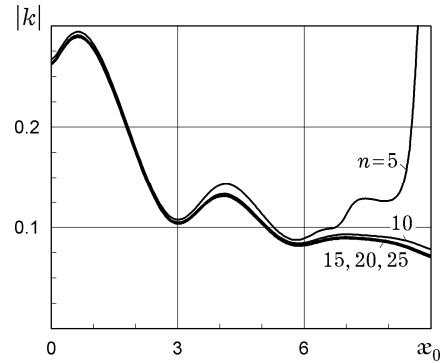


Рис. 3

Побудовано графіки залежності абсолютної величини безрозмірного коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН)  $k = K_3/G\sqrt{a}$  від безрозмірного хвильового числа  $x_0$ . Криві обчислено при значеннях кількості вузлів інтерполяції  $n = 5, 10, 15, 20, 25$ , що використовувалися при наближенні функцій  $\psi(\tau)$  у формулах (11). Розрахунки проведено для таких даних:  $\bar{\rho} = 1$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $P_0 = 1$ ,  $p_0(\zeta) \equiv 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . Графіки на рис. 2 стосуються тріщини, а на рис. 3 – тонкого жорсткого включення. Можемо бачити, що в області низьких частот ( $x_0 \leq 3$ ) для досягнення досить високої точності (відносна похибка не перевищує 1%) достатньо використовувати лише 5 вузлів інтерполяції. В усьому розглянутому частотному діапазоні ( $0 \leq x_0 \leq 9$ ) для отримання значень КІН з похибкою, меншою ніж 0.1%, вистачає 15 вузлів інтерполяції.

## 2. Взаємодія пружних хвиль поздовжнього зсуву з наскрізними дефектами з перерізом у вигляді ламаної.

Розглянемо необмежене ізотропне пружне тіло в стані антиплоскої деформації з наскрізним дефектом (тонким жорстким включенням або тріщиною), який у площині  $Oxy$  має форму ламаної (рис. 4), складеної з  $N$  ланок.

З дефектом взаємодіє плоска хвиля поздовжнього зсуву, фронт якої утворює кут  $\theta_0$  з віссю  $Ox$  і викликає в тілі таке переміщення уздовж осі  $Oz$ :

$$W_0^{(i)}(x, y) = A_0 e^{i\alpha_2(x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0)}. \quad (12)$$

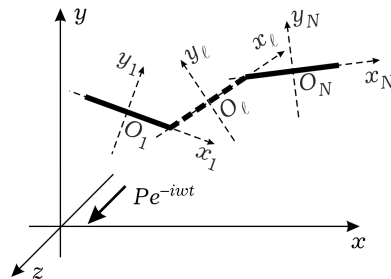


Рис. 4

Залежність від часу визначається множником  $e^{-i\omega t}$ , який тут і далі опускаємо. Нехай  $W(x, y)$  є єдиною відмінною від нуля при антиплоский деформації компонентою вектора переміщень, викликаних хвилею, відбитою від дефекту. У системі координат  $Oxy$  вона задовольняє рівняння Гельмгольца (1). Для формулювання граничних умов на дефекті з кожною його ланкою пов'язуємо систему координат  $O_\ell x_\ell y_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, N$ , центр якої співпадає з серединою ланки (рис. 4). Позначимо через  $W_\ell(x_\ell, y_\ell)$  переміщення у системі координат, пов'язаній з  $\ell$ -ю ланкою дефекту. На кожній ланці тріщини задаємо умови

$$\tau_{zy_\ell}(x_\ell, 0) = -\tau_{zy_\ell}^{(i)}(x_\ell, 0), \quad x_\ell \in [-d_\ell, d_\ell], \quad \ell = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

У цих рівностях

$$\tau_{zy_\ell} = G \frac{\partial W_\ell}{\partial y_\ell}, \quad \tau_{zy_\ell}^{(i)}(x_\ell, y_\ell) = G \frac{\partial W_\ell^{(i)}}{\partial y_\ell}$$

– напруження, викликані відбитою і падаючою хвилею,  $2d_\ell$  – довжина  $\ell$ -ї ланки. Умови (13) забезпечують відсутність напружень на поверхні тріщини. Переміщення відбитої хвилі на ланках тріщини мають розриви з невідомими стрибками:

$$W_\ell(x_\ell, +0) - W_\ell(x_\ell, -0) = \chi_{2\ell}(x_\ell), \quad x_\ell \in [-d_\ell, d_\ell], \quad \ell = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Крім цього, з огляду на неперервність переміщень уздовж берега тріщини, у вершинах ламаної повинні виконуватись рівності

$$W_\ell(d_\ell, +0) = W_{\ell+1}(-d_{\ell+1}, +0), \\ W_\ell(d_\ell, -0) = W_{\ell+1}(-d_{\ell+1}, -0), \quad \ell = 1, 2, \dots, N-1. \quad (15)$$

Якщо дефект є тонким жорстким включенням, то на його ланках задаються умови

$$W_\ell(x_\ell, 0) = c - W_\ell^{(i)}(x_\ell, 0), \quad \ell = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Ці умови забезпечують повне зчеплення включення з зовнішнім матеріалом. Наявність включення викликає розривність напружень, для стрибків яких на ланках включення введемо позначення

$$\tau_{zy_\ell}(x_\ell, +0) - \tau_{zy_\ell}(x_\ell, -0) = \chi_{1\ell}(x_\ell), \quad -d_\ell < x_\ell < d_\ell, \quad \ell = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Як і в випадку тріщини, невідому амплітуду коливань включення визначаємо з рівняння його руху

$$-\omega^2 c \sum_{\ell=1}^N m_\ell = \sum_{\ell=1}^N \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{1\ell}(\eta) d\eta, \quad m_\ell = 2\rho_0 d_\ell h. \quad (18)$$

Розв'язання сформульованих задач починаємо з побудови у системі координат  $O_\ell x_\ell y_\ell$  розривного розв'язку рівняння Гельмгольца (1) для кожної ланки дефекту [16]. У випадку тріщини це є розривний розв'язок зі стрибками (14), а у випадку включення – зі стрибками (17). Після цього здійснюється перехід до системи координат  $Oxy$  і переміщення відбитого хвильового поля подаються у вигляді суми цих розривних розв'язків [17, 20]. Для остаточного визначення переміщення дифракційного поля залишається знайти невідомі стрибки. Для цього слід використати умови на ланках дефектів. Результатом реалізації умови (13) є система інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків (14) і їх похідних. Ця система після вилучення сингулярних складових ядер і деяких перетворень набуває вигляду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{\mathbf{E}}{\tau - \zeta} + \mathbf{G}(\tau, \zeta) + \mathbf{R}(\tau, \zeta) \right) \Phi_2'(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (-\alpha_0^2 \mathbf{D} \ln |\tau - \zeta| + \mathbf{U}(\tau, \zeta)) \Phi_2(\tau) d\tau = \mathbf{F}(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1. \quad (19)$$

У системі (19) позначено

$$\Phi_2(\tau) = \begin{pmatrix} \Phi_{21}(\tau) \\ \Phi_{22}(\tau) \\ \vdots \\ \Phi_{2N}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \Phi_2'(\tau) = \begin{pmatrix} \Phi_{21}'(\tau) \\ \Phi_{22}'(\tau) \\ \vdots \\ \Phi_{2N}'(\tau) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\tau) = \begin{pmatrix} f_1(\tau) \\ f_2(\tau) \\ \vdots \\ f_N(\tau) \end{pmatrix},$$

$$x_\ell = d_\ell \zeta, \quad \varphi_{2\ell}(\tau) = \frac{\chi_\ell(d_\ell \tau)}{d_\ell},$$

$$f_\ell(\zeta) = -i\alpha_0 C_0 \sin(\theta_0 - \alpha_\ell) \times \exp(i\alpha_0(\varepsilon_\ell \cos \theta_0 + \delta_\ell \sin \theta_0 + \gamma_\ell \cos(\theta_0 - \theta_\ell))),$$

$$C_0 = \frac{A_0}{d}, \quad \gamma_\ell = \frac{d_\ell}{d}, \quad \delta_\ell = \frac{b_\ell}{d}, \quad \varepsilon_\ell = \frac{a_\ell}{d}, \quad \alpha_0 = \alpha_2 d,$$

$$d = \max \{d_1, d_2, \dots, d_N\},$$

$\mathbf{E}$  – одинична матриця розміру  $N \times N$ ;  $\mathbf{D}$  – діагональна матриця розміру  $N \times N$  з елементами  $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2$  на діагоналі. Матриця  $\mathbf{G}(\tau, \zeta)$  має вигляд

$$\mathbf{G}(\tau, \zeta) = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & g_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{32} & 0 & g_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{N-1, N-2} & 0 & g_{N-1, N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g_{N, N-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Ненульові елементи матриці  $\mathbf{G}(\tau, \zeta)$  визначаються формулами

$$g_{\ell, \ell-1}(\tau, \zeta) = -\frac{\gamma_{\ell-1}^2(1-\tau) \cos \alpha_{\ell, \ell-1} + \gamma_\ell \gamma_{\ell-1}(1+\zeta)}{\mathcal{Q}_{\ell, \ell-1}(\tau, \zeta)}$$

$$g_{\ell, \ell+1}(\tau, \zeta) = \frac{\gamma_{\ell+1}(\gamma_{\ell+1}(1+\tau) \cos \alpha_{\ell, \ell+1} + \gamma_\ell(1-\zeta))}{\mathcal{Q}_{\ell, \ell+1}(\tau, \zeta)}, \quad \alpha_{\ell k} = \alpha_\ell - \alpha_k, \quad (21)$$

де

$$\mathcal{Q}_{\ell, \ell-1}(\tau, \zeta) = \gamma_{\ell-1}^2(1-\tau)^2 + \gamma_\ell^2(1+\zeta)^2 + 2\gamma_{\ell-1}\gamma_\ell(1-\tau)(1+\zeta) \cos \alpha_{\ell, \ell-1},$$

$$\mathcal{Q}_{\ell, \ell+1}(\tau, \zeta) = \gamma_{\ell+1}^2(1+\tau)^2 + \gamma_\ell^2(1-\zeta)^2 + 2\gamma_{\ell+1}\gamma_\ell(1+\tau)(1-\zeta) \cos \alpha_{\ell, \ell+1}.$$

Якщо дефектом є включення, то реалізується продиференційована умова (16) і умова еквівалентності продиференційованої і вихідної рівностей [17]. В результаті отримуємо таку систему сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами:

$$\int_{-1}^1 \left( -\frac{\mathbf{E}}{\tau - \zeta} - \mathbf{G}(\tau, \zeta) + \mathbf{S}(\tau, \zeta) \right) \Phi_1(\tau) d\tau = \mathbf{F}(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1,$$

$$\int_{-1}^1 (\mathbf{C} \ln |\tau - 1| + \mathbf{R}_0(\tau)) \Phi_1(\tau) d\tau = \mathbf{F}_0. \quad (22)$$

У системі (22) позначено

$$\Phi_1(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(\tau) \\ \varphi_{12}(\tau) \\ \vdots \\ \varphi_{1N}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \Phi_2'(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi'_{11}(\tau) \\ \varphi'_{12}(\tau) \\ \vdots \\ \varphi'_{1N}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \varphi_{1\ell}(\tau) = \frac{\chi_{1\ell}(d_\ell \tau)}{G}.$$

Вектори  $\mathbf{F}(\zeta)$ ,  $\mathbf{F}_0$  мають такі компоненти:

$$f_\ell(\zeta) = -2\pi i A_0 x_0 \cos(\beta_\ell - \theta_0) e^{i\alpha_0 r_0 \ell(\zeta)}, \quad f_{\ell 0} = c_0 - A_0 e^{i\alpha_0 r_0 \ell(-1)},$$

$$r_{0\ell}(\zeta) = \varepsilon_\ell \cos \theta_0 + \delta_\ell \sin \theta_0 + \gamma_\ell \zeta \cos(\alpha_\ell - \theta_0).$$

Матриця  $\mathbf{G}(\tau, \zeta)$  у системі (22) теж визначається формулами (20), (21).  $\mathbf{C}$  – діагональна матриця розміру  $N \times N$  з елементами  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$  на діагоналі. В обох системах рівнянь (19) і (22) матриці  $\mathbf{R}(\tau, \zeta)$ ,  $\mathbf{U}(\tau, \zeta)$ ,  $\mathbf{S}(\tau, \zeta)$ ,  $\mathbf{R}_0(\tau)$  складаються з функцій, обмежених при  $-1 \leq \zeta, \tau \leq 1$ . До системи (22) необхідно додати рівність (18) для визначення невідомої амплітуди, яка в нових позначеннях набуває вигляду

$$c_0 = -\frac{1}{2\ell_0} \sum_{\ell=1}^N \gamma_\ell \int_{-1}^1 \varphi_{1\ell}(\tau) d\tau, \quad \ell_0 = \bar{\rho} \varepsilon x_0^2 \sum_{\ell=1}^N \gamma_\ell, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad \varepsilon = \frac{h}{d}. \quad (23)$$

З формул (20), (21) випливає, що системи рівнянь (19) і (22) містять у сингулярній складовій нерухомі особливості при  $\tau = -1$ ,  $\zeta = 1$  і  $\tau = 1$ ,  $\zeta = -1$ , що буде зумовлювати особливості їхніх розв'язків в околі точок  $\tau = \pm 1$ . Тому у випадку тріщини похідні від розв'язків системи (19) розшукуємо у вигляді [20]

$$\varphi'_{1\ell}(\tau) = (1 - \tau)^{-\sigma_{\ell+1}} (1 + \tau)^{-\sigma_\ell} \psi_{1\ell}(\tau), \quad \ell = 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

Степеневі показники визначаються формулами

$$\sigma_1 = \sigma_{N+1} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_\ell = \frac{|\alpha_{\ell, \ell-1}|}{\pi + |\alpha_{\ell, \ell-1}|}, \quad 0 \leq |\alpha_{\ell, \ell-1}| \leq \pi, \quad \ell = 2, \dots, N.$$

Якщо дефектом є включення, то розв'язки системи (22) подаємо аналогічно:

$$\varphi_{2\ell}(\tau) = (1 - \tau)^{-\sigma_{\ell+1}} (1 + \tau)^{-\sigma_\ell} \psi_{1\ell}(\tau), \quad \ell = 1, 2, \dots, N, \quad (25)$$

з такими степеневими показниками:

$$\sigma_1 = \sigma_{N+1} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_\ell = \frac{\pi - |\alpha_{\ell, \ell-1}|}{2\pi + |\alpha_{\ell, \ell-1}|}, \quad 0 \leq |\alpha_{\ell, \ell-1}| \leq \pi, \quad \ell = 2, \dots, N.$$

Як і в попередньому випадку, здійснюємо наближення функцій  $\psi_{1\ell}(\tau)$  інтерполяційними многочленами, коли за точки інтерполяції вибираємо корені  $\tau_{1m}$  многочленів Якобі  $P_n^{-\sigma_{\ell+1}, -\sigma_\ell}(\tau)$ . Функції  $\varphi_{2\ell}(\tau)$  попередньо подаємо у вигляді

$$\varphi_{2\ell}(\tau) = (1 - \tau)^{1-\sigma_{\ell+1}} (1 + \tau)^{1-\sigma_\ell} g_\ell(\tau) + (1 - \tau)^{1-\sigma_{\ell+1}} (1 + \tau)^{-\sigma_\ell} \psi_\ell(-1)/2 +$$

$$+ (1 - \tau)^{-\sigma_{\ell+1}} (1 + \tau)^{1-\sigma_\ell} \psi_\ell(1)/2.$$

Після цього вже здійснюється наближення функцій  $g_\ell(\tau)$  інтерполяційними многочленами, де за точки інтерполяції вибрано корені  $\tau_{2m}$  многочленів Якобі  $P_n^{1-\sigma_{\ell+1}, 1-\sigma_\ell}(\tau)$ . Внаслідок такого наближення розв'язків систем (19) і (22) для обчислення отриманих сингулярних інтегралів використовуємо спеціальні квадратурні формули, наведені у [17, 20]. Для визначення невідомих функцій  $\psi_{1\ell}(\tau)$ ,  $g_\ell(\tau)$  у вузлах інтерполяції застосовуємо метод механічних квадратур з коренями функцій Якобі  $J_n^{-\sigma_{\ell+1}, -\sigma_\ell}(\zeta)$  або  $J_n^{1-\sigma_{\ell+1}, 1-\sigma_\ell}(\zeta)$

як точок колокації. У випадку тріщини з (15) і (19) отримуємо систему  $N(n+1)$  рівнянь відносно  $\psi_{1\ell}(\tau_{1m}), \phi_{1\ell}(-1), \ell = 1, 2, \dots, N, m = 1, 2, \dots, n$ . При наявності дефекту у вигляді включення з (22), (23) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $c_0, g_\ell(\tau_{2m}), \psi_\ell(\pm 1), \ell = 1, 2, \dots, N, m = 1, 2, \dots, n$ .

Досліджено дефект, перерізом якого є триланкова ламана, показана на рис. 5.

Вважаємо, що усі ланки мають однакову довжину  $d_1 = d_2 = d_3 = d$ , а фронт хвилі паралельний до осі  $Ox$ . Розраховували безрозмірні значення КІН  $k = K/G\sqrt{d}$  біля лівого і правого кінців дефекту, які з огляду на симетрію співпадають.

Результати дослідження практичної збіжності запропонованого числового методу розв'язання систем інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями наведено на рис. 6, рис. 7. Побудовано графіки залежності абсолютної величини безрозмірного КІН  $k$  від безрозмірного хвильового числа  $x_0 = x_2 d$  при заданому куті  $\beta = 45^\circ$ . Криві відповідають значенням кількості вузлів інтерполяції  $n = 5, 10, 15, 20, 25$ , що використовувалися при наближенні функцій  $\psi_{1\ell}(\tau), g_\ell(\tau)$ . На рис. 6 наведено графіки для випадку тріщини, а на рис. 7 – для тонкого жорсткого включення відносної товщини  $\varepsilon = 0.05$ .

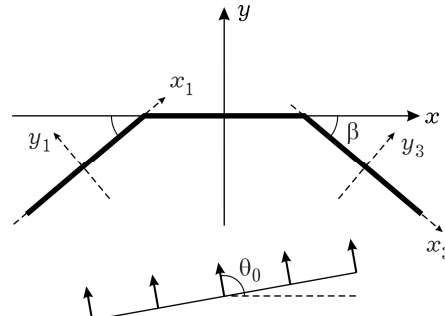


Рис. 5

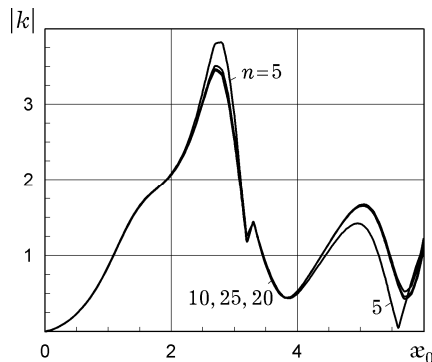


Рис. 6

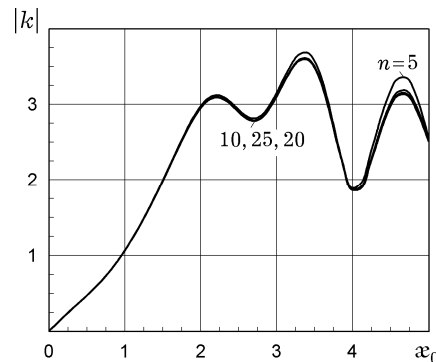


Рис. 7

Можемо бачити, що для отримання значень КІН з похибкою, що не перевищує 0.1%, вистачає до 20 вузлів інтерполяції в усьому розглянутому частотному діапазоні. Для хвиль з малою частотою ( $x_0 \leq 2$ ) достатньо і 5 вузлів.

**3. Крутильні коливання пружного циліндра, зчепленого з пружним півпростором.** Нехай пружний циліндр  $0 \leq r < r_0, 0 \leq z < a, 0 \leq \varphi < 2\pi$  зчеплений з пружним ізотропним півпростором  $0 \leq r < +\infty, -\infty < z \leq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$  (рис. 8).

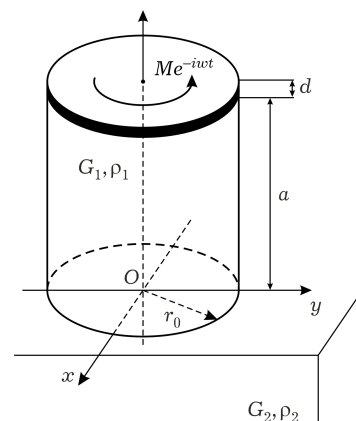


Рис. 8



З верхньою основою цього циліндра зчеплена тверда накладка того самого радіуса, що й циліндр, товщини  $d$ . На накладку діє гармонічно залежний від часу крутний момент  $Me^{-i\omega t}$ . Як і раніше, множник  $e^{-i\omega t}$  далі всюди відкидаємо. За таких умов у циліндрі і півпросторі здійснюється осесиметрична деформація кручення, і відмінними від нуля є тільки кутові переміщення  $w_j(r, z)$ ,  $j = 1, 2$ , які задовольняють рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_j + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w_j - \frac{1}{r^2} w_j^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} w_j + \alpha_{2j}^2 w_j = 0, \quad \alpha_{2j}^2 = \rho_j^2 \frac{\omega^2}{G_j^2}, \quad j = 1, 2. \quad (26)$$

Тут  $w_1(r, z)$  – переміщення у циліндрі,  $w_2(r, z)$  – переміщення у півпросторі;  $\rho_1$ ,  $G_1$  – густина і модуль зсуву циліндра;  $\rho_2$ ,  $G_2$  – густина і модуль зсуву півпростору. В області контакту циліндра і півпростору виконуються рівності

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi z}^{(1)}(r, +0) &= G_1 \frac{\partial w_1}{\partial z}(r, +0) = q(r), \\ \tau_{\varphi z}^{(2)}(r, -0) &= G_2 \frac{\partial w_2}{\partial z}(r, -0) = q(r), \quad 0 \leq r < r_0, \end{aligned} \quad (27)$$

$q(r)$  – невідомі дотичні напруження в області контакту. Також повинні співпадати переміщення:

$$w_1(r, +0) = w_2(r, -0), \quad 0 \leq r < r_0. \quad (28)$$

На поверхні півпростору поза зоною контакту напруження відсутні:

$$\tau_{z\varphi}^{(2)}(r, -0) = 0, \quad r > r_0. \quad (29)$$

Із умов зчеплення з накладкою на верхній основі циліндра отримуємо рівність

$$w_1(r, a) = \theta_0 r, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (30)$$

де  $\theta_0$  – невідомий кут повороту накладки, який визначається з рівняння коливань накладки:

$$-\omega^2 j_0 \theta_0 = M - M_R. \quad (31)$$

Тут через  $j_0$  позначено момент інерції накладки відносно осі  $Oz$ , а через  $M_R$  – момент сил реакції, які визначаються формулами

$$j_0 = \frac{\pi}{2} r_0^4 d \rho_0, \quad M_R = 2\pi \int_0^{r_0} r^2 \tau_{\varphi z}^{(1)}(r, a) dr,$$

де  $\rho_0$  – густина матеріалу накладки,  $\tau_{\varphi z}^{(1)}(r, a)$  – дотичні напруження під накладкою. Бічна поверхня циліндра є ненавантаженою:

$$\tau_{r\varphi}^{(1)}(r_0, z) = G_1 r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w_1}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad 0 < z < a. \quad (32)$$

Розв'язування крайових задач для рівняння (26) з умовами (27), (28), (30), (32) на поверхнях циліндра і півпростору, як і в [15], здійснюємо методом інтегральних перетворень. В результаті отримуємо вирази для переміщень  $w_j(r, z)$ ,  $j = 1, 2$ , через інтеграли, які містять невідомі дотичні напруження  $q(r)$  у зоні контакту [14]. Задовольняючи умови (28), для визначення напружень  $q(r)$  отримуємо інтегральне рівняння. Аналогічно, як і в [14], з цього рівняння отримуємо інтегральне рівняння другого роду [15] відносно нової невідомої функції  $\varphi(x)$ , пов'язаної з контактними напруженнями на-

ступними формулами:

$$\varphi(x) = \int_x^{r_0} \eta \frac{q(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} d\eta, \quad q(\eta) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\eta}^{r_0} \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{x^2 - \eta^2}}. \quad (33)$$

В результаті перетворень, детально викладених у [15], і вилучення сингулярної складової, це рівняння набуває такого вигляду:

$$(1+c)g(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g(\tau) \left[ \frac{1}{2-\tau-\zeta} + \frac{1}{2+\tau+\zeta} - \frac{15}{4} \ln(2+\tau+\zeta) - \frac{15}{4} \ln(2+\tau+\zeta) + R(\tau, \zeta) \right] d\tau = \frac{2\theta_0 \zeta}{\cos(\gamma\kappa_0)}, \quad -1 < \zeta < 1. \quad (34)$$

При виведенні рівняння (34) використано такі позначення:

$$\varphi(r_0\tau) = r_0 G_1 g(\tau), \quad \gamma = \frac{a}{r_0}, \quad x_0 = x_{21} r_0, \quad c = \frac{G_1}{G_2}.$$

Можемо бачити, що сингулярна складова рівняння (34) містить нерухому особливість при  $\tau = \zeta = 1$  і  $\tau = \zeta = -1$ . Тому для побудови числового методу розв'язування рівняння (34) необхідно з'ясувати особливість невідомої функції  $g(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \pm 1$ . Якщо припустити степеневу особливість, яка забезпечить інтегровність контактних напружень  $g(\tau)$ , то розв'язок цього рівняння слід розшукувати у вигляді

$$g(\tau) = (1-\tau^2)^\sigma \psi(\tau), \quad \sigma = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{c+1}, \quad (35)$$

$\psi(\tau)$  – функція, яка задовольняє умови Гельдера на  $[-1, 1]$ .

Квадратурні формули для обчислення сингулярних інтегралів ґрунтуються на наближенні функції  $\psi(\tau)$  інтерполяційними многочленами, де за точки інтерполяції вибрано корені  $\tau_m$  многочленів Якобі  $P_n^{\sigma\sigma}(\tau)$ . Далі в рівнянні (34) до сингулярних інтегралів застосовуємо спеціальні квадратурні формули, а до регулярних – квадратурні формули Гаусса – Якобі, і як точки колокації вибираємо  $\zeta_k = \tau_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Результатом цих дій є система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень  $\psi_m = \psi(\tau_m)$  невідомої функції в точках інтерполяції. До цієї системи потрібно додати рівняння (31) для визначення амплітуди кута повороту накладки  $\theta_0$ .

Як приклад реалізації запропонованого числового методу розв'язування рівняння (34) вибрано циліндр з алюмінію ( $G_1 = 2.6 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho_1 = 2.7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>) радіуса  $r_0 = 0.2$  м. Матеріалом півпростору є чавун ( $G_2 = 4.4 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho_2 = 7.2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>). Накладку вибрали сталеву ( $\rho_0 = 7.8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>) товщини  $d = 0.02$  м. До цієї накладки прикладено крутий момент амплітуди  $M = 1000$  Н·м. Розраховували безрозмірні напруження  $s(\zeta) = q(r_0\zeta)/G_1$  в області контакту циліндра і півпростору. Обчислення виконано при значенні безрозмірного хвильового числа  $x_0 = x_2 r_0 = \omega r_0 \sqrt{\rho_1/G_1} = 4$ . Результати розрахунків наведено у вигляді графіків на рис. 9. Криві обчислено для зна-

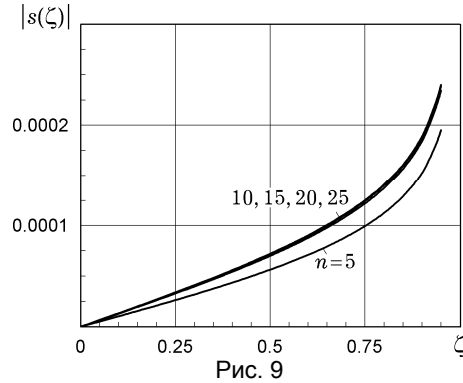


Рис. 9

чень кількості точок інтерполяції  $n = 5, 10, 15, 20, 25$  при наближенні функції  $\psi(\tau)$ .

Встановлено, що для отримання результатів з відносно похибкою, меншою, ніж 0.1%, достатньо використати 10÷15 точок інтерполяції. Така практична збіжність і стійкість числових зберігається для всього розглянутого частотного діапазону  $0 \leq \alpha_0 \leq 10$ .

**Висновки.** Існує широкий клас задач механіки деформівного твердого тіла, зокрема динамічних, які зводяться до сингулярних інтегральних і інтегро-диференціальних рівнянь з нерухожими особливостями. Це насамперед задачі дослідження концентрації напружень в околі тонких дефектів і задачі механіки контактної взаємодії. Типові приклади таких задач розглянуто в цій статті. Встановлено, що при числовому розв'язанні отриманих сингулярних інтегральних рівнянь з нерухожою особливістю ефективним є метод, у якому враховуються особливості розв'язку і який базується на використанні спеціальних квадратурних формул для обчислення сингулярних інтегралів. Це забезпечує їх швидку практичну збіжність і стійкість отриманих числових результатів. Розроблені в статтях [11, 12, 14, 17, 20] такі методи можуть бути поширені і на інші задачі, які приводять до аналогічних інтегральних рівнянь.

1. Дудучава Р. В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбилис. мат. ин-та им. А. М. Размадзе АН ГрузССР. – 1979. – 60. – 135 с.
2. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
3. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Интегральные уравнения задачи термоупругости для плоскости с криволинейным отверстием и трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – № 11. – С. 998–1001.
4. Кит Г. С., Мыхаськів В. В., Хай О. М. Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом граничных элементов // Прикл. математика и механика. – 2002. – 66, № 5. – С. 855–863.
5. Кит Г. С., Побережный О. В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1992. – 216 с.
6. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач теории упругости для тел с трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 12. – С. 1108–1112.
7. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 8. – С. 704–707.
8. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 284 с.
9. Кит Г. С., Кушнір Р. М., Мыхаськів В. В., Николишин М. М. Методи визначення статичних і динамічних напружень у тілах з підповерхневими тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – 47, № 2. – С. 56–66.
10. Курпразе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи теории упругости и термоупругости / Под общ. ред. В. Д. Курпразе. – Москва: Наука, 1976. – 664 с.
11. Попов В. Г. Гармонические колебания полупространства с трещиной, выходящей на поверхность в условиях антиплоской деформации // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 2. – С. 96–105.  
The same: Попов V. G. Harmonic vibrations of a half-space with a surface-breaking crack under conditions of out-of-plane deformation // Mech. Solids. – 2013. – 48, No. 2. – P. 194–202. – <https://doi.org/10.3103/S0025654413020118>.
12. Попов В. Г. Гармонічні коливання в умовах антиплоскої деформації півпростору з тонким жорстким смуговим включенням, що перетинає межу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 2. – С. 124–135.

- Те саме: *Popov V. G.* Harmonic vibrations under the conditions of antiplane deformation of a half space containing a thin rigid striplike inclusion crossing the boundary // *J. Math. Sci.* – 2014. – **203**, No. 2. – P. 149–164.
13. *Попов В. Г.* Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде // *Гидроаэромеханика и теория упругости: Численные и аналитические методы решения задач гидроаэродинамики и теории упругости.* – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1986. – С. 121–127.
  14. *Попов В. Г.* Крутильні коливання пружного циліндра, зчепленого із пружним півпростором // *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2015. – Спецвипуск. – С. 207–212.
  15. *Попов В. Г.* Напряжённое состояние конечного упругого цилиндра с краевой трещиной при крутильных колебаниях // *Прикл. механика.* – 2012. – **48**, № 4. – С. 86–93.
  16. *Попов В. Г.* Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение // *Динам. системы.* – 1993. – Вып. 12. – С. 35–41.
  17. *Попов В. Г., Литвин О. В.* Напружений стан пружного тіла з жорстким включенням у вигляді ламаної при гармонічному хвильовому навантаженні // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 3. – С. 38–47.
  18. *Balaš J., Sládek J., Sládek V.* Stress analysis by boundary element methods. – Amsterdam: Elsevier, 1989. – xii+686 p.
  19. *Brebbia C. A., Walker S.* Boundary element techniques in engineering. – London: Newnes-Butterworths, 1989. – 210 p.
  20. *Popov V.* Interaction of a harmonic longitudinal shear wave with a brake line shaped crack // *International Journal of Mathematical Physics.* – 2018. – **1**, No. 2. – (In publishing).
  21. *Zhang Ch., Gross D.* On wave propagation in elastic solid with cracks. – Southampton: Comput. Mech. Publ., 1998. – 248 p. – 272 p. – (Ser.: Adv. Fracture Mech., Vol. 2.)

#### **ДВУМЕРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, СВОДЯЩИЕСЯ К СИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С НЕПОДВИЖНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ**

*Рассмотрены двумерные динамические задачи теории упругости, приводящиеся к сингулярным интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям с неподвижными особенностями. Это задачи об определении напряженного состояния в телах с краевыми дефектами, с дефектами с сечением в виде ломанной, а также некоторые контактные задачи. Для решения полученных уравнений предложен численный метод, который учитывает действительную асимптотику решений и основывается на использовании специальных квадратурных формул для сингулярных интегралов.*

**Ключевые слова:** трещина, тонкое включение, контактное взаимодействие, сингулярное интегральное уравнение.

#### **TWO-DIMENSIONAL DYNAMIC PROBLEMS OF THE ELASTICITY THEORY REDUCING TO SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS WITH NON-MOVABLE SINGULARITIES**

*Two-dimensional dynamic problems of the theory of elasticity, which are reduced to singular integral or integro-differential equations with non-movable singularities are considered. There are the problems on determining the stress state in bodies with edge defects, with defects with a cross-section in the form of a broken line, as well as some contact problems. The numerical method that takes into account the real asymptotics of the solutions and is based on the use of special quadrature formulas for singular integrals is proposed to solve the obtained equations.*

**Key words:** crack, thin inclusion, contact interaction, singular integral equation.

Нац. ун-т «Одеська морська акад.», Одеса

Одержано  
20.12.19