УДК 517.956

І. М. Ісарюк[✉], І. Д. Пукальський

ВНУТРІШНЄ І СТАРТОВЕ КЕРУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКАМИ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМИ

Для параболічного рівняння другого порядку з виродженнями побудовано розв'язок задачі оптимального керування системами, що описуються першою крайовою задачею з внутрішнім і стартовим керуваннями. Коефіцієнти параболічного рівняння мають степеневі особливості довільного порядку за часовою і просторовими змінними на деякій множині точок.

Ключові слова: *параболічна крайова задача, степеневі особливості, гельдерові простори, функція Ґріна, оптимальний розв'язок.*

У сучасних прикладних дослідженнях рівнянь із частинними похідними все частіше зустрічаються задачі з некласичними умовами у рівняннях, крайових операторах і з різними особливостями та виродженнями. Особливий інтерес викликають такі задачі для рівнянь і систем рівнянь параболічного типу, які описують процеси дифузії рідин і газів, тиск, поширення тепла та інші процеси у тілах складної конфігурації.

Залежно від структури середовища процеси дифузії, теплопровідності, термопружності моделюються диференціальними рівняннями параболічного типу. При цьому рівняння і крайові умови мають некласичні обмеження, різні виродження і випадкові збурення та імпульсні впливи.

Встановлення коректної розв'язності крайових задач, зображення розв'язку та вивчення властивостей розв'язків таких задач є чи не найпоширенішими питаннями математичної фізики, які цікавлять науковців.

Теорія крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з виродженнями широко представлена у працях О. О. Ладиженської, В. О. Солоннікова, Н. М. Уральцевої [4], Є. М. Ландіса [5], A. Friedman [11], S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei [12], H. Lange, H. Teismann [13], М. І. Матійчука [6], Б. Й. Пташника, В. С. Ільківа, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук [7], І. Д. Пукальського [8, 9] та інших.

У цій статті проводиться дослідження параболічної крайової задачі для лінійного диференціального рівняння зі степеневими особливостями на координатних площинах довільного порядку. Одержаний результат використано для дослідження задач оптимального керування із внутрішнім і стартовим керуваннями. За критерій якості вибрано суму об'ємного та поверхневого інтегралів [9]. Ця стаття є продовженням досліджень інших крайових задач для параболічного рівняння з виродженнями [1–3, 10].

1. Постановка задачі і основні обмеження. Розглянемо в області $Q = [0,T) \times D$ задачу знаходження функцій (u,p,q), на яких функціонал

$$I(p,q) = \int_0^T dt \int_D F_1\big(t,x;u(t,x;p(t,x),q(x)),p(t,x)\big)\,dx + \\ + \int_D F_2\big(x;u(T,x;p(T,x),q(x)),q(x)\big)\,dx\,, \qquad (1)$$

досягає мінімуму в класі функцій $(p,q) \in V = \{p \in C^{\alpha}(Q) : p_1(t,x) \le p \le p_2(t,x);$ $q(x) \in C^{2+\alpha}(D),\ q_1(x) \le q(x) \le q_2(x)\}$, із яких функція $u(t,x;p(t,x),q(x))$ є розв'язком крайової задачі

[✉]intar2531@gmail.com

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\right]u =$$

$$= f(t,x;p(t,x)), \tag{2}$$

$$u(0,x;p(0,x),q(x)) = \varphi(x;q(x)), \tag{3}$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[u(t,x;p(t,x),q(t)) - \psi(t,x)\right] = 0. \tag{4}$$

Порядок особливості диференціального виразу L у довільній точці $P(t,x)\in Q$ характеризують функції $s_1(\beta_i^{(1)},t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)},x_i)$:

$$s_1(\beta_i^{(1)},t) = \begin{cases} |t-t_0|^{\beta_i^{(1)}}, & |t-t_0| \le 1, \\ 1, & |t-t_0| \ge 1, \end{cases} \qquad s_2(\beta_i^{(2)}x_i,) = \begin{cases} x_i^{\beta_i^{(2)}}, & 0 \le x_i \le 1, \\ 1, & x_i \ge 1, \end{cases}$$

де $\beta_i = (\beta_i^{(1)},\beta_i^{(2)})$, $i \in \{1,\dots,n\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)},\dots,\beta_n^{(\nu)})$, $\beta_i^{(\nu)}$ – дійсні числа, $\beta_i^{(\nu)} \in \in (-\infty,\infty)$, $\nu \in \{1,2\}$.

Позначимо через ℓ, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, q дійсні числа, $\ell > 0$, $[\ell]$ – ціла частина числа ℓ, $\{\ell\} = \ell - [\ell]$, $\gamma^{(1)} \ge 0$, $\gamma^{(2)} \ge 0$, $q \ge 0$; через $(x_1^{(1)},\dots,x_\nu^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ позначимо координати точки $x^{(1)}$ в області $\bar{D} = D \cup \partial D$, де ∂D – межа області D, а через $(x_1^{(1)},\dots,x_{\nu-1}^{(1)},x_\nu^{(2)},x_{\nu+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ – координати точки $x^{(2)}$ в області $\bar{D}$, $\nu \in \{1,2\}$; $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(2)})$ – довільні точки області $\bar{Q}$, $i \in \{1,\dots,n\}$.

Означимо простори функцій, у яких вивчається задача (2)–(4).

$C^\ell(\gamma;\beta;q;Q)$ – множина функцій $u(t,x)$ з простору $L_1(Q)$, $(t,x)\in Q$, які мають частинні похідні при $t \ne t_0$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$ (тут $2j+|k| \le [\ell]$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\dots\partial_{x_n}^{k_n}$) і для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell = \|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{[\ell]} + \langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_\ell,$$

де, наприклад,

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_0 = \sup_{\bar{Q}}|u| \equiv \|u;Q\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{[\ell]} = \sum_{2j+|k|\le[\ell]} \sup_{P\in Q}\Big[S(q+(2j+|k|)\gamma,P)\prod_{i=1}^{n} s_1(-k_i\beta_i^{(1)},t) \times$$

$$\times s_2(-k_i\beta_i^{(2)},x_i)\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P)\right|\Big],$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_\ell = \sum_{2j+|k|=[\ell]}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(P_1,H_i)\subset\bar{Q}}\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right|^{-\{\ell\}} \times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j\partial_x^k u(H_i)\right| S((\ell+q)\gamma;\tilde{P}) s_1(-\{\ell\}\beta_i^{(1)},t^{(1)}) \times$$

$$\times s_2(-\{\ell\}\beta_i^{(2)},\tilde{x}_i)\prod_{m=1}^{n} s_2(-k_m\beta_m^{(2)},\tilde{x}_m) s_1(-k_m\beta_m^{(1)},t) +$$

$$+\sum_{2j+|k|=[\ell]}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(P_2,H_i)\subset\bar{Q}}\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\{\ell\}/2}\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_2) - \partial_t^j\partial_x^k u(H_i)\right| \times$$

$$\times S((\ell+q)\gamma;\tilde{P})\prod_{m=1}^{n} s_2(-k_m\beta_m^{(2)},x_m^{(2)}) s_1(-k_m\beta_m^{(1)},\tilde{t}).$$

Тут позначено

$$S(\gamma;P)=s_1(\gamma^{(1)},t)\min_i\left(s_2(\gamma^{(2)},x_i)\right),$$

$$S(q\gamma;\tilde{P})=\min_i\{S(q\gamma;P_1),S(q\gamma;P_2),S(q\gamma;H_i)\},$$

$$s_1(q,\tilde{t})=\min\{s_1(q,t^{(1)}),\ s_1(q,t^{(2)})\},$$

$$s_2(q,\tilde{x}_i)=\min_i\{s_2(q,x_i^{(1)}),s_2(q,x_i^{(2)})\}.$$

Покладемо $\mu_j^{(\nu)}=\mu_{j_1}^{(\nu)}+\mu_{j_2}^{(\nu)}+\ldots+\mu_{j_n}^{(\nu)}$, $\mu_{j_i}^{(\nu)}\ge 0$, $\nu\in\{1,2\}$, $\mu_j=(\mu_j^{(1)},\mu_j^{(2)})$, $j\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Дослідження задачі (2)–(4) будемо проводити за таких умов.

1°. Для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(t,x)\,s_1(\beta_i^{(1)},t)\,s_1(\beta_j^{(1)},t)\,s_2(\beta_i^{(2)},x_i)\,s_2(\beta_j^{(2)},x_j)\,\xi_i\xi_j\le\pi_2|\xi|^2,$$

де π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі,

$$s_1(\beta_i^{(1)},t)\,s_1(\beta_j^{(1)},t)\,s_2(\beta_i^{(2)},x_i)\,s_2(\beta_j^{(2)},x_j)\,A_{ij}\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q),$$

$$s_1(\mu_i^{(1)},t)\,s_2(\mu_i^{(2)},x_i)\,A_i\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q),$$

$$s_1(\mu_0^{(1)},t)\,\rho(\mu_0^{(2)},x)\,A_0\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q),\qquad A_0\le K<\infty,\qquad K=\mathrm{const}.$$

2°. $f\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi\in C^{2+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D)$, $\tilde{\gamma}=(0,\gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta}=(0,\beta^{(2)})$, $\partial D\in C^{2+\alpha}$,

$\psi\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $\gamma^{(\nu)}=\max\left\{\max\limits_i(1+\beta_i^{(\nu)}),\max\limits_i(\mu_i^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}),\dfrac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\right\}$,

$\nu\in\{1,2\}$, $\psi(0,x)=\varphi(x)$.

3°. $p_\nu(t,x)\in C^{\alpha}(Q)$, $\qquad q_\nu(x)\in C^{2+\alpha}(D)$, $\qquad \nu\in\{1,2\}$,

функції $F_1(t,x;u(t,x;p;q),p)$, $F_2(x;u(T,x;p;q),q)$ як складені функції змінних (t,x) та x належать відповідно до просторів $C^{\alpha}(Q)$, $C^{2+\alpha}(D)$. Крім того, функції $f(t,x;p(t,x))$, $F_1(t,x;u(t,x;p;q),p)$, $F_2(x;u(T,x;p;q),q)$, $\varphi(x,q(x))$ мають гельдерові похідні другого порядку за аргументами u, p, q і є неперервними як складені функції змінних (t,x) та x.

Справджується

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **1°**, **2°** в області* $Q=[0;T)\times D$, D *– обмежена область множини* $\mathbb{R}_+^n$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2)–(4) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і є правильною оцінка*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c\left(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha}+\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}+\right.$$
$$\left.+\|\psi;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\right).\tag{5}$$

2. Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Для дослідження задачі (2)–(4) встановимо спочатку коректну розв'язність послідовності допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничним значенням якої буде розв'язок задачі (2)–(4).

Нехай $Q_m=Q\cap\{(t,x)\in Q: s_1(1,t)\ge m_1^{-1},\ s_2(1,x_i)\ge m_2^{-1}, m=(m_1,m_2), m_1>$

$> 1, m_2 > 1\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, – послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до $Q^{(0)}$.

Розглянемо в області Q задачу знаходження функції $u_m(t,x)$, яка задовольняє рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) =$$
$$= \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - a_0(t,x)\right] u_m(t,x) =$$
$$= f_m(t,x,p)\,, \tag{6}$$

початкову умову

$$u_m(0,x) = \varphi_m(x,q) \tag{7}$$

і крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D} \left[u_m(t,x) - \psi_m(t,x)\right] = 0\,. \tag{8}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0 і функції f_m, φ_m, ψ_{1m} при $(t,x) \in Q_m$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0 і f, φ, ψ відповідно. При $(t,x) \in Q \setminus Q_m$ коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, функції f_m, φ_m, ψ_m є неперервними продовженнями коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0 і функцій f, φ, ψ із області Q_m в область $Q \setminus Q_m$ [9].

Встановимо оцінку розв'язків допоміжних крайових задач. У задачі (6)–(8) виконаємо перетворення: перейдемо від функції $u_m(t,x)$ до нової функції $v_m(t,x)$, зв'язаної з нею співвідношенням

$$u_m(t,x) = v_m(t,x)e^{-\lambda t}\,, \tag{9}$$

де λ задовольняє нерівність $\lambda < -A_0(t,x)$.

Тоді функція $v_m(t,x)$ є розв'язком крайової задачі

$$((L_1 - \lambda)v_m)(t,x) = f_m(t,x,p)e^{\lambda t}\,, \tag{10}$$

$$v_m(0,x) = \varphi_m(x,q), \qquad \lim_{x \to z \in \partial D} [v_m(t,x) - \psi_m(t,x)e^{\lambda t}] = 0\,. \tag{11}$$

Сформулюємо принцип максимуму для задачі (10), (11).

Теорема 2. *Нехай* $v_m(t,x)$ – *класичний розв'язок задачі* (10), (11) *в області* Q *і виконуються умови* ***1°, 2°***. *Тоді для* $v_m(t,x)$ *справджується оцінка*

$$|v_m| \le \max\left\{ \left\| f_m e^{\lambda t}(-\lambda - a_0)^{-1}; Q \right\|_0, \left\|\varphi_m; D\right\|_0, \left\|\psi_m e^{\lambda t}; Q\right\|_0 \right\}. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я цієї теореми проводиться за схемою доведення теореми 2.1 із [4, с. 22], тобто для функції $v_m(t,x)$ аналізуються всі можливі розміщення її додатного максимуму і від'ємного мінімуму. ♦

Теорема 3. *Нехай для задачі* (10), (11) *виконуються умови* ***1°, 2°***. *Тоді для розв'язку задачі* (10), (11) *є правильною оцінка*

$$\left\|v_m; \gamma; \beta; 0; Q\right\|_{2+\alpha} \le C\Big(\left\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q\right\|_{\alpha} + \left\|\varphi; \tilde\gamma; \tilde\beta; 0; D\right\|_{2+\alpha} +$$
$$+ \left\|\psi; \gamma; \beta; 0; Q\right\|_{2+\alpha}\Big). \tag{13}$$

Д о в е д е н н я. У задачі (10), (11) виконаємо заміну

$$v_m(t,x) = \omega_m(t,x)e^{-\lambda t} + \psi_m(t,x).$$

Тоді $\omega_m(t,x)$ в області Q є розв'язком задачі

$$((L_1-\lambda)\omega_m)(t,x) = f_m(t,x,p)e^{\lambda t} - ((L-\lambda)\psi_m)(t,x) \equiv F_m(t,x),$$

$$\omega_m(0,x) = \varphi_m(x,q) - \psi_m(0,x) \equiv \Phi_m(x),$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\omega_m(t,x) = 0. \qquad (14)$$

Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності [8, 11], маємо

$$\|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le (1+\varepsilon^\alpha)\langle\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|\omega_m;Q\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число, $\varepsilon\in(0,1)$. Тому достатньо оцінити півнорму $\langle\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha}$. З означення півнорми випливає існування в Q точок P_1, P_2 і H_i, для яких є правильною одна з нерівностей

$$\frac{1}{2}\|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le E_p(\omega_m), \qquad p\in\{1,2\}.$$

Позначимо

$$R(\gamma;P) = d_1(\gamma^{(1)},t)\min_i d_2(\gamma^{(2)},x_i),$$

$$d(\beta_i;P) = d_1(\beta_i^{(1)},t)d_2(\beta_i^{(2)},x_i),$$

де

$$d_1(\beta_i^{(1)},t) = \begin{cases}\max\limits_i\left(s_1(\beta_i^{(1)},t), m_1^{-\beta_i^{(1)}}\right), & \beta_i^{(1)}\ge 0,\\ \min\limits_i\left(s_1(\beta_i^{(1)},t), m_1^{-\beta_i^{(1)}}\right), & \beta_i^{(1)}<0,\end{cases}$$

$$d_2(\beta_i^{(2)},x_i) = \begin{cases}\max\limits_i\left(s_2(\beta_i^{(2)},x_i), m_2^{-\beta_i^{(2)}}\right), & \beta_i^{(2)}\ge 0,\\ \min\limits_i\left(s_2(\beta_i^{(2)},x_i), m_2^{-\beta_i^{(2)}}\right), & \beta_i^{(2)}<0.\end{cases}$$

Якщо $|t^{(1)}-t^{(2)}| \ge R(2\gamma;\tilde{P})\frac{\tau}{16} \equiv T_1$, τ – довільне число, $\tau\in(0,1)$, то

$$E_2(\omega_m) \le 2\tau^{-\alpha}\|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2. \qquad (15)$$

Якщо $|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}| \ge n^{-1}R(\gamma;\tilde{P})\,d_1(-\beta_i^{(1)},t^{(2)})\,d_2(-\beta_i^{(2)},\tilde{x}_i)\frac{\tau}{4} \equiv T_2$, то

$$E_1(\omega_m) \le 2\tau^{-\alpha}\|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2. \qquad (16)$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (15) і (16), знаходимо

$$E_p(\omega_m) \le \varepsilon^\alpha\|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|\omega_m;Q\|_0. \qquad (17)$$

Нехай $|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}| \le T_2$ і $|t^{(1)}-t^{(2)}| \le T_1$, а також $R(\gamma;\tilde{P}) \equiv R(\gamma;P_1)$. Припустимо, що $|x^{(1)}-z| \ge 2T_2 n$ або $|x_n^{(1)}-z_n| \ge T_2$, $z\in\partial D$.

Запишемо задачу (14) у вигляді

$$(L_2\omega_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]\omega_m =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left[a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)\right] \partial_{x_i} \partial_{x_j} \omega_m + \sum_{i=1}^{n} a_i(P) \partial_{x_i} \omega_m +$$

$$+ \left(a_0(P) + \lambda\right)\omega_m + F_m(t, x) \equiv F_m^{(1)}(t, x, \omega_m) + F_m(t, x),$$

$$\omega_m(0, x) = \Phi_m(x), \qquad \lim_{x \to z \in \partial D} \omega_m(t, x) = 0. \tag{18}$$

Нехай $V_r^{(1)}$ – область із Q, $V_r^{(1)} = \{(t, x) \in Q : \left|x_i - x_i^{(1)}\right| \le rT_2,\ i = 1, \ldots, n,$ $\left|t - t^{(1)}\right| \le r^2 T_1\}$. В задачі (18) зробимо заміну

$$\omega_m(t, x) = W_m(t, y), \qquad y_i = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_2(\beta_i^{(2)}, x_i^{(1)})\, x_i.$$

В результаті отримаємо задачу

$$\left(L_3 W_m\right)(t, y) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})\, d_2(\beta_i^{(2)}, x_i^{(1)})\, d_2(\beta_j^{(2)}, x_j^{(1)}) \times$$

$$\times a_{ij}(P_1) \partial_{y_i} \partial_{y_j}\Big] W_m = F_m^{(1)}(t, \tilde{y}, W_m) + F_m(t, \tilde{y}),$$

$$W_m(0, y) = \Phi_m(\tilde{y}), \qquad W_m\big|_{\Gamma} = 0,$$

де

$$\tilde{y} = \left(d_1(-\beta_1^{(1)}, t^{(1)})\, d_2(-\beta_1^{(2)}, x_1^{(1)})\, y_1, \ldots, d_1(-\beta_n^{(1)}, t^{(1)})\, d_2(-\beta_n^{(2)}, x_n^{(1)})\, y_n\right).$$

Позначимо

$$y_i^{(1)} = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_2(\beta_i^{(2)}, x_i^{(1)})\, x_i^{(1)},$$

$$H_r^{(1)} = \{(t, y) : \left|y_i - y_i^{(1)}\right| \le rn^{-1}\sqrt{T_1},\ i \in \{1, \ldots, n\},\ \left|t - t^{(1)}\right| \le rT_1\}$$

і виберемо тричі диференційовну функцію $\eta(t, y)$, яка має такі властивості:

$$\eta(t, y) = \begin{cases} 1, & (t, y) \in H_{1/4}^{(1)}, \quad 0 \le \eta(t, y) \le 1, \\ 0, & (t, y) \notin H_{3/4}^{(1)}, \quad \left|\partial_t^j \partial_y^k \eta\right| \le C_{kj} R\left(-(2j + |k|)\gamma; P_1\right). \end{cases}$$

Тоді функція $V_m(t, y) = \eta(t, y) W_m(t, y)$ є розв’язком крайової задачі

$$\left(L_3 V_m\right)(t, y) = \sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})\, d_2(\beta_i^{(2)}, x_i^{(1)})\, d_2(\beta_j^{(2)}, x_j^{(1)}) \times$$

$$\times a_{ij}(P_1)\left[\partial_{y_i} \eta\, \partial_{y_j} W_m + \partial_{y_j} \eta\, \partial_{y_i} W_m\right] +$$

$$+ w_m \Big[\sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})\, d_2(\beta_i^{(2)}, x_i^{(1)}) \times$$

$$\times d_2(\beta_j^{(2)}, x_j^{(1)})\, a_{ij}(P_1)\, \partial_{y_i} \partial_{y_j} \eta - \partial_t \eta\Big] +$$

$$+ \eta(F_m^{(1)} + F_m) \equiv F_m^{(2)}(t, \tilde{y}, \eta, W_m) + \eta F_m(t, \tilde{y}),$$

$$V_m(0, y) = \eta \Phi_m(\tilde{y}), \qquad V_m\big|_{\Gamma} = 0. \tag{19}$$

На підставі теореми 5.2 [4, с. 364] для розв’язку задачі (19) отримаємо нерівність

$$E_3(V_m) \equiv d^{-\alpha}(N_1, N_2)\left|\partial_t^j \partial_y^k V_m(N_1) - \partial_t^j \partial_y^k V_m(N_2)\right| \le$$

$$\le C\left(\left\| F_m^{(2)} + \eta F_m \right\|_{C^{\alpha}(H_{3/4}^{(1)})} + \left\| \eta \Phi_m \right\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}^{(1)})} \right), \qquad (20)$$

де $(N_1, N_2) \subset H_{1/4}^{(1)}$, $d(N_1, N_2) -$ параболічна відстань між точками N_1, N_2, $2j + |k| = 2$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t, y)$, знаходимо

$$\left\| F_m^{(2)} + \eta F_m \right\|_{C^{\alpha}(H_{3/4}^{(1)})} \le cR(-(2+\alpha)\gamma; P_1)\left(\left\| W_m; \gamma; 0; 0; H_{3/4}^{(1)} \right\|_2 + \right.$$

$$\left. + \left\| W_m; H_{3/4}^{(1)} \right\|_0 + \left\| F_m^{(1)}; \gamma; 0; 2\gamma; H_{3/4}^{(1)} \right\|_{\alpha} + \left\| F_m; \gamma; 0; 2\gamma; H_{3/4}^{(1)} \right\|_{\alpha} \right),$$

$$\left\| \eta \Phi_m \right\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}^{(1)})} \le R(-(2+\alpha)\gamma; P_1)\left(\lambda_0 \left\| W_m; \gamma; 0; 0; H_{3/4}^{(1)} \right\|_{2+\alpha} + \right.$$

$$\left. + c\left\| W_m; H_{3/4}^{(1)} \right\|_0 + c_1 \left\| \Phi_m; \gamma; 0; 0; H_{3/4}^{(1)} \right\|_{2+\alpha} \right). \qquad (21)$$

Підставляючи (21) у (20) і повертаючись до змінних (t, x), отримаємо

$$E_p(\omega_m) \le c_1\left(\left\| F_m^{(1)}; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)} \right\|_{\alpha} + \left\| \Phi_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}^{(1)} \right\|_{2+\alpha} + \right.$$

$$\left. + \left\| F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)} \right\|_{\alpha} + \left\| \omega_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}^{(1)} \right\|_2 + \left\| \omega_m; V_{3/4}^{(1)} \right\|_0 \right) +$$

$$+ \lambda_0 \left\| \omega_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}^{(1)} \right\|_{2+\alpha}.$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності і оцінки норм кожного доданка виразів $F_m^{(1)}$, F_m, Φ_m, отримаємо

$$E_p(\omega_m) \le (\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha}(n+2) + r^2 n^2)\left\| \omega_m; \gamma; \beta; 0; H_{3/4}^{(1)} \right\|_{2+\alpha} +$$

$$+ c_2 \left\| \omega_m; H_{3/4}^{(1)} \right\|_0 + c_3\left(\left\| f_m; \gamma; \beta; \mu_0; Q \right\|_{\alpha} + \right.$$

$$\left. + \left\| \varphi_m; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; D \right\|_{2+\alpha} + \left\| \psi_{1m}; \gamma; \beta; 0; Q \right\|_{2+\alpha} \right).$$

Розглянемо випадок, коли $\left|x^{(1)} - z\right| \le 2T_2 n$ і $\left|x_n^{(1)} - z_n\right| \le T_2$, $z \in \partial D$. Нехай $K(P)$ − куля з радіусом R_0, $R_0 \ge 4(T_2 n + T_1)$, з центром у точці $P \in \Gamma$ і яка містить точки P_1, P_2, H_i. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити область $\partial D \cap K(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi_3(\xi)$ [11, с. 126]. В результаті такого перетворення область $D \cap K(P)$ переходить в область Π, для точок якої $\xi_n \ge 0$. Нехай $\omega_m(t, x)$, P_1, P_2, H_i при такому перетворенні переходять відповідно в $\omega_m^{(1)}(t, \xi)$, M_1, M_2, $N_i^{(1)}$.

Позначимо коефіцієнти диференціального виразу $(L_1 - \lambda)$ в області Π через $p_{ij}(\tau, \xi)$, $p_i(\tau, \xi)$, $p_0(\tau, \xi)$, а коефіцієнти нелокальної умови − через $q_k^{(1)}(\xi)$. Тоді $\omega_m^{(1)}(t, \xi)$ буде розв’язком задачі

$$(L_4\omega_m^{(1)})(t,\xi) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(M_1)\,\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\right]\omega_m^{(1)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left[p_{ij}(t,\xi) - p_{ij}(M_1)\right]\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\omega_m^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t,\xi)\partial_{\xi_i}\omega_m^{(1)} +$$

$$+ \left(p_0(t,\xi) + \lambda\right)\omega_m^{(1)} + F_m(t,\psi_1(\xi)) \equiv$$

$$\equiv F_m^{(2)}(t,\xi,\omega_m^{(1)}) + F_m(t,\psi_3(\xi)),$$

$$\omega_m^{(1)}(0,\xi) = \Phi_m(\psi_1(\xi)) = \Phi_m^{(1)}(\xi,\omega_m^{(1)}),$$

$$\omega_m^{(1)}\Big|_{\xi_n=0} = 0.$$

На основі теореми 6.1 [4, с. 368] отримаємо нерівність

$$E_\ell(\omega_m^{(1)}) \le \left(\lambda_0 + \varepsilon^\alpha(n+2) + r^2n^2\right)\left\|\omega_m^{(1)};\gamma;\beta;0;\Pi\right\|_{2+\alpha} +$$

$$+ c_4\left\|\omega_m^{(1)};\Pi\right\|_0 + c_5\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q\right\|_\alpha +\right.$$

$$\left. + \left\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} + \left\|\psi_{1m};\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha}\right).$$

Вибираючи ε, r достатньо малими, отримаємо

$$\left\|v_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha} \le c\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q\right\|_\alpha +\right.$$

$$\left. + \left\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} + \left\|\psi_{1m};\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha}\right). \tag{22}$$

З огляду на нерівності (22) і оцінки

$$\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q\right\|_\alpha \le c\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\right\|_\alpha,$$

$$\left\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} \le c\left\|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha},$$

$$\left\|\psi_{1m};\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha} \le c\left\|\psi_1;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha}$$

отримуємо нерівність (13). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Враховуючи заміну $v_m = u_m e^{\lambda t}$ і нерівність (13), для розв’язку задачі (6)–(8) отримаємо оцінку

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha} \le c\left(\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\right\|_\alpha + \left\|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha} +\right.$$

$$\left. + \left\|\psi;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha}\right), \tag{23}$$

права частина якої не залежить від m_1, m_2. Крім того, послідовності

$$\{U_m^{(0)}\} \equiv \{u_m(P)\},$$

$$\{U_m^{(1)}\} \equiv \{R(\gamma;P)\,d_1(-\beta_i^{(1)},t)\,d_2(-\beta_i^{(2)},x_i)\,\partial_{x_i}u_m(P)\},$$

$$\{U_m^{(2)}\} \equiv \{R(2\gamma;P)\,\partial_t u_m(P)\},$$

$$\{U_m^{(3)}\} \equiv \{R(2\gamma;P)\,d_1(-\beta_i^{(1)},t)\,d_1(-\beta_j^{(1)},t)\,d_2(-\beta_i^{(2)},x_i)\,d_2(-\beta_j^{(2)},x_j)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(P)\}$$

рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні в області $\overline{Q}$. За теоремою Арцела, існують підпослідовності $\{U_m^{(\nu)}\}$, які є рівномірно збіжними в $\overline{Q}$ до $U^{(\nu)}$, $\nu \in \{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ в задачі (6)–(8), отримаємо, що $u(t,x) = U^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (2)–(4), $u \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$. ♦

3. Задача оптимального керування. В області $Q = [0,T)\times D$ розглянемо задачу знаходження функцій $u(t,x)$, $p(t,x)$, $q(x)$, на яких функціонал (1) досягає мінімуму в класі обмежених функцій $(p,q)\in V$, а функція $u(t,x;p(t,x),q(x))$ при $(t,x)\in Q^{(0)} = Q\backslash Q_{(0)}$, $Q_{(0)} = \{(t,x)\in Q : t = t_0, x \in D\backslash\Omega\} \cup$ $\cup \{(t,x)\in Q : t\in[0,T), x\in\Omega\}$, є розв'язком крайової задачі (2)–(4).

Дослідження задачі (1)–(4) будемо проводити за виконання умов ***1°–3°***. Для того щоб встановити існування розв'язку задачі (1)–(4), необхідно встановити спочатку розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами.

В області Q розглянемо задачу знаходження функцій (u_m, p, q), на яких функціонал

$$I(p,q) = \int_0^T dt \int_D F_1(t,x;u_m(t,x;p;q),p)\,dx + \int_D F_2(x;u_m(T,x;p;q),q)\,dx \tag{24}$$

досягає мінімуму в класі обмежених функцій $(p,q)\in V$, із яких $u_m(t,x)$ є розв'язком крайової задачі

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x;p), \tag{25}$$

$$u_m(0,x) = \varphi_m(x;q), \tag{26}$$

$$(u_m - \psi_m)(t,z) \equiv 0. \tag{27}$$

Використовуючи функцію Ґріна $(G_m^{(1)}, \Gamma_m)$ з [5, с. 62], для задачі (25)–(27) отримуємо, що для будь-яких $(p,q)\in V$ існує, при цьому є єдиним, розв'язок задачі (25)–(27), який зображується формулою

$$u_m(t,x,p,q) = \int_0^T d\tau \int_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi,p)\,d\xi + \int_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi_m(\xi,q)\,d\xi + \int_0^T d\tau \int_{\partial D} \Gamma(t,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi)\,d\xi. \tag{28}$$

Позначимо

$$\mu(\tau,\xi) = \int_\tau^T dt \int_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)\frac{\partial F_1(t,x,u_m,p)}{\partial u_m}\,dx + \int_D G_m^{(1)}(T,x,\tau,\xi)\frac{\partial F_2(x,u_m,q)}{\partial u_m}\,dx,$$

$$\eta(\xi) = \int_0^T dt \int_D G_m^{(1)}(t, x, 0, \xi) \frac{\partial F_1(t, x, u_m, p)}{\partial u_m} dx +$$

$$+ \int_D G_m^{(1)}(T, x, 0, \xi) \frac{\partial F_2(x, u_m, q)}{\partial u_m} dx ,$$

$$H_\mu(\mu, u_m, p) = F_1(t, x; u_m, p) + \mu(t, x) f_m(t, x; p) ,$$

$$H_\eta(\eta, u_m, q) = F_2(x; u_m, q) + \eta(x)\, \varphi_m(x; q) .$$

Правильними є такі теореми.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови **1°–3°**. Тоді*

i) *якщо* H_μ і H_η *– монотонно зростаючі функції за аргументом* p *і* q *відповідно, то оптимальними керуваннями є* $p_1(t, x)$ *і* $q_1(x)$, *а оптимальний розв'язок задачі* (24)–(27) *має вигляд*

$$u_m^{(0)}(t, x; p, q) = u_m(t, x; p_1, q_1) ;$$

ii) *якщо* H_μ *– монотонно зростаюча функція за аргументом* p, *а* H_η *– монотонно спадна за аргументом* q, *то оптимальними керуваннями є функції* $p_1(t, x)$ і $q_2(x)$, *а оптимальний розв'язок задачі* (24)–(27) *має вигляд*

$$u_m^{(0)}(t, x; p, q) = u_m(t, x; p_1, q_2) ;$$

iii) *якщо* H_μ *– монотонно спадна функція за аргументом* p, *а* H_η *– монотонно зростаюча за аргументом* q, *то* $p_2(t, x)$ *і* $q_1(x)$ *– оптимальні керування, а*

$$u_m^{(0)}(t, x; p, q) = u_m(t, x; p_2, q_1)$$

є оптимальним розв'язком задачі (24)–(27);

iv) *якщо* H_μ *і* H_η *– монотонно спадні функції за аргументом* p *і* q *відповідно, то оптимальними керуваннями є* $p_2(t, x)$ *і* $q_2(x)$, *а оптимальний розв'язок задачі* (24)–(27) *має вигляд*

$$u_m^{(0)}(t, x; p, q) = u_m(t, x; p_2, q_2) .$$

Встановимо умови існування оптимального розв'язку задачі (24)–(27) у випадку, коли функції H_λ і H_μ не є монотонними.

Теорема 5. *Нехай для задачі* (24)–(27) *виконуються умови **1°–3°** і функції* H_μ, H_η *не є монотонними за аргументами* p і q *відповідно.*

Тоді для того щоб керування $(p^{(0)}, q^{(0)}) \in V$ *та відповідний розв'язок* $u_m(t, x, p^{(0)}, q^{(0)})$ *крайової задачі* (24)–(27) *були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови:*

i) *функція* $H_\mu(t, x, p)$ *за аргументом* p *має в точці* $p^{(0)}$ *мінімальне значення;*

ii) *функція* $H_\eta(x, q)$ *за аргументом* q *має в точці* $q^{(0)}$ *мінімальне значення;*

iii) *для довільного ненульового вектора* $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ *і* $(t, x) \in \bar{Q}$ *виконується нерівність*

$$K_1(t,x,\overline{\xi}) \equiv \partial^2_{u_m} F_1(t,x;u_m^{(0)},p^{(0)})\xi_1^2 + 2\partial_{u_m}\partial_p F_1(t,x;u_m^{(0)},p^{(0)})\xi_1\xi_2 +$$

$$+ \partial_p^2 F_1(t,x;u_m^{(0)},p^{(0)})\xi_2^2 > 0\,;$$

iv) *для довільного вектора* $\overline{y} = (y_1, y_2)$ *і* $x \in D$ *виконується нерівність*

$$K_2(x,\overline{y}) \equiv \partial^2_{u_m} F_2(x;u_m^{(0)},q^{(0)})y_1^2 + 2\partial_{u_m}\partial_q F_2(x;u_m^{(0)},q^{(0)})y_1y_2 +$$

$$+ \partial_q^2 F_2(x;u_m^{(0)},q^{(0)})y_2^2 > 0\,.$$

Д о в е д е н н я **теорем 4, 5** проводиться за допомогою методики праці [8]. Переходячи до границі в задачі (24)–(27) при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$, одержуємо оптимальний розв'язок задачі (1)–(4). ♦

Зауважимо, що можна також довести відповідні теореми для випадку, коли одна з функцій є монотонною, а інша – немонотонною.

1. *Исарюк И М., Пукальский И. Д.* Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным условием и вырождениями // Укр. мат. вісн. – 2014. – **11**, № 4. – С. 480–496.
   Те саме: *Isaryuk I. M., Pykal'skii I. D.* The boundary-value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations // J. Math. Sci. – 2015. – **207**, No. 1. – P. 26–38. – https://doi.org/10.1007/s10958-015-2352-2.
2. *Ісарюк І. М., Пукальський І. Д.* Нелокальна задача з косою похідною і задача оптимізації для параболічних рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2010. – Вип. 528. – С. 62–69.
3. *Ісарюк І. М., Пукальський І. Д.* Про нелокальну параболічну задачу з виродженням // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 2. – С. 208–215.
   Те саме: *Isaryuk I. M., Pukal's'kyi I. D.* Nonlocal parabolic problem with degeneration // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 2. – P. 232–241. – https://doi.org/10.1007/s11253-014-0925-8.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., Vol. 23. – Providence, RI: AMS, 1968. – xi+648 p.
5. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – Москва: Наука,1971. – 289 с.
6. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
7. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
8. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
9. *Пукальський І. Д.* Параболічна крайова задача і задача оптимального керування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 34–41.
   Те саме: *Pukalskyi I. D.* A parabolic boundary-value problem and a problem of optimal control // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 2. – P. 159–168. – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0287-9.
10. *Пукальський І. Д., Ісарюк І. М.* Нелокальні параболічні крайові задачі з особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 54–66.
    Те саме: *Pukal's'kyi I. D., Isaryuk I. M.* Nonlocal parabolic boundary-value problems with singularities // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 327–343. – https://doi.org/10.1007/s10958-015-2449-7.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
12. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.) – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.

13. *Lange H., Teismann H.* Controllability of the nonlinear Schrödinger equation in the vicinity of the ground state // Math. Meth. Appl. Sci. – 2007. – **30**, No. 13. – P. 1483–1505. – https://doi.org/10.1002/mma.849.

ВНУТРЕННЕЕ И СТАРТОВОЕ УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ

Для параболического уравнения второго порядка с вырождениями построено решение задачи оптимального управления системами, которые описываются первой краевой задачей с внутренним и стартовым управлениями. Коэффициенты параболического уравнения имеют степенные особенности произвольного порядка по временной и пространственным переменным на некотором множестве точек.

Ключевые слова: *параболическая краевая задача, степенные особенности, гельдеровы пространства, функция Грина, оптимальное решение.*

INTERNAL AND START CONTROLS OF SOLUTIONS OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATIONS

For the second-order parabolic equation with degenerations, the solution of the optimal control problem for the systems described by the first boundary-value problem with internal and starting controls is constructed. The coefficients of the parabolic equation have power singularities in time and in spatial variables on a certain set of points.

Key words: *parabolic boundary-value problem, power singularities, Hölder spaces, Green function, optimal solution.*

Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
27.04.20