

ВПЛИВ ПОВЕРХНЕВИХ НАПРУЖЕНЬ НА АНТИПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКОГО СТРІЧКОВОГО МІЖФАЗНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

На основі застосування теорії функцій комплексної змінної і методу функцій стрибка запропоновано методику врахування додаткового впливу поверхневих напружень у задачі для тонкого міжфазного включення у біматеріалі. При цьому передбачено можливість існування неідеального контакту між включенням та матрицею, зокрема контакту з поверхневим натягом. Це значно розширює сферу застосовності результатів моделювання у рамках концепції репрезентативного елемента об'єму мікро- та макромеханіки. Побудовано узагальнену модель тонкого включення з довільними механічними властивостями. Розрахунок тестових задач засвідчив високу точність та ефективність запропонованого підходу. Отримано розрахунки поля напружень при взаємодії включення із зосередженою силою та гвинтовою дислокацією.

Ключові слова: стрічкове включення, поверхнєве напруження, функції стрибка, біматеріал.

Вступ. У наш час в механіці матеріалів інтерес до вивчення об'єктів істотно перемістився з макро- (10^0 м) та мікрорівнів ($10^{-3} \div 10^{-6}$ м) на нанорівень (10^{-9} м) [10, 12, 13] завдяки появі можливості використання у новітніх технологіях і продуктах виробництва специфічних властивостей нанокompatитів. Існує певна складність математичного моделювання механіки наноструктур, яка все ще залишається гостро актуальною проблемою матеріалознавства. Р полегшує початкові кроки у її вирішенні в цілому позитивний досвід застосування до вивчення таких структур концепції суцільного середовища. Отже, на сучасному етапі розвитку теорії можна зосередитися на конструюванні придатних для вивчення різномасштабних структур ускладнених конститутивних рівнянь та опрацювання методів їх розв'язування. В основу такого моделювання переважно покладають концепцію «репрезентативного елемента об'єму» (RVE) [12, 13] для наділення придатних для макроструктурних об'єктів класичних моделей континууму певними додатковими властивостями, які, в межах гіпотези суцільності, могли би врахувати наявність і визначальні для механіки властивості структурних неоднорідностей. Зокрема, врахування впливу фізики поверхонь дефектів структури та меж поділу складових композитів стає відчутним в наномасштабі через зростання площі поверхні поділу в одиниці об'єму структур.

На основі численних і різноманітних досліджень впливу ефекту поверхневих напружень [8, 9, 11, 14, 17], якими в цілком адекватному першому наближенні можна в межах навіть лінійної теорії пружності вивчати механіку наноструктурованих тіл, було запропоновано емпіричний масштабуючий закон [5, 16, 23] із власною шкалою, що дає можливість, хоч і приблизно, врахувати зміни основних нерозмірних механічних властивостей залежно від характерного розміру в наномасштабі. На врахування поверхневих напружень та енергії спрямовано зусилля щораз більшої кількості праць [7–9, 14–17]. Переважно у них використовується класична теорія Ешелбі для еліпсоїдального однорідного включення в однорідному необмеженому середовищі [5, 6, 11, 22, 23]. Низка праць стосується аналізу впливу поверхневих напружень на середовище з тріщиною [24]. Запропонована у

✉ pjozef57@gmail.com

цій праці загальна теорія є придатною для довільного типу навантажень (на нескінченності, зосередженими силами, моментами, диполями та дислокаціями; включення міститься не в однорідній матриці, а лежить на межі двох різнорідних середовищ або включення може мати довільно змінювану малу товщину і фізично нелінійні механічні властивості).

Це дослідження покликане в межах антиплоскої задачі теорії пружності та концепції RVE дослідити механічний вплив наявності додаткових поверхневих напружень на тонкому міжфазному лінійно пружному включенні, якщо основний напружено-деформований стан (НДС) формують силкові чинники та гвинтові дислокації. Отримані тут результати придатні також і для випадку тонких міжфазних макровключень.

1. Формулювання задачі. У формулюванні задачі поздовжнього зсуву розглянемо структуру, що складається з двох півпросторів з пружними сталими G_1 , G_2 , на межі якої (площина xOz) в напрямку осі зсуву Oz розташоване тонке пружне включення завтовшки $2h$, $h \ll a$, з ортотропними механічними властивостями G_y^{in} , G_x^{in} (рис. 1). Оскільки напружено-деформований стани структури в кожному перпендикулярному до осі Oz перерізі є ідентичними, то надалі будемо розглядати лише площину xOy , яка складається з двох плоских перерізів півпросторів S_k , $k = 1, 2$, з межею поділу L між ними у вигляді осі абсцис Ox . На ній уздовж відрізка $L' = [-a, a]$ розміщений переріз тонкого включення.

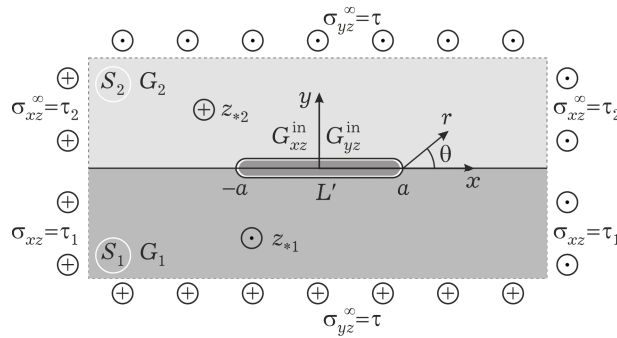


Рис. 1. Геометрія і навантаження RVE-структури.

Величина і напрямок дії зовнішніх силових факторів, що здійснюють поздовжній зсув масиву, можуть змінюватися квазістатично і передбачають існування рівномірно розподілених на нескінченності напружень σ_{yz}^{∞} , σ_{xz}^{∞} , зосереджених сил інтенсивності Q_k і гвинтових дислокацій із відповідною складовою b_k вектора Бюргерса вздовж осі Oz в точках $z_{*k} \in S_k$, $k = 1, 2$. Для забезпечення прямолінійності межі поділу матеріалів на нескінченності потрібно, щоб виконувалась умова $\tau_2 G_1 = \tau_1 G_2$ [2].

Контакт між півпросторами уздовж лінії $L'' = L \setminus L'$ вважаємо ідеальним:

$$w(x, +0) = w(x, -0), \quad \sigma_{yz2}(x, +0) = \sigma_{yz1}(x, -0), \quad x \in L'' \quad (1)$$

а між берегами включення і матрицею уздовж L' приймаємо умови контакту з поверхневим натягом:

$$w^{\text{in}}(x, \pm h) = w(x, \pm h), \quad \sigma_{yz}^{\text{in}}(x, \pm h) = \sigma_{yzk}(x, \pm h) - \mathfrak{Z}_k \quad (2)$$

Тут поверхневі напруження \mathfrak{Z}_k можуть бути залежними як від інтенсив-

ності НДС, так і від властивостей матеріалів і характерного розміру задачі. Верхнім індексом «in» позначено компоненти НДС всередині включення.

2. Модель тонкого включення з покриттям. Вважаємо, що наявність тонкого включення у масиві моделюється збуренням НДС – стрибком компонент векторів напружень f_3 і переміщень f_6 на L' [2, 3, 18–21]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rz}(x, y) &= \sigma_{rz}^0(x, y) + \hat{\sigma}_{rz}(x, y), & r &= \{x, y\}, \\ w(x, y) &= w^0(x, y) + \hat{w}(x, y),\end{aligned}\quad (3)$$

$$[\sigma_{yz}]_h \cong \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_3(x),$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_h \cong \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[\frac{\sigma_{xz}}{G} \right]_h \cong \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_6(x), \quad x \in L',$$

$$f_3(x) = f_6(x) = 0, \quad x \notin L'. \quad (4)$$

Тут і далі позначено $[\varphi]_h = \varphi(x, -h) - \varphi(x, +h)$, $\langle \varphi \rangle_h = \varphi(x, -h) + \varphi(x, +h)$; верхні індекси «+» та «-» в (4) відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії L ; величини, позначені індексом «0» зверху в (3), характеризують відповідні величини у суцільному тілі без модельних неоднорідностей за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний розв'язок) [2], а величини, позначені зверху «шапочкою», відповідають збуренням основного поля НДС наявністю включення.

Математична модель тонкого включення і шарів тонкого покриття подається у вигляді так званих умов взаємодії [2, 18], які еквівалентні умовам неідеального контакту між прилеглими до включення поверхнями матриці. В основі пропонованої методики моделювання тонкого об'єкта лежить інтегрування по об'єму визначальних співвідношень, що описують фізико-механічний стан матеріалу включення, з наступним урахуванням малості одного з лінійних розмірів включення.

Основними співвідношеннями для довільного матеріалу включення є – умови рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{\text{in}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{\text{in}}}{\partial y} + \rho F^{\text{in}} = 0, \quad (5)$$

– конститутивна залежність деформацій від напружень вигляду

$$\sigma_{xz}^{\text{in}} = G_x^{\text{in}} \frac{\partial w^{\text{in}}}{\partial x}, \quad \sigma_{yz}^{\text{in}} = G_y^{\text{in}} \frac{\partial w^{\text{in}}}{\partial y}, \quad (6)$$

– співвідношення тонкостінності

$$\frac{\partial w^{\text{in}}}{\partial y}(x, h) + \frac{\partial w^{\text{in}}}{\partial y}(x, -h) \cong \frac{w^{\text{in}}(x, h) - w^{\text{in}}(x, -h)}{h} = -\frac{[w^{\text{in}}]_h}{h}. \quad (7)$$

Тут F^{in} – масові сили, ρ – густина маси матеріалу включення.

Тоді з урахуванням (5)–(7) модель тонкого ортотропного включення достатньо точно описується двома рівняннями:

$$\frac{G_x^{\text{in}}}{2} \left\langle \frac{\partial w^{\text{in}}}{\partial x} \right\rangle_h - \sigma_{xz}^{\text{in}}(-a) - \frac{1}{2h} \int_{-a}^x [\sigma_{yz}^{\text{in}}]_h(\xi) d\xi + F_{\text{av}}^{\text{in}}(x, h) = 0, \quad (8)$$

$$-\frac{[w^{\text{in}}]_h}{h} = \frac{\langle \sigma_{yz}^{\text{in}} \rangle_h}{G_y^{\text{in}}}, \quad (9)$$

$$\text{де } F_{\text{av}}^{\text{in}}(x, h) = \frac{\rho}{2h} \int_{-h-a}^h \int_{-a}^x F^{\text{in}}(\xi, y) d\xi dy.$$

Підстановка крайових умов (2) з урахуванням залежності (3) в модель (8), (9) дає можливість отримати систему визначальних рівнянь для розв'язування сформульованої задачі:

$$\int_{-a}^x f_3(\xi) d\xi = -N_{xz}(-a) + \omega_x^{\text{in}} \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_h + (x+a)(\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2) + 2hF_{\text{av}}^{\text{in}}(x, h), \quad (10)$$

$$\int_{-a}^x f_6(\xi) d\xi + [w]_h(-a) - h \left\langle \frac{\sigma_{yzk}}{G_k} \right\rangle_h = -\omega_y^{\text{in}} \left\{ \langle \sigma_{yzk} \rangle_h - \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 \right\}. \quad (11)$$

Тут $\omega_x^{\text{in}} = hG_x^{\text{in}}$, $\omega_y^{\text{in}} = h/G_y^{\text{in}}$, $N_{xz}(-a) = 2h\sigma_{xz}^{\text{in}}(-a)$.

Адекватність моделі (10)–(11) верифікують граничні випадки:

- A) $h \rightarrow 0$: $[\sigma_{yzk}]_h \rightarrow 0$, $\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_h \rightarrow 0$, $[w]_h \rightarrow 0$;
- B) $G_x^{\text{in}} \rightarrow 0$: $\int_{-a}^x [\sigma_{yz}]_h(\xi) d\xi + N_{xz}(-a) + 2hF_{\text{av}}^{\text{in}}(x, h) = 0$;
- C) $G_y^{\text{in}} \rightarrow \infty$: $\int_{-a}^x \left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right]_h(\xi) d\xi + w(-a) - h \left\langle \frac{\sigma_{yz}^0}{G_k} \right\rangle_h = 0$ або $[w]_h \rightarrow 0$;
- D) $G_x^{\text{in}} \rightarrow \infty$: $\left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_h \rightarrow 0$, $[w]_h \rightarrow 0$;
- E) $G_y^{\text{in}} \rightarrow 0$: $\langle \sigma_{yzk} \rangle_h \rightarrow \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2$;
- F) $G_y^{\text{in}0} \rightarrow G_k$: $[w]_h = \frac{h}{G_y^{\text{in}}}(\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2)$.

Окрім того, побудована модель (8)–(11) узагальнює відомі моделі «поверхневого шару» [4, 7–9] на випадок розімкнутого контуру, а також, як частковий випадок, – модель міжфазної тріщини з поверхневим напругом [24].

3. Побудова інтегральних рівнянь методу функцій стрибка. Застосовуючи до розв'язування задачі методику праць [2, 3, 18–21], можемо отримати залежності, згідно з якими компоненти тензора напружень і похідні від вектора переміщень на лінії L необмеженої площини S , а також всередині неї є такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{\pm}(x) &= \mp p_k f_3(x) - C g_6(x) + \sigma_{yz}^{0\pm}(x), \\ \sigma_{xz}^{\pm}(x) &= \mp C f_6(x) + p_k g_3(x) + \sigma_{xz}^{0\pm}(x), \\ \frac{\partial w^{\pm}}{\partial y}(x) &= \mp p f_3(x) - p_{3-k} g_6(x) + \frac{\sigma_{yz}^{0\pm}(x)}{G_k}, \\ \frac{\partial w^{\pm}}{\partial x}(x) &= \mp p_{3-k} f_3(x) + p g_6(x) + \frac{\sigma_{xz}^{0\pm}(x)}{G_k}, \\ \sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) &= \sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) + ip_k g_3(z) - C g_6(z), \\ &z \in S_k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$g_r(z) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_r(x) dx}{x-z}, \quad s_r(x) \equiv \int_{-a}^x f_r(x) dx, \quad r = 3, 6,$$

$$C = G_{3-k} p_k, \quad p_k = p G_k, \quad p = \frac{1}{G_1 + G_2}.$$

Застосування під час розв'язування задачі однакового традиційного позначення для осі Oz та комплексної змінної $z = x + iy$ не повинно викликати непорозумінь.

Підставляючи (12) у модель (10), (11), отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-a}^x f_3(\xi) d\xi + N_{xz}(-a) - 2hF_{av}^{in}(x, h) - (x+a)(\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2) = \\ = \omega_x^{in} \left\{ (p_2 - p_1) f_6(x) + 2p g_3(x) + \left\langle \frac{\sigma_{xz}^0}{G_k} \right\rangle_h \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^x f_6(\xi) d\xi + [w]_h(-a) - h \left\langle \frac{\sigma_{yz}^0}{G_k} \right\rangle_h = -\omega_y^{in} \left\{ (p_1 - p_2) f_3(x) - \right. \\ \left. - (2C - G_y^{in}) g_6(x) + \left\langle \sigma_{yzk}^0 \right\rangle_h - \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

і, як наслідок, – систему сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР):

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_6(x) + \beta_1 g_3(x) - \gamma_1 s_3(x) = F_3(x), \\ \alpha_2 f_3(x) + \beta_2 g_6(x) - \gamma_2 s_6(x) = F_6(x), \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\alpha_1 = p_2 - p_1, \quad \beta_1 = 2p, \quad \gamma_1 = \frac{a}{\omega_x^{in}},$$

$$F_3(x) = \gamma_1 \left\{ N_{xz}(-a) - (x+a)(\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2) - 2hF_{av}^{in}(x, h) \right\} - \left\langle \frac{\sigma_{xz}^0}{G_k} \right\rangle_h,$$

$$\alpha_2 = p_2 - p_1, \quad \beta_2 = 2C - G_y^{in}, \quad \gamma_2 = \frac{a}{\omega_y^{in}},$$

$$F_6(x) = \gamma_2 \left\{ [w]_h(-a) - h \left\langle \frac{\sigma_{yzk}^0}{G_k} \right\rangle_h \right\} + \left\langle \sigma_{yzk}^0 \right\rangle_h - \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2,$$

з додатковими умовами

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f_3(\xi) d\xi = N_{xz}(a) - N_{xz}(-a) + 2h\rho F_{av}^{in}(a, h) + 2a(\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2), \\ \int_{-a}^a f_6(\xi) d\xi = [w]_h(a) - [w]_h(-a). \end{aligned} \quad (16)$$

Якщо, крім цього, матеріали матриці є однаковими ($G_1 = G_2 = G$), то ССІР (15) розпадається на два незалежних рівняння

$$\begin{aligned} \beta_1 g_3(x) - \gamma_1 s_3(x) = F_3(x), \\ \beta_2 g_6(x) - \gamma_2 s_6(x) = F_6(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Для оцінки впливу наявності включення на НДС матриці зручно про-

аналізувати деякі характеристики, зокрема узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які описують напружено-деформований стан поблизу вістря включення

$$K_{31} + iK_{32} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ (\theta=0)}} \sqrt{2\pi r} (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}). \quad (18)$$

До розв'язування ССІР (15), (16) можна застосувати методику [1, 2], яка на кожному кроці приросту величини навантаження зводить ССІР (15) до системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для визначення невідомих коефіцієнтів розвинення функцій стрибка $f_r(\tilde{x})$ у скінченні ряди за поліномами Чебишова

$$f_r(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} \sum_{j=0}^N B_j^r T_j(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad r = 3, 6. \quad (19)$$

Тобто підстановка (19) у систему (15) та обчислення отриманих залежностей на множині точок $x_m = \cos \frac{m\pi}{N+1}$, $m = 1, \dots, N$, з урахуванням додаткових умов (16) та інтегралів

$$\begin{aligned} g_r(\tilde{x}) &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N B_j^r \int_{-1}^1 \frac{T_j(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi-\tilde{x})} = \sum_{j=1}^N B_j^r U_{j-1}(\tilde{x}), \\ s_r(\tilde{x}) &= B_0^r (\pi - \arccos(\tilde{x})) - \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} B_j^r \sqrt{1-\tilde{x}^2} U_{j-1}(\tilde{x}), \\ \int_{-1}^1 f_r(\xi) d\xi &= \pi B_0^r, \quad r = 3, 6, \end{aligned} \quad (20)$$

породжує СЛАР порядку $2N+2$ для визначення невідомих B_j^r , $r = 3, 6$, $j = 0, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \chi_{mj}^3 B_j^3 + \sum_{j=0}^N \psi_{mj} B_j^6 &= F_3(x_m), \\ \sum_{j=0}^N \psi_{mj} B_j^3 + \sum_{j=0}^N \chi_{mj}^6 B_j^6 &= F_6(x_m), \quad m = 1, \dots, N, \\ B_0^3 &= N_{xz}(a) - N_{xz}(-a) + 2h\rho F_{av}^{\text{in}}(a, h) - 2a(\mathfrak{I}_2 - \mathfrak{I}_1), \\ \pi B_0^6 &= [w]_h(a) - [w]_h(-a), \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} \chi_{mj}^3 &= -\delta_{0j} \gamma_1 \pi \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) + (1 - \delta_{0j}) \zeta_{mj} \left(\frac{\gamma_1}{j} + \frac{\beta_1}{\varepsilon_m}\right), \\ \chi_{mj}^6 &= -\delta_{0j} \gamma_2 \pi \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) + (1 - \delta_{0j}) \zeta_{mj} \left(\frac{\gamma_2}{j} + \frac{\beta_2}{\varepsilon_m}\right), \\ \psi_{mj} &= (p_2 - p_1) \frac{\eta_{mj}}{\varepsilon_m}, \quad \eta_{mj} = \cos \frac{j m \pi}{N+1}, \\ \varepsilon_m &= \sin \frac{m \pi}{N+1}, \quad \zeta_{mj} = \sin \frac{j m \pi}{N+1}. \end{aligned}$$

Для обчислення НДС у кожній з точок колокації отримані як розв'язки СЛАР (21) коефіцієнти B_j^r , $r = 3, 6$, $j = 0, 1, \dots, N$, підставляємо у співвідношення (19), (20), а потім у (12):

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}^\pm(x_m) &= \mp \frac{p_k}{\varepsilon_m} \sum_{j=0}^N \eta_{mj} B_j^3 - \frac{C}{\varepsilon_m} \sum_{j=0}^N \zeta_{mj} B_j^6 + \sigma_{yz}^{0\pm}(x_m), \\ \sigma_{xz}^\pm(x_m) &= \mp \frac{C}{\varepsilon_m} \sum_{j=0}^N \eta_{mj} B_j^6 + \frac{p_k}{\varepsilon_m} \sum_{j=0}^N \zeta_{mj} B_j^3 + \sigma_{xz}^{0\pm}(x_m), \\ \frac{\partial w^\pm}{\partial y}(x_m) &= \mp \frac{p}{\varepsilon_m} \sum_{j=0}^N \eta_{mj} B_j^3 - \frac{p_{3-k}}{\varepsilon_m} \sum_{j=0}^N \zeta_{mj} B_j^6 + \frac{\sigma_{yz}^{0\pm}(x_m)}{G_k}, \\ \frac{\partial w^\pm}{\partial x}(x_m) &= \mp \frac{p_{3-k}}{\varepsilon_m} \sum_{j=0}^N \eta_{mj} B_j^6 + \frac{p}{\varepsilon_m} \sum_{j=0}^N \zeta_{mj} B_j^3 + \frac{\sigma_{xz}^{0\pm}(x_m)}{G_k}, \\ k &= 1, 2, \quad m = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (22)$$

Звідси, повертаючись до умов (2), можна отримати розрахункові залежності для компонент НДС всередині включення:

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}^{\text{in}+}(x_m) &= \sigma_{yz2}^+(x_m) - \mathfrak{I}_2, \quad \sigma_{yz}^{\text{in}-}(x_m) = \sigma_{yz1}^-(x_m) - \mathfrak{I}_1, \\ \langle \sigma_{yz}^{\text{in}}(x_m) \rangle_h &= \langle \sigma_{yzk}(x_m) \rangle_h - \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2, \quad m = 1, \dots, N,\end{aligned}\quad (23)$$

і виразів для КІН:

$$K_{31}^\pm + iK_{32}^\pm = \sqrt{\pi} \sum_{j=0}^N (\pm 1)^j (CB_j^6 - ip_k B_j^3). \quad (24)$$

З урахуванням значення інтегралів

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(x) dx}{\sqrt{1-x^2}(x-\tilde{z})} = -\frac{\omega^j}{\sqrt{\tilde{z}^2-1}}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{a}, \quad \text{Re } \tilde{z} > 1, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

$$g_k(\tilde{z}) = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{z}^2-1}} \sum_{j=0}^N B_j^k \omega^j, \quad \int g_k(\tilde{z}) d\tilde{z} = -B_0^k \ln \frac{1}{2\omega} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} B_j^k \omega^j,$$

$$\omega = \tilde{z} - \sqrt{\tilde{z}^2-1},$$

нескладно отримати вирази для компонент НДС у матриці:

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}(\tilde{z}) + i\sigma_{xz}(\tilde{z}) &= \frac{-i}{2\sqrt{\tilde{z}^2-1}} \sum_{j=0}^N (B_j^3 + 2iCB_j^6) \omega^j + \sigma_{yz}^0(\tilde{z}) + i\sigma_{xz}^0(\tilde{z}), \\ w(\tilde{z}) &= \frac{1}{2G_k} \text{Re} \left\{ \left(B_0^3 + 2iCB_0^6 \right) \ln \frac{1}{2\omega} - \sum_{j=1}^N \left(B_j^3 + iCB_j^6 \right) \frac{\omega^j}{j} \right\} + w^0(\tilde{z}).\end{aligned}\quad (25)$$

4. Числовий аналіз. Для ілюстрації методики дослідження проведемо детальніший аналіз розв'язку задачі для часткового випадку рівності пружних характеристик півпросторів ($G_1 = G_2 = G$) і навантажування однорідним полем напружень на безмежності $\tilde{\tau} = \tau/G$, $\tilde{\tau}_2 = \tau_2/G$, зосередженими силами інтенсивністю $\tilde{Q} = Q/\pi aG$ та дислокаціями інтенсивністю $\tilde{b} = b/\pi a$ за схемою $Q_2 = -Q_1 = Q$, $b_2 = -b_1 = b$, $z_2 = x_2 + id = \bar{z}_1$. При цьому сили натягу для прикладу приймаємо як сталими, так і залежними від пружних властивостей включення у вигляді $\tilde{\mathfrak{I}}_2 = \tilde{\mathfrak{I}}_1 = \tilde{\mathfrak{I}}/G = k_T (G^{\text{in}}/G)^\alpha$, де

k_T та α – коефіцієнт і показник інтенсивності поверхневого натягу. На рис. 2 – рис. 5 показано залежність знерозмірених узагальнених КІН $\tilde{K}_{31} = K_{31}/G\sqrt{\pi a}$, $\tilde{K}_{32} = K_{32}/G\sqrt{\pi a}$ від згаданих параметрів. Виявлено, що навантаження $\tilde{\tau}$ і силовий чинник \tilde{Q} практично впливають лише на \tilde{K}_{31} (ліва частина кожного рисунка) для більш податного від матриці включення, у той час як $\tilde{\tau}_2$ і дислокація \tilde{b} – на \tilde{K}_{32} (права сторона рисунків) для жорсткішого від матриці включення. При цьому зростання коефіцієнта інтенсивності натягу k_T істотно зменшує \tilde{K}_{31} (навіть до зміни знаку), а зростання показника інтенсивності натягу α , навпаки, зменшує \tilde{K}_{31} (рис. 2, рис. 3). За такої симетрії навантажування зміна цих параметрів жодного впливу на \tilde{K}_{32} не здійснює. Така ж тенденція зберігається і при навантаженні зосередженими факторами \tilde{Q} та \tilde{b} (рис. 4, рис. 5). Якщо віддаль точки прикладання цих чинників до лінії включення $\tilde{d} = d/a > 1$, то локальність навантаження практично стає еквівалентною до прикладання розподілених на безмежності сил відповідної інтенсивності (рис. 4). На відміну від цього, зміщення точок прикладання, зосереджених уздовж осі включення, істотно впливає на обидва КІН, зменшуючи \tilde{K}_{31} і збільшуючи \tilde{K}_{32} (рис. 5).

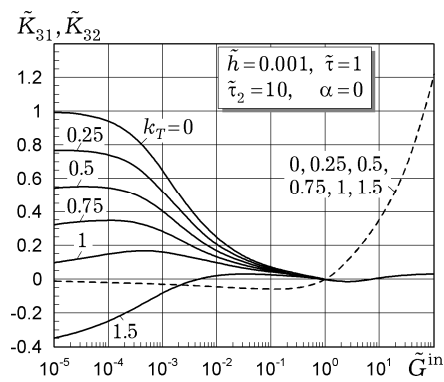


Рис. 2. Вплив інтенсивності поверхневого натягу k_T на \tilde{K}_{31} (суцільні лінії) та \tilde{K}_{32} (штрихові лінії).

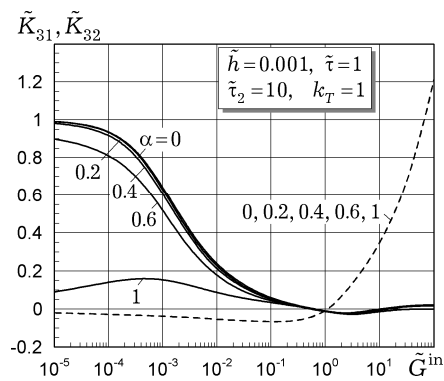


Рис. 3. Вплив показника поверхневого натягу α на \tilde{K}_{31} (суцільні лінії) та \tilde{K}_{32} (штрихова лінія).

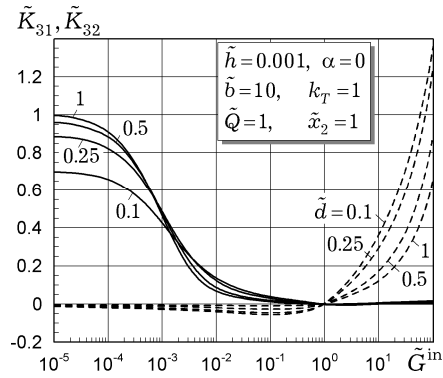


Рис. 4. Вплив віддаленості точок прикладання зосереджених чинників \tilde{Q} та \tilde{b} від осі включення за сталого поверхневого натягу на \tilde{K}_{31} (суцільні лінії) та \tilde{K}_{32} (штрихові лінії).

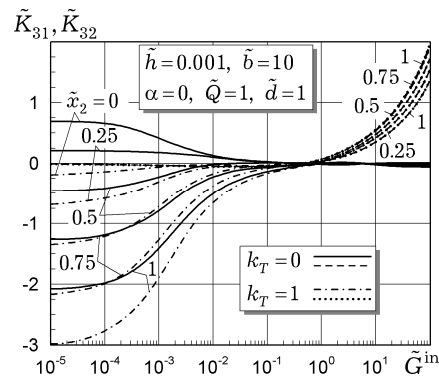


Рис. 5. Вплив зміщення точок прикладання зосереджених чинників \tilde{Q} та \tilde{b} уздовж осі включення за відсутнього та сталого поверхневого натягу на \tilde{K}_{31} (суцільні та штрихпунктирні лінії) та \tilde{K}_{32} (пунктирні лінії).

Висновки. Використання методу функцій стрибка дає можливість дуже просто та органічно врахувати дію зусиль поверхневого натягу на межі контакту тонкого включення з довільного матеріалу із оточуючим його середовищем. У відповідній математичній моделі появляється лише додаткова адитивна стала, а методи розв'язування відповідних інтегральних сингулярних рівнянь можна взагалі не змінювати. У числових розрахунках виявлено особливості впливу натягу на НДС у матриці та включенні. Зокрема, натяг істотно зменшує K_{31} , водночас практично не впливаючи на K_{32} . Аналогічний ефект має зміна точок прикладання зосереджених чинників. Згадані ефекти можуть бути використані при оптимізації НДС біля розглянутої RVE структури.

1. Піскозуб Й. З., Сулим Г. Т. Асимптотика напружень в околі кінців тонкого міжфазного вкраплення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1996. – **32**, № 4. – С. 39–48.

Te same: Piskozub I. Z., Sulym H. T. Asymptotics of stresses in the vicinity of a thin elastic interphase inclusion // Mater. Sci. – 1996. – **32**, No. 4. – P. 421–432. – <https://doi.org/10.1007/BF02538967>.

2. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.

3. Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Нелінійне деформування тонкого міжфазного включення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – **53**, № 5. – С. 24–30.
Te same: *Sulym H. T., Piskozub I. Z.* Nonlinear deformation of a thin interface inclusion // *Mater. Sci.* – 2018. – **53**, No. 5. – P. 600–608.
4. *Benveniste Y., Miloh T.* Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // *Mech. Mater.* – 2001. – **33**, No. 6. – P. 309–323.
– [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(01\)00055-2](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(01)00055-2).
5. *Duan H. L., Wang J., Huang Z. P., Karimhaloo B. L.* Eshelby formalism for nano-inhomogeneities // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 2005. – **461**, No. 2062. – P. 3335–3353.
– <https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1520>.
6. *Eshelby J. D.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problem // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1957. – **241**, No. 1226. – P. 376–396.
– <http://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133>.
7. *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* A continuum theory of elastic material surfaces // *Arch. Ration. Mech. Anal.* – 1975. – **57**, No. 4. – P. 291–323.
– <https://doi.org/10.1007/BF00261375>.
8. *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* Surface stress in solids // *Int. J. Solids Struct.* – 1978. – **14**, No. 6. – P. 431–440. – [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(78\)90008-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(78)90008-2).
9. *Kim C. I., Schiavone P., Ru C.-Q.* The effect of surface elasticity on Mode-III interface crack // *Arch. Mech.* – 2011. – **63**, No. 3. – P. 267–286
10. *Kizler P., Uhlmann D., Schmauder S.* Linking nanoscale and macroscale: calculation of the change in crack growth resistance of steels with different states of Cu precipitation using a modification of stress – strain curves owing to dislocation theory // *Nucl. Eng. Des.* – 2000. – **196**, No. 2. – P. 175–183.
– [http://dx.doi.org/10.1016/S0029-5493\(99\)00219-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0029-5493(99)00219-8).
11. *Kushch V. I., Shmegeera S. V., Buryachenko V. A.* Interacting elliptic inclusions by the method of complex potentials // *Int. J. Solids Struct.* – 2005. – **42**, No. 20. – P. 5491–5512. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.035>.
12. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. – Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1987. – xiv+588 p.
13. *Nemat-Nasser S., Hori M.* Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials. – Amsterdam etc.: Elsevier, 1999. – 810 p.
14. *Povstenko Yu. Z.* Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1993. – **41**, No. 9. – P. 1499–1514. – [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90037-G](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90037-G).
15. *Sharma P., Ganti S.* Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano-inclusions incorporating surface/interface energies // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* – 2004. – **71**, No. 5. – P. 663–671. – <https://doi.org/10.1115/1.1781177>.
16. *Sharma P., Ganti S., Bhate N.* Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities // *Appl. Phys. Lett.* – 2003. – **82**, No. 4. – P. 535–537.
– <https://doi.org/10.1063/1.1539929>.
17. *Steigmann D. J., Ogden R. W.* Elastic surface – substrate interactions // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1999. – **455**, No. 1982. – P. 437–474.
– <https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0320>.
18. *Sulim G. T., Piskozub J. Z.* Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // *J. Eng. Math.* – 2008. – **61**, No. 2–4. – P. 315–337.
– <https://doi.org/10.1007/s10665-008-9225-3>.
19. *Sulym H., Pasternak Ia., Piskozub L., Piskozub Yo.* Longitudinal shear of a bi-material with frictional sliding contact in the interfacial crack // *J. Theor. Appl. Mech. (Poland)*. – 2015. – **54**, No. 2. – P. 529–539.
– <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.54.2.529>.
20. *Sulym H., Piskozub L., Piskozub Yo., Pasternak Ia.* Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. I. Single loading // *Acta Mechanica et Automatica*. – 2015. – **9**, No. 2. – P. 115–121.
– <https://doi.org/10.1515/ama-2015-0020>.
21. *Sulym H., Piskozub L., Piskozub Yo., Pasternak Ia.* Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. 2. Repeating and cyclic loading // *Acta Mechanica et Automatica*. – 2015. – **9**, No. 3. – P. 178–184. – <https://doi.org/10.1515/ama-2015-0030>.
22. *Wang J., Duan H. L., Huang Z. P., Karimhaloo B. L.* A scaling law for properties of nano-structured materials // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 2006. – **462**, No. 2069. – P. 1355–1363. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1637>.

23. Wang J., Karahaloo B. L., Duan H. L. Nano-mechanics or how to extend continuum mechanics to nano-scale // Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci. – 2007. – **55**, No. 2. – P. 133–140.
24. Wang Xu, Schiavone P. A mode III interface crack with surface strain gradient elasticity // J. Integral Equat. Appl. – 2016. – **28**, No. 1. – P. 123–148. – <https://doi.org/10.1216/JIE-2016-28-1-123>.

**ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА АНТИПЛОСКОЕ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОГО ЛЕНТОЧНОГО
МЕЖФАЗНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ**

На основе применения теории функций комплексного переменного и метода функций скачка предложена методика учета дополнительного влияния поверхностных напряжений в задаче для тонкого межфазного включения в биматериале. При этом предусмотрена возможность неидеального контакта между включением и матрицей, в частности контакта с поверхностным натяжением. Это значительно расширяет сферу применимости результатов моделирования в рамках RVE концепции микро- и макромеханики. Построена обобщенная модель тонкого включения с произвольными механическими свойствами. Расчет тестовых задач показал высокую и эффективность предложенного подхода. Получены расчеты поля напряжений при взаимодействии включения с сосредоточенной силой и винтовой дислокацией.

Ключевые слова: ленточное включение, поверхностное напряжение, функции скачка, биматериал.

**EFFECT OF SURFACE STRESSES ON THE ANTIPLANE STRESS-STRAIN
STATE OF THIN RIBBON-LIKE INTERPHASE INCLUSION**

Based on the application of the theory of functions of a complex variable and the method of jump functions, a method accounting the additional influence of surface stresses in the problem for a thin interphase inclusion in the bi-material is proposed. The possibility of imperfect contact between the inclusion and matrix, in particular, contact with surface tension, is provided. This significantly extends the applicability of the results of simulation within the framework of RVE-concept of micro- and macro-mechanics. A generalized model of a thin-walled inclusion with arbitrary mechanical properties is constructed. The calculation of test problems shows high accuracy and efficiency of the proposed approach. The stress field calculations at interaction of the inclusion with a concentrated force and a screw dislocation are obtained.

Key words: ribbon-like inclusion, surface stress, jump functions, bi-material.

¹ Укр. акад. друкарства, Львів,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів