УДК 539.3

Г. С. Кіт, Р. М. Андрійчук[✉]

# ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ ЗА ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ У СФЕРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

*Побудовано функції Буссінеска стаціонарних задач термопружності для півпростору з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за нульової температури або теплоізоляції на ній та дії тепловидільного термічного сферичного включення. Для побудови цих функцій використано термопружні потенціали переміщень у просторі з двома сферичними включеннями.*

***Ключові слова***: *функції Буссінеска, явні розв'язки, осесиметрична задача термопружності, півпростір, сферичне термічне включення.*

**Вступ.** Показники міцності крихких тіл у процесі нагрівання суттєво залежать від наявності дефектів структури, зокрема включень, в околі яких зазнають збурення температурне та термонапружене поля. Тому важливим є дослідити вплив включень на термонапружений стан тіл, зокрема коли включення розташовані поблизу межі тіла, яка зазнає теплової дії. Актуальність таких досліджень мотивована важливістю визначення показників напружено-деформованого стану твелів – тепловидільних елементів конструкцій ядерних енергетичних установок [1, 2, 7, 12]. У деяких типах установок використовують твели, виготовлені як матриці зі сферичними тепловидільними частинками [1, 9]. Для безпечного функціонування таких конструкцій важливо визначити рівні концентрації напружень у матриці залежно від віддалі мікротвела (включення) до межі твела, а також від відстані між мікротвелами всередині матриці [8].

Розподіл напружень у тілах із включеннями залежить від низки геометричних та фізичних властивостей включень і матриці, зокрема співвідношень між розмірами тіла та включень, форми та густини їх розташування у матриці, механічних і теплофізичних характеристик матеріалів. Близьке взаємне розташування включень ускладнює аналіз напруженого стану через велику кількість параметрів, які необхідно врахувати при розрахунках. Якщо пружні властивості матеріалів включень і матриці різняться лише коефіцієнтами теплопровідності та лінійного теплового розширення (КЛТР), то можна побудувати точні розв'язки відповідних задач термопружності і якісно оцінити розподіли термонапружень. У праці [6] включення, які мають однакові з тілом пружні властивості, але різні КЛТР, названо термічними. Вплив включення у формі сфероїда на напружений стан півпростору при сталій температурі розглянуто в роботі [4]. У [3] досліджено напруження у пружному просторі з осесиметричною системою сферичних включень. Вплив межі у взаємодії зі сферичним включенням у кубічному кристалі вивчали в роботі [10].

У цій статті побудовано функції Буссінеска задач термопружності для півпростору за наявності тепловидільного термічного сферичного включення. Межа півпростору є вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою за нульової температури або теплоізоляції.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо півпростір, віднесений до циліндричної системи координат $(r, \varphi, z)$ із початком на межі півпростору та віссю $Oz$, спрямованою уздовж зовнішньої нормалі. На віддалі $h$ від межі півпростору розташовано термічне сферичне включення радіуса $a$ з центром на осі $Oz$, яке виділяє тепло зі сталою питомою потужністю $q$. Межа півпростору є теплоізольованою або на ній забезпечується нульова

[✉] andriychukroman@gmail.com

температура. За таких умов тепловий та напружений стан півпростору з включенням підпадають під гіпотезу осьової симетрії. Позначимо властивості матеріалів включення і тіла, а також відповідні задані та шукані у них функції індексами 1 і 2 відповідно. Для визначення температури розв'яжемо рівняння теплопровідності [11]

$$\Delta t_1(r,z) = -\frac{q}{\lambda_1}, \quad \Delta t_2(r,z) = 0, \tag{1}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\lambda_1$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу включення.

Розв'язки рівнянь (1) отримаємо у вигляді [3]

$$t_1(r,z) = -\frac{q}{6\lambda_1}\left( R_1^2(r,z) + (-1)^k R_2^2(r,z) \right) + C_1^T,$$

$$t_2(r,z) = -C_2^T\left(\frac{1}{R_1(r,z)} + \frac{(-1)^k}{R_2(r,z)}\right),$$

$$R_{1,2}(r,z) = \sqrt{r^2 + (z \mp h)^2}, \tag{2}$$

де $C_1^T = qa^2\dfrac{2\lambda_1 + \lambda_2}{6\lambda_1\lambda_2}$, $C_2^T = -\dfrac{qa^3}{3\lambda_2}$, $k = 1$ відповідає випадкові нульової температури межі півпростору

$$t_2(r,z)\big|_{z=0} = 0,$$

а $k = 2$ – її теплоізоляції

$$\left.\frac{\partial t_2(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$$

Відповідні термонапруження у півпросторі з включенням шукатимемо за умов ідеального механічного контакту півпростору з включенням та заданих механічних крайових умов на межі півпростору $z = 0$, а саме:

$$\sigma_{zz}(r,0) = 0, \quad \sigma_{rz}(r,0) = 0 \tag{3}$$

у випадку вільної від силових навантажень межі,

$$u_r(r,0) = 0, \quad u_z(r,0) = 0 \tag{4}$$

при жорсткому її закріпленні,

$$u_z(r,0) = 0, \quad \sigma_{rz}(r,0) = 0 \tag{5}$$

для гладкого та

$$u_z(r,0) = 0, \quad \sigma_{rz}(r,0) = 0 \tag{6}$$

для гнучкого закріплень.

**2. Розв'язання задачі термопружності.** Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді сум

$$u(r,z) = \bar{u}(r,z) + \bar{\bar{u}}(r,z), \quad \sigma(r,z) = \bar{\sigma}(r,z) + \bar{\bar{\sigma}}(r,z), \tag{7}$$

де доданки $\bar{u}(r,z)$, $\bar{\sigma}(r,z)$ характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, а доданки $\bar{\bar{u}}(r,z)$, $\bar{\bar{\sigma}}(r,z)$ – переміщення і напруження у півпросторі $z \ge 0$, які забезпечують виконання умов (3)–(6). Розглянемо побудову вказаних складових розв'язку.

***2.1. Напружено-деформований стан безмежного тіла.*** Зумовлені сферичним включенням напруження і переміщення у безмежному тілі визначає термопружний потенціал переміщень $f_i(r,z)$, який задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta f_i(r,z) = mt_i(r,z), \quad m = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t, \quad i = 1,2,$$

де $t_i(r,z)$ задано виразами (2), $\alpha_t$ – КЛТР і $\nu$ – коефіцієнт Пуассона, які є однаковими для включення та півпростору. Частковими розв'язками цього рівняння є функції

$$f_1(r,z) = \frac{qa^2 m_1\left(R_1^2 + (-1)^k R_2^2\right)}{12\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{R_1^2 + (-1)^k R_2^2}{10a^2}\right),$$

$$f_2(r,z) = A_1\left(R_1 + (-1)^k R_2\right) - D_3\frac{R_2 + (-1)^k R_1}{R_1 R_2},$$

де $A_1 = qa^3\lambda^* m_2 / (6\lambda_1)$, $\lambda^* = \lambda_1 / \lambda_2$. Для визначення коефіцієнта $D_3$ використаємо умову $u_r^1(a,0) = u_r^2(a,0)$. Тоді

$$D_3 = \frac{qa^5}{6\lambda_1}\left(2\frac{1+5\lambda^*}{15}m_1 - \lambda^* m_2\right).$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень визначаємо за формулами [5]

$$\bar{u}_r = \frac{\partial f_i}{\partial r}, \qquad \bar{u}_z = \frac{\partial f_i}{\partial z},$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = 2G\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2} - mt_i\right), \qquad \bar{\sigma}_{rz} = 2G\frac{\partial^2 f_i}{\partial r \partial z},$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = 2G\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial r^2} - mt_i\right), \qquad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = 2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_i}{\partial r} - mt_i\right), \tag{8}$$

де $G$ – модуль зсуву. Підставивши вирази для $f_i$ у (8), отримаємо

$$\bar{u}_r^1 = \frac{qa^2 m_1 r}{6\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{R_1^2 + (-1)^k R_2^2}{5a^2}\right),$$

$$\bar{u}_r^2 = \frac{r}{R_1 + (-1)^k R_2}\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1} + \frac{D_3}{R_1^2 + (-1)^k R_2^2}\right),$$

$$\bar{u}_z^1 = \frac{qa^2 m_1 z}{6\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{R_1^2 + (-1)^k R_2^2}{5a^2}\right),$$

$$\bar{u}_z^2 = \frac{z}{R_1 + (-1)^k R_2}\left[\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1} + \frac{D_3}{R_1^2 + (-1)^k R_2^2}\right];$$

$$\bar{\sigma}_{rr}^1 = -\frac{2Gqa^2 m_1}{6\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{R_1^2 + (-1)^k R_2^2 + 2rz}{5a^2}\right),$$

$$\bar{\sigma}_{rr}^2 = -2G\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1(R_1 + (-1)^k R_2)}\left(1 - \frac{rz}{R_1^2 + (-1)^k R_2^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{D_3}{R_1^3 + (-1)^k R_2^3}\left(1 - \frac{3rz}{R_1^2 + (-1)^k R_2^2}\right)\right),$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^1 = -\frac{2Gqa^2 m_1}{3\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{R_1^2 + (-1)^k R_2^2 + r^2}{5a^2}\right),$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^2 = -2G\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1(R_1 + (-1)^k R_2)}\left(1 + \frac{z^2}{R_1^2 + (-1)^k R_2^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{D_3}{R_1^3 + (-1)^k R_2^3}\left(1 + \frac{z^2 - 2r^2}{R_1^2 + (-1)^k R_2^2}\right)\right),$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^1 = \frac{2Gqa^2 m_1 rz}{15\lambda_1},$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^2 = -\frac{2Grz}{R_1^3 + (-1)^k R_2^3}\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1} + \frac{3D_3}{R_1^2 + (-1)^k R_2^2}\right). \qquad (9)$$

Формули (9) за дзеркального відносно площини $z = 0$ розташування у просторі двох сферичних включень описують напружено-деформований стан півпростору, на межі якого підтримується нульова температура ($k = 1$) і закріплено гнучку нерозтяжну плівку ($u_r = 0$, $\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$). Також межа може бути теплоізольованою ($k = 2$) та гладко закріпленою ($u_z = 0$, $\sigma_{rz} = 0$).

***2.2. Визначення переміщень і напружень через функцію Буссінеска***. Переміщення $\bar{\bar{u}}(r,z)$ і напруження $\bar{\bar{\sigma}}(r,z)$ поза включенням визначимо за допомогою функції Буссінеска $F$, яку подамо у вигляді суми двох гармонічних функцій [6]:

$$F(r,z) = \varphi(r,z) + z\psi(r,z),$$

$$\bar{\bar{u}}_r = \frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \bar{\bar{u}}_z = \frac{\partial F}{\partial z} - 4(1-\nu)\psi,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = 2G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2\nu\frac{\partial \psi}{\partial z}\right), \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = 2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - 2\nu\frac{\partial \psi}{\partial z}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = 2G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right), \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{rz} = 2G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} - 2(1-\nu)\frac{\partial \psi}{\partial r}\right). \qquad (10)$$

Згідно з формулами (7)–(8), (10) запишемо переміщення і напруження у вигляді

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi + f_i + z\psi), \qquad u_z = -4(1-\nu)\psi + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi + f_i + z\psi),$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{zz} = -2(1-\nu)\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varphi + f_i) + z\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - mt_i,$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{rz} = -(1-2\nu)\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z}(\varphi + f_i) + z\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z},$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{rr} = -2\nu\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\varphi + f_i) + z\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - mt_i,$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{\varphi\varphi} = -2\nu\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + f_i) + \frac{z}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - mt_i. \qquad (11)$$

З використанням виразів (11) побудову функцій Буссінеска за відомим термопружним потенціалом переміщень $f(r, z)$ зводимо до визначення гармонічних функцій $\varphi$ і $\psi$ у півпросторі. Запишемо ці функції для різних крайових умов.

*Нульова температура на вільній межі:*

$$\varphi(r, z) = 2(1-\nu)(A_1 + D_3 h) \ln\left(R_2(r, z) + z + h\right) - \frac{D_3 h}{R_2(r, z)},$$

$$\psi(r, z) = \frac{A_1 h}{R_2(r, z)} + \frac{D_3 h(z+h)}{R_2^3(r, z)}. \tag{12}$$

*Нульова температура на жорстко закріпленій межі:*

$$\varphi(r, z) = 0, \quad \psi(r, z) = \frac{A_1 h}{(3-4\nu) R_2(r, z)} + \frac{2 D_3 h(z+h)}{R_2^3(r, z)}. \tag{13}$$

*Нульова температура на гладко закріпленій межі:*

$$\varphi(r, z) = 2 A_1 h \ln\left(R_2(r, z) + z + h\right) - \frac{2 D_3 h}{R_2(r, z)},$$

$$\psi(r, z) = 0. \tag{14}$$

*Теплоізольована вільна межа:*

$$\varphi(r, z) = -2 A_1 (1-2\nu) \ln\left(R_2(r, z) + z + h\right) + \frac{D_3 h}{R_2(r, z)},$$

$$\psi(r, z) = -2 A_1 \left( \ln\left(R_2(r, z) + z + h\right) - \frac{h}{R_2(r, z)} \right). \tag{15}$$

*Теплоізольована жорстко закріплена межа:*

$$\varphi(r, z) = 2 A_1 z \ln\left(R_2(r, z) + z + h\right) - \frac{D_3 h}{R_2(r, z)},$$

$$\psi(r, z) = \frac{2 A_1}{3-4\nu} \left( z \ln\left(R_2(r, z) + z + h\right) - \frac{2h}{R_2(r, z)} \right) - \frac{2 D_3 h(z+h)}{R_2^3(r, z)}. \tag{16}$$

*Теплоізольована гнучко закріплена межа:*

$$\varphi(r, z) = 2 A_1 \left( z \ln\left(R_2(r, z) + z + h\right) + \frac{h}{R_2(r, z)} \right),$$

$$\psi(r, z) = 0. \tag{17}$$

Напружено-деформований стан півпростору визначаємо за формулами (7)–(10), (12)–(17).

**Висновки.** Побудовано функції Буссінеска стаціонарних задач теплопровідності й термопружності для півпросторів із вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за нульової температури або теплоізоляції на ній за дії тепловидільного термічного сферичного включення. Із застосуванням принципу суперпозиції їх можна використати для розв'язання задачі про термопружну рівновагу півпростору з $N$ термічними сферичними тепловидільними включеннями.

Показано, що формулами для температури, переміщень і напружень при дзеркальному розташуванні відносно площини $z = 0$ двох термічних включень описується також напружено-деформований стан півпростору, межа якого є теплоізольованою і гладко закріпленою або за підтримання на ній нульової температури і підкріплення гнучкою нерозтяжною плівкою.

1. *Власов Н. М., Федик И. И.* Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. – Москва: ЦНИИатоминформ, 2001. – 205 с.
2. *Галанин А. Д.* Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах. – Москва: Энергоатомиздат, 1990. – 536 с.
3. *Кіт Г. С., Черняк М. С.* Напружений стан тіла з тепловидільними сферичними включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 4. – С. 82–89.
   Те саме: *Kit H. S., Chernyak M. S.* Stress state of a body with heat-generating spherical inclusions // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 5. – P. 635–646.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-012-1089-4
4. *Колесов В. С., Власов Н. М., Тисовский Л. О., Шацкий И. П.* Напряженно-деформированное состояние упругого полупространства со сфероидальным термическим включением // Прикл. механика. – 1992. – **28,** № 7. – С. 24–33.
   Те саме: *Kolesov V. S., Vlasov N. M., Tisovskii L. O., Shatskii I. P.* The stress-deformation state of an elastic half-space with a spheroidal thermal inclusion // Int. Appl. Mech. – 1992. – **28**, No. 7. – P. 426–434 (1992).
   – https://doi.org/10.1007/BF00847125.
5. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
   Те саме: *Melan E., Parkus H.* Warmespannungen Infolge stationarer Temperaturfelder. – Wien: Springer, 1953. – 114 s.
6. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Физматгиз, 1958. – 168 с.
7. *Самойлов А. Г.* Тепловыделяющие элементы ядерных реакторов. – Москва: Энергоатомиздат, 1985. – 219 с.
8. *Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. – Москва: Энергоатомиздат, 1985. – 280 с.
9. *Черников А. С., Пермяков Л. Н., Федик И. И., Гаврилин С. С., Курбаков С. Д.* Твэлы на основе сферических топливных частиц с защитным покрытием для реакторов повышенной безопасности // Атомная энергия. – 1999. – **87**, № 6. – С. 451–462.
10. *Chiang C. R.* Thermal mismatch stress of a spherical inclusion in a cubic crystal // *Int J. Fract.* – 2006. – **139**. – P. 313–317.
    – https://doi.org/10.1007/s10704-006-8377-2.
11. *Hetnarski R. B., Eslami M. R.* Thermal stresses – Advanced theory and applications // Solid Mechanics and Its Applications / G. M. L. Gladwell (ed.). – Vol. 158. – New York: Springer, 2009. – xxxii+559 p.
12. *Matthews J. R.* Thermal stress in a finite heat generating cylinder // Nucl. Eng. Design. – 1970. – **12**, No. 3. – P. 291–296.
    – https://doi.org/10.1016/0029-5493(70)90046-4.


## THERMOELASTIC STATE OF A HALF-SPACE DUE TO THE HEAT GENERATION WITHIN A SPHERICAL DOMAIN


*The Boussinesq functions are constructed for the stationary thermoelasticity problems in a half-space with a heat-generating thermal spherical inclusion. The limiting plane of the half-space is free of force loadings, rigidly or flexibly clamped, or under sliding support and kept under the zero-temperature or thermally insolated. For constructing these functions, the thermoelastic displacement potentials for a space with two spherical inclusions are implemented.*



***Keywords:*** *Boussinesq functions, explicit solutions, axisymmetric thermoelasticity problem, half-space, spherical thermal inclusion.*



Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів



Одержано
21.10.19