

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНОСУ В СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ ТА МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ

*Розглянуто способи аналітичного визначення режимних параметрів процесу руху газу в основних технологічних об'єктах газотранспортних систем та розроблення на їх основі математичних моделей газотранспортних систем для розрахунку параметрів роботи підземних сховищ газу. Враховуючи аналогію між процесами гідрогазодинаміки та гемодинаміки, отримані результати поширено для моделювання руху крові у великих судинах та м'яких тканинах живих організмів.*

**Ключові слова:** математичне моделювання, процеси гідрогазодинаміки, гемодинаміка, газотранспортна система, підземні сховища газу.

**Вступ.** Адаптивність і точність математичних моделей опису природних та технічних процесів залежать в основному від характеру вхідних даних та адекватності методів розв'язування відповідних задач математичної фізики [5, 8, 9, 20, 21]. Для уточнення моделей враховують додаткові параметри та фактори процесів або застосовують точніші модельні припущення. Основними вимогами до математичних моделей оперативного керування процесами є адаптивність та час розв'язування задач, сформульованих у рамках моделі [17, 18, 20]. Особливостями таких задач є те, що вхідна інформація часто є заданою наборами дискретних значень, відомих з невисокою точністю, а параметрами процесів є, як правило, номінальні характеристики, які вимагають їх уточнення в ході обчислювального процесу.

Однією з проблем вказаного типу є визначення параметрів транспортування газу газотранспортними системами (ГТС). ГТС України за складністю і потужністю є другою в Європі і третьою в світі за об'ємами транзиту газу. ГТС містить 12 підземних газосховищ з активним об'ємом понад 30 млрд. м<sup>3</sup> із тиском 685 ГПа. Загальна довжина газопроводів складає понад 35 тис. км. Трубопроводи мають різний діаметр (від 100 до 1420 мм) та довжину (від кількох метрів до ста і більше кілометрів) і пролягають у різних природних середовищах (земля, вода, повітря) з доволі варіативним рельєфом пролягання траси. Математичне моделювання таких систем ускладнено ще й тим, що для багатьох технологічних об'єктів (ТО) ГТС наявні лише емпіричні або напівемпіричні моделі. Варто також зауважити, що для розрахунку робочих параметрів складних систем необхідно будувати математичну модель всієї системи у комплексі, а не лише окремих її елементів, оскільки при декомпозиції системи на переході від одного ТО до наступного внаслідок невизначеності і неточності вхідної інформації відбувається значна втрата точності розрахунку.

У роботі проаналізовано математичні моделі процесу руху газу в трубопроводах та пористих середовищах, а також процесу руху крові у судинах та в м'яких тканинах живих організмів.

**1. Нестационарна неізотермічна математична модель процесу руху газу в магістральних трубопроводах.** При розрахунку параметрів роботи газотранспортних мереж внаслідок зміни режимів їхньої роботи процес руху газу слід вважати нестационарним. Як правило, час переходу потоку газу в усталений режим у трубопроводах високого та середнього тиску є достатньо великим (порядку кількох годин).

З достатньою для практики точністю рух газу в трубопроводі описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних [7, 14, 16]

---

✉ danylo794@gmail.com

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho + \rho v^2) &= -\rho \left( \frac{\lambda v |v|}{2D} + g \frac{dh}{dx} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho v \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \right) &= \frac{4K}{D} (T_s - T) - \rho v g \frac{dh}{dx},\end{aligned}\quad (1)$$

де  $\rho$ ,  $v$ ,  $p$  – відповідно густина, швидкість руху і тиск газу;  $K$  – коефіцієнт теплопередачі від труби до ґрунту;  $\lambda$  – коефіцієнт гідравлічного опору;  $T$ ,  $T_s$  – відповідно температури газу та ґрунту;  $h = h(x)$  – функція, яка описує контур траси залягання труби;  $t$  – час;  $x \in [0, L]$  – біжуча координата,  $L$  – довжина трубопроводу;  $D$  – внутрішній діаметр труби;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $E$  – повна енергія одиниці маси, що визначається як

$$E = i - \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2},$$

де  $i$  – внутрішня енергія газу, для якої

$$\begin{aligned}di &= \frac{\partial i}{\partial T} dT + \frac{\partial i}{\partial P} dP = C_p dT + \left( \frac{1}{\rho} - T \left( \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{\rho} \right)_{p=\text{const}} \right) dp, \\ C_p &= \left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_{p=\text{const}}.\end{aligned}$$

Для замикання системи рівнянь використовується рівняння стану газу

$$p = \rho z R T.$$

Тут  $R$  – газова стала,  $z$  – коефіцієнт стисливості газу.

Для стаціонарних режимів без урахування швидкісного напору сформульована задача описується рівняннями

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\sqrt{\pi} \lambda M^2}{4 \rho S^{5,2}} - \rho g \sin \varphi, \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\lambda K D}{C_p M} (T_s - T) + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi} \lambda M^2}{4 \rho C_p S^{5,2}} \left( \frac{1}{\rho} - T \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right)_{p=\text{const}} \right) - g \rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{\rho} \right).\end{aligned}$$

Тут  $\varphi$  – кут нахилу труби до горизонту,  $M = S \rho V = \text{const}$ ,  $S = \pi D^2 / 4$ .

**1.1. Ізотермічна математична модель нестационарного руху газу.** Як правило, для обчислення режимних параметрів процесу руху газу в трубопроводах обмежуються ізотермічним випадком, оскільки температурний режим несуттєво змінюється в часі. Тоді система (1) записується таким чином:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda v^2}{2D} \rho + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Тут  $\alpha$  – коефіцієнт Кориоліса, який відповідає за характер руху газу в трубопроводі Кориоліса (для ламінарного потоку  $\alpha = 2$ , а для турбулентного

–  $\alpha = 1.1$ );  $c$  – швидкість звуку в газі, а коефіцієнт стисливості  $z$  обчислюють за емпіричною формулою

$$z = \frac{1}{1 + \gamma p},$$

де  $\gamma = (24 - 0.21T)0.101302 \cdot 10^{-9}$ ,  $T$  – температура газу за шкалою Цельсія.

Система рівнянь (2) є нелінійною. Лінеаризовані за швидкістю системи, отримані аналогічно до (2), справджуються для горизонтальних трубопроводів у певних діапазонах зміни швидкості вздовж трубопроводу. У трубах великого діаметру при значних об'ємах переносу газу необхідно враховувати зміну його кінетичної енергії, що залишалось поза увагою у більшості досліджень за цією тематикою. Опишемо спосіб лінеаризації, який дає можливість уточнити нелінійну модель і побудувати ітераційний процес розв'язку системи [7, 10]. Спочатку криву  $f(v) = v^2$  на вибраному інтервалі  $v \in [v_1, v_2]$  апроксимуємо хордою та дотичною до неї. Рівняння хорди і дотичної, що проходять через точки  $(v_1, f(v_1))$ ,  $(v_2, f(v_2))$ , мають вигляд  $\varphi_j(v) = a_{0j}v - b_{0j}$ , де  $j = 1$  відповідає хорді, а  $j = 2$  – дотичній. Тут  $a_{01} = a_{02} = v_1 + v_2$ ,  $b_{01} = v_1v_2$  та  $b_{02} = 0.5(v_1 + v_2)^2$ . Криву  $f(v)$  будемо апроксимувати прямою  $f_3(v)$ , яка лежить посередині між  $f_1(v)$  і  $f_2(v)$ . При такій лінеаризації  $a_v = v_1 + v_2$  і  $b_v = -v_1v_2 - (v_2 - v_1)^2/8$ , тобто

$$f(v) \approx (v_1 + v_2)v - v_1v_2 - \frac{1}{8}(v_2 - v_1)^2.$$

Аналіз експериментальних даних показав, що процес руху газу в трубопроводі залежить від відношення  $p/z$ , тобто при розв'язанні вихідної системи необхідно враховувати залежність  $z = z(p)$ . У цьому випадку поряд із нелінійністю за функцією швидкості враховують нелінійність за функцією тиску у вигляді  $p(1 + \gamma p)$ . Як і у випадку лінеаризації системи (2) за швидкістю, покладемо

$$p(1 + \gamma p) \approx a_p + b_p p.$$

Тут  $p \in [p_1, p_2]$ , де  $p_1$  та  $p_2$  – межі зміни тиску, які є відомими.

Якщо в системі (2) використати розглянуті апроксимації, то перше рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} + b_1 p + b_2 \omega + b_3 \frac{\partial \omega}{\partial x} = -b_0 \frac{a_p}{RT} + \varphi(p, v),$$

де  $\omega = \rho v$  – масова швидкість,  $b_0 = \lambda a_v / (2D) + g \partial h / \partial x$ ,  $b_1 = b_0 b_p / (RT)$ ,  $b_2 = \lambda d_v / (2D)$ ,  $b_3 = \alpha d_v / 2$ , а

$$\begin{aligned} \varphi(p, v) = & v \frac{\alpha b_v}{2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\alpha p}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v^2 - a_v - b_v v) - \\ & - \frac{\lambda p}{2D} (v^2 - a_v - b_v v) - \frac{b_0}{RT} (p(1 + \gamma p) - a_p - b_p p) \end{aligned}$$

– нев'язка, що виникає за рахунок лінеаризації системи. З урахуванням цього вихідну систему рівнянь (2) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} + b_1 p + b_2 \omega + b_3 \frac{\partial \omega}{\partial x} = \varphi(p, v),$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0,$$

Відомо [20], що ітераційні схеми є стійкими й швидкозбіжними, коли нульове наближення (лінеаризований варіант) є близьким до шуканого розв'язку. Як показують числові експерименти, лінеаризований варіант системи забезпечує понад 90% точності розв'язку задачі в нелінійному формулюванні. Тому розв'язок лінеаризованого варіанта вихідної задачі доцільно вибирати за початкове наближення ітераційного процесу.

**1.2. Рух газу в трубопроводі при сталих граничних умовах на функцію тиску та наявності компресорних станцій і відводів уздовж траси.** Моделювання процесу руху газу в трубопроводі за наявності компресорних станцій (КС) та відводів газу можна здійснити двома способами: А) розбити трубопровід на проміжки між КС та відводами або Б) змодельовати їх наявність за допомогою узагальнених функцій. Для великих систем використання підходу А значно збільшує розмірність системи. Тому розглянемо використання підходу Б.

Для спрощення викладок розглянемо нестационарний рух газу в горизонтальних трубопроводах за наявності відборів та КС, який можна описати лінеаризованою системою диференціальних рівнянь у частинних похідних [10]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + a\omega - bp = \Theta(x, t), \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \Psi(x, t). \quad (3)$$

Тут  $a = \lambda(v_1 + v_2) / (2D)$ ,  $b = \lambda v_1 v_2 / (2DzqRT)$ ; функція

$$\Theta(x, t) = \sum_{m=1}^I p_{s,m} \delta(x - x_m) (\eta(t - t_{1,m}) - \eta(t - t_{2,m}))$$

характеризує зміну тиску газу при проходженні його через КС, що знаходяться на відстанях  $x_j$  від початку трубопроводу з часом дії від  $t_{1,m}$  до  $t_{2,m}$ ,  $m = 1, \dots, I$ ; функція

$$\Psi(x, t) = \sum_{j=1}^J \frac{\omega_j}{F} \delta(x - x_j) (\eta(t - t_{1,j}) - \eta(t - t_{2,j}))$$

характеризує масові відводи газу  $\omega_j$ , розташовані на віддальх  $x_j$  від початку трубопроводу, з часом дії від  $t_{1,j}$  до  $t_{2,j}$ ,  $j = 1, \dots, J$ ;  $\delta(x_j)$  – дельта-функція Дірака,  $\eta(t - t_j)$  – одинична функція Гевісайда.

Систему (3) можна розв'язувати при різних початково-крайових умовах. Будемо вважати, що задано значення тиску на початку  $p_0$  та на кінці  $p_k$  трубопроводу, а за вихідний стаціонарний стан будемо брати той, що випливає з системи (3):

$$p_s(x) = \frac{1}{1 - e^{-bL}} \left( p_0 - p_k e^{-bL} - (p_0 - p_k) e^{-b(L-x)} \right).$$

При заданих початкових та крайових умовах розв'язок сформульованої початково-крайової задачі знаходиться із застосуванням до системи (3) перетворення Лапласа – Карсона і має вигляд

$$p(x, t) = p_s(x) + p_1(x, t) - p_2(x, t). \quad (4)$$

Тут

$$p_1(x, t) = e^{-\frac{b}{2}(L-x)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( (p_0 - p_{0,z}) e^{\frac{b}{2}L} + \right. \\ \left. + \left( \mu \left( \frac{2nL + x}{c}, t \right) - \mu \left( \frac{2nL + 2L - x}{c}, t \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + (p_k - p_{k,z}) \left( \mu \left( \frac{2nL + L - x}{c}, t \right) - \mu \left( \frac{2nL + L + x}{c}, t \right) \right), \\
p_2(x, t) &= \sum_{m=1}^I p_{s,m} (\varphi_1(x, x_m, t - t_{1,m}) - \varphi_1(x, x_m, t - t_{2,m})) - \\
& - \sum_{j=1}^J \frac{\omega_j}{F} (\varphi_2(x, x_j, t - t_{1,j}) - \varphi_2(x, x_j, t - t_{2,j})), \\
\mu(\tau, t) &= \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ e^{-\theta\tau} + \sigma\tau \int_{\tau}^t e^{-\theta\xi} \frac{I_1(\sigma\sqrt{\xi^2 - \tau^2})}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}} d\xi, & t > \tau; \end{cases} \\
\varphi_1(x, x_m, t) &= \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}(x-x_m)} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} \varphi_{1,n}^-(x, x_m, t), & 0 \leq x \leq x_m, \\ \varphi_{1,n}^+(x, x_m, t), & x_m \leq x \leq L; \end{cases} \\
\varphi_2(x, x_j, t) &= \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}(x-x_j)} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} \varphi_{2,n}^-(x, x_j, t), & 0 \leq x \leq x_j, \\ \varphi_{2,n}^+(x, x_j, t), & x_j \leq x \leq L; \end{cases} \\
\varphi_{1,n}^-(x, x_m, t) &= \eta_1 \left( \frac{2nL + 2L + x - x_m}{c}, t \right) - \eta_2 \left( \frac{2nL + x + x_m}{c}, t \right) \\
& - \eta_1 \left( \frac{2nL + 2L - x + x_m}{c}, t \right) + \eta_2 \left( \frac{2nL - x + x_m}{c}, t \right), \\
\varphi_{1,n}^+(x, x_m, t) &= \eta_1 \left( \frac{2nL + x - x_m}{c}, t \right) - \eta_2 \left( \frac{2nL + x + x_m}{c}, t \right) - \\
& - \eta_1 \left( \frac{2nL + 2L - x - x_m}{c}, t \right) + \eta_2 \left( \frac{2nL + 2L - x + x_m}{c}, t \right), \\
\varphi_{2,n}^-(x, x_j, t) &= \varsigma \left( \frac{2nL + 2L - x - x_j}{c}, t \right) + \varsigma \left( \frac{2nL + x + x_j}{c}, t \right) - \\
& - \varsigma \left( \frac{2nL + 2L + x - x_j}{c}, t \right) - \varsigma \left( \frac{2nL - x + x_j}{c}, t \right), \\
\varphi_{2,n}^+(x, x_j, t) &= \varsigma \left( \frac{2nL + 2L - x - x_j}{c}, t \right) + \varsigma \left( \frac{2nL + x + x_j}{c}, t \right) - \\
& - \varsigma \left( \frac{2nL + x - x_j}{c}, t \right) - \varsigma \left( \frac{2nL + 2L - x + x_j}{c}, t \right), \\
\eta_w(\tau, t) &= (-1)^w \mu(\tau, t) + \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ \frac{bc}{2} \int_{\tau}^t e^{-\theta\xi} I_0(\sigma\sqrt{\xi^2 - \tau^2}) d\xi, & t > \tau; \end{cases} \quad w = 1, 2,
\end{aligned}$$

$$\zeta(\tau, t) = \mu(\tau, t) + \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ ce^{-\theta t} I_0(\sigma \sqrt{t^2 - \tau^2}) \\ + ac \int_{\tau}^t e^{-\theta \xi} I_0(\sigma \sqrt{\xi^2 - \tau^2}) d\xi, & t > \tau; \end{cases}$$

$$\theta = \frac{a}{2}, \quad \sigma = \sqrt{\theta^2 - b},$$

$I_j(x)$  – модифіковані функції Бесселя першого роду порядку  $j$ . Доданок  $p_1(x, t)$  у формулі (4) відповідає за збурення тиску вздовж трубопроводу, коли тиск на його початку змінюється від  $p_0$  у вихідному стані до значення  $p_{0,z}$  у новому стаціонарі, а на кінці – від  $p_k$  до  $p_{k,z}$  відповідно.

**1.3. Обчислювальний експеримент.** Апробацію моделі руху газу в трубопроводі за наявності КС та відводів виконано для таких параметрів: довжина трубопроводу – 100 км; діаметр – 1.388 м, вхідний та вихідний тиски – відповідно 70 атм та 50 атм, коефіцієнт гідравлічного опору – 0.01, швидкість звуку в газі – 420 м/с, коефіцієнт стисливості – 0.9, температура газу – 300°К. На віддалі 50 км від початку трубопроводу розташовано компресорну станцію (КС) з депресією тиску, яку можна вмикати та вимикати в певні моменти часу.

На рис. 1 наведено залежності тиску від часу, коли КС увімкнено через 10 с після початку розрахунку і вимкнено через 2800 с. Крива 2 показує значення тиску у вихідному стані, крива 1 – значення тиску в новому стаціонарному стані, крива 3 – значення тиску у перехідному режимі. Аналогічну поведінку мають значення тисків і в інших точках трубопроводу. З отриманих результатів можна зробити висновок, що запропонована модель достатньо добре моделює процес руху газу в системі трубопровід – КС – трубопровід.

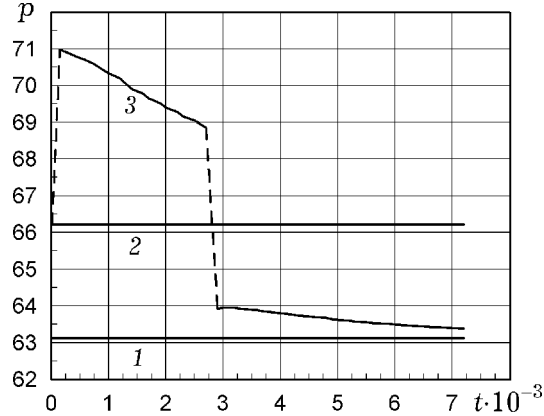


Рис. 1. Залежність тиску від часу на віддалі 50 км від початку трубопроводу, коли КС увімкнено через 10 с після початку розрахунку і вимкнено через 2800 с.

**2. Математичне моделювання складних ГТС.** Основними технологічними об'єктами ГТС є трубопроводи і КС, поєднані в лінійні структури або закільцьовані у вигляді замкнених контурів. Математичну модель процесу руху газу в трубопроводі наведено вище. Математичні моделі компресорної системи мають складну структуру. Для побудови математичної моделі ГТС компресорну модель можна задавати декількома варіантами параметрів: значеннями тисків на вході та виході КС, витратою газу, коефіцієнтом стиску газу  $\epsilon$ . У реальних ГТС є значна кількість закільцьованих структур. Шуканими величинами виступають значення тиску у вузлових точках та витрати газу по кожному з ребер кільця. Знаходження цих величин здійснювалося з використанням ітераційних методів, що спричинює певні ускладнення, зокрема у тому, що напрями руху газу в кожному з ребер потрібно задавати на початку розрахунку. Це приводить до напрацювання великої кількості можливих варіантів, що суттєво збільшує час обчислень та негативно впливає на точність розрахунку.

Розглянемо підхід, який дає можливість уникнути вказаних проблем. Використовуючи другий закон Кірхгофа, побудуємо контурні рівняння модельної системи (рис. 2) [5, 18] та здійснимо їх апробацію. На рис. 2 стрілками позначено початковий напрям руху газу,  $Q$  – об'ємні витрати надходження та відводу газу вздовж трубопроводів та у вузлах,  $q_j$  – об'ємні витрати газу у відповідних трубопроводах, мітками  $||$  позначено КС із коефіцієнтами стиску  $\varepsilon_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ,  $p_{ij}$  – значення тисків у відповідних точках.

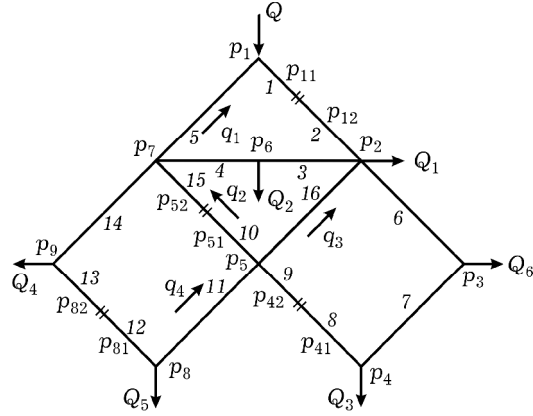


Рис. 2. Розрахункова схема модельної задачі.

На основі закону Кірхгофа для першого, другого, третього та четвертого контурів отримуємо відповідні контурні рівняння:

$$\begin{aligned}
 & p_{11}^2 e^{b_1} (\varepsilon_1^2 - 1) + p_1^2 (1 - e^{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}) = \\
 & = a_1 e^{b_1} |Q' + q_1| (Q' + q_1) + a_2 e^{b_1 + b_2} |Q' + q_1| (Q' + q_1) + \\
 & + a_3 e^{b_1 + b_2 + b_3} |Q' + q_1 - q_2| (Q' + q_1 - q_2) + \\
 & + a_4 e^{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} |q_1 - q_2| (q_1 - q_2) + \\
 & + a_5 e^{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5} |Q'' - q_2| (Q'' - q_2), \\
 & p_{51}^2 e^{b_{10} + b_{16}} (\varepsilon_5^2 - 1) + p_2^2 (1 - e^{b_3 + b_4 + b_{10} + b_{15} + b_{16}}) = \\
 & = a_3 e^{b_3 + b_4 + b_{10} + b_{15} + b_{16}} |q_2 - q_1 - Q_2| (q_2 - q_1 - Q_2) + \\
 & + a_4 e^{b_4 + b_{10} + b_{15} + b_{16}} |q_2 - q_1| (q_2 - q_1) + \\
 & + a_{15} e^{b_{10} + b_{15} + b_{16}} |q_2 + q_4| (q_2 + q_4) + \\
 & + a_{10} e^{b_{10} + b_{16}} |q_2 + q_4| (q_2 + q_4) + a_{16} e^{b_{16}} |q_2| q_2, \\
 & p_{41}^2 e^{b_6 + b_7 + b_8} (\varepsilon_4^2 - 1) + p_2^2 (1 - e^{b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10}}) = \\
 & = a_{16} e^{b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{16}} |q_3 - q_2| (q_3 - q_2) + \\
 & + a_9 e^{b_6 + b_7 + b_8 + b_9} |q_3| q_3 + a_7 e^{b_6 + b_7} |Q_5 + q_3| (Q_5 + q_3) + \\
 & + a_6 e^{b_6} |Q_6 + Q_3 + q_3| (Q_6 + Q_3 + q_3), \\
 & p_{51}^2 e^{b_{10}} (\varepsilon_5^2 - 1) + p_{82}^2 e^{b_{10} + b_{13} + b_{14} + b_{15}} (\varepsilon_8^2 - 1) + \\
 & + p_5^2 (1 - e^{b_{10} + b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15}}) = \\
 & = a_{11} e^{b_{10} + b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15}} |q_4| q_4 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{12}e^{b_{10}+b_{12}+b_{13}+b_{14}+b_{15}} |Q_5 + q_4|(Q_5 + q_4) + \\
& + a_{13}e^{b_{10}+b_{13}+b_{14}+b_{15}} |Q_5 + q_4|(Q_5 + q_4) + \\
& + a_{14}e^{b_{10}+b_{14}+b_{15}} |Q_5 + Q_4 + q_4|(Q_5 + Q_4 + q_4) + \\
& + a_{10}e^{b_{10}} |q_2 + q_4|(q_2 + q_4) + \\
& + a_{15}e^{b_{10}+b_{15}} |q_2 + q_4|(q_2 + q_4). \tag{5}
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
p_2^2 &= p_1^2 e^{b_3+b_4+b_5} + a_3 e^{b_3} |Q_2 + q_1 - q_2|(Q_2 + q_1 - q_2) + \\
& + a_4 e^{b_4+b_3} |q_1 - q_2|(q_1 - q_2) + a_5 e^{b_3+b_4+b_5} |Q'' - q_1|(Q'' - q_1), \\
p_{51}^2 &= p_2^2 e^{-b_{10}-b_{16}} + a_{10} |q_2 + q_4|(q_2 + q_4) + a_{16} e^{-b_{10}} |q_2|q_2, \\
a_i &= \lambda_i z_i \frac{RT_i}{D_i} \left( \frac{M_i}{S_i} \right)^2, \quad b_i = \frac{2g\Delta h_i}{z_i RT_i}, \quad S_i = \frac{\pi D_i^2}{4}.
\end{aligned}$$

Систему нелінійних алгебричних рівнянь (5) розв'язано ітераційним методом відносно вузлових значень тисків та витрат газу по кожному з ребер. Такий підхід дає можливість визначити значення режимних параметрів та напрям руху газу.

**3. Математична модель роботи підземних сховищ газу.** Відомо, що товщини пластів підземних сховищ газу (ПСГ) є невеликими (декілька десятків метрів) порівняно з площею горизонтального поперечного перерізу (декілька десятків квадратних кілометрів). У зв'язку з цим розподіл тиску газу в них описується нелінійним диференціальним рівнянням фільтрації [1, 5, 16, 18, 21]

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{k_{x_1} h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{k_{x_2} h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x_2} \right) = 2\alpha_n m h \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{z} \right) + 4m h q p_s,$$

сформульованим у тривимірній області  $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^3$ , яку займає пласт ПСГ. На  $\Omega_3$  задано множину точок (свердловин) із координатами  $\{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , та значення тисків  $p(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, t_0)$  у цих точках в момент часу  $t_0$ . Тут  $k_u$  – проникність пласту в напрямі  $u = x_1, x_2$ ,  $\mu$  – динамічна в'язкість газу,  $z$  – коефіцієнт стисливості,  $h$  – товщина пласту,  $m$  – пористість пласту,  $\alpha_n$  – коефіцієнт газонасиченості,  $q$  – густина відбору,  $p_s$  – значення атмосферного тиску в звичайних умовах ( $p_s = 0.1033$  МПа,  $T_A = 293$  К). Якщо розглядати розподіл тиску в області свердловини, то рівняння фільтрації доцільно записати в циліндричних координатах. Якщо припустити, що крайові умови не залежать від вертикальної координати, то для опису розподілу тиску можна використати полярні координати. Тоді рівняння фільтрації газу набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{D}{p_0} \frac{\partial P}{\partial \tau},$$

де  $P = p^2$ ,  $r$  – радіус-вектор, проведений із центра свердловини,



$$\tau = \frac{p_2}{p_0} t + \left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right) \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}, \quad \beta = \frac{p_0 k \lambda_m^2}{2m\mu},$$

$p_0, p_2$  – початкове значення тиску та значення тиску на границі області. Рівняння фільтрації є нелінійним за тиском. Для розв'язування рівнянь такого типу застосовують метод лінеаризації з подальшим використанням відокремлення змінних або числові методи.

Розподіли пластового та вибійного тисків у вибійній зоні пов'язані співвідношенням

$$p_{pl}^2 - p_v^2 = Aq + Bq^2, \quad (6)$$

де

$$A = \frac{A_1}{k_{pl}} + \frac{A_2}{k_v}, \quad B = \frac{B_1}{k_{pl}^{3/2}} + \frac{B_2}{k_v^{3/2}},$$

$$A_1 = \frac{1}{h\pi} \mu p_0 \ln \frac{R_k}{R_c}, \quad A_2 = \frac{\mu p_0}{\pi h_x} \ln \frac{2R_c h}{2r_k \ell_k n_0 h_x + \Theta(n_0)(r_1^2 - r_2^2)},$$

$$B_1 = \frac{6}{10^5} \frac{\rho_0 p_0 d^2}{\pi^2 h^2 m} \left( \frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_k} \right),$$

$$B_2 = \frac{\rho_0 p_0 d^2}{\pi^2 h_x m} \left( \frac{1}{2r_k \ell_k n_0 h_x + \Theta(n_0)(r_1^2 - r_2^2)} - \frac{1}{2R_c h} \right),$$

$\rho_0, p_0, q_0$  – значення густини, тиску та об'ємного переносу при атмосферних (нормальних) умовах;  $m$  – пористість пласту;  $d$  – діаметр зерен породи;  $h$  – потужність пласту;  $k$  – проникність пласту;  $\mu$  – динамічна в'язкість;  $h_x$  – висота перфорації від дна свердловини,  $n_0$  – густина перфорації;  $r_1, r_2$  – радіуси обсадної колони (внутрішній) та кільця НКТ (зовнішній) відповідно,  $r_k, \ell_k$  – радіус та довжина перфораційного каналу,  $R_c$  – радіус свердловини (внутрішній контур),  $R_k$  – радіус контуру живлення (зовнішній контур) за Лейбензоном. Площа живлення в такому випадку обмежується поверхнею циліндра радіуса  $R_k$  і висоти  $h_x$ . Функцію  $\Theta(n_0)$  визначають експериментальним шляхом і вона є рівною нулеві при  $n_0 = 0$ .

Виконуються такі рівняння зв'язку:

– вибійного тиску  $p_v$  з гирловим  $p_g$

$$p_v^2 e^{-b} - p_g^2 = a_r q^2, \quad (7)$$

– гирлового тиску  $p_g$  з тиском на виході з обв'язки свердловини  $p_o$

$$p_g^2 - p_o^2 = a_o q^2, \quad (8)$$

– тиску на виході з обв'язки свердловини з тиском на вході в ГЗП  $p_{gzp}$

$$p_o^2 - p_{gzp}^2 = a_s q^2. \quad (9)$$

Сумування рівнянь (7)–(9) приводить до такого нелінійного рівняння відносно дебіту свердловини  $q$ :

$$p_{pl}^2 - p_{gzp}^2 e^b = Aq + (B + (a_s + a_o + a_r) e^b) q^2. \quad (10)$$

Тут

$$a_o = \xi \frac{zRT}{S^2}, \quad a_r = \lambda z L_r \frac{RT}{D} \left( \frac{\rho_0}{S} \right)^2 \frac{1 - e^{-b}}{b}, \quad a_s = \lambda z L_s \frac{RT}{D} \left( \frac{\rho_0}{S} \right)^2.$$

Рівняння (9) пов'язує пластовий тиск та тиск на газозбірний пункт (ГЗП) з дебітом свердловини та параметрами ТО і дозволяє розв'язувати основні задачі, які виникають при розрахунку режиму роботи ПСГ.

*Задача 1.* При відомому розподілі пластового тиску і заданій величині об'ємного відбору  $Q_z$  визначити тиск на вході в газозбірний пункт.

*Задача 2.* При відомому розподілі пластового тиску і заданій величині вхідного тиску на ГЗП визначити об'ємний відбір газу  $Q_z$  зі сховища.

*Задача 3.* Аналогічно до задачі 2 при відомому розподілі пластового тиску і заданій мінімальній величині вхідного тиску на ГЗП визначити максимальний об'ємний відбір газу  $Q_z$  зі сховища.

#### 4. Модель руху крові в судинах з урахуванням пружності стінок.

Важливою проблемою є розрахунок параметрів руху рідини в гнучких трубках, зокрема судинах крові. Внутрішньо-судинний тиск крові є одним із основних параметрів діагностики серцево-судинної системи [2, 4]. Артеріальний тиск є інтегральною величиною, яка залежить від об'ємної швидкості крові і опору судин. Очевидно, що крім цих параметрів на рух крові впливають, зокрема, сила гравітації, еластичність судин, траєкторія руху тощо. Важливим моментом діагностики таких систем є кількісна оцінка їхніх параметрів, що вимагає побудови адекватних математичних моделей процесу руху крові в судинах. Відомо [7, 13, 14], що процеси гідрогазодинаміки та гемодинаміки описують подібні рівняння. Тому методи моделювання гідрогазодинамічних процесів можна використати в гемодинаміці з метою визначення [16, 20, 21]: 1) розподілу тиску крові через геометричні параметри судин і об'ємний перенос крові та 2) загального опору судин без урахування факторів, що його спричиняють.

*4.1. Математична модель процесу руху крові у великих кровоносних судинах.* Вважаємо кров нестисливою рідиною, тобто  $\rho = \text{const}$ . В усталеному режимі з урахуванням гравітаційної сили, гідравлічного опору та ламінарності потоку за нехтування деформації судини одновимірне рівняння руху крові має такий вигляд [3, 11]:

$$dp + \rho v dv + \lambda \frac{v^2}{2D} dx + g dh = 0, \quad (11)$$

де  $p = p(x)$  – розподіл тиску крові вздовж судини;  $\rho$  – густина крові;  $v$  – швидкість;  $\lambda$  – коефіцієнт гідравлічного опору судини;  $x$  – біжуча координата  $x \in [0, \ell]$ , де  $\ell$  – довжина судини;  $D$  – внутрішній діаметр судини;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $h = h(x)$  – крива, що описує траєкторію руху крові. Якщо враховувати залежність радіуса судин від тиску

$$r = r_0 \left( 1 + \frac{r_0}{E \delta_0} p \right),$$

де  $\delta_0$  та  $r_0$  – товщина і радіус судини в початковому стані, і позначити  $\beta = r_0 / (E \delta_0)$ ,  $E$  – модуль Юнга,

$$\Psi_1 = \frac{\lambda \rho}{2D} \frac{v_0^2}{(1 + \beta p)(1 + \beta p)^3 - 2\beta \rho_0 v_0}, \quad \Psi_2 = \frac{\rho g (1 + \beta p)^3}{(1 + \beta p)^3 - 2\beta \rho_0 v_0},$$

то рівняння (11) набуде вигляду

$$\frac{dp}{dx} + \psi_2 \frac{dh}{dx} = -\psi_1.$$

Ітераційний алгоритм для його розв'язування є таким:

- для початкового значення тиску  $p_0$  обчислити величини  $\psi_1$  та  $\psi_2$ ;
- для заданого значення  $x_z$  визначити значення тиску  $p(x_z)$ ;
- уточнити величини  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  та значення тиску;
- продовжити процес обчислення до того часу, поки різниця між двома сусідніми ітераціями стане меншою від заданої величини.

Обчислювальний експеримент здійснено при таких значеннях параметрів: вхідний тиск – 100 мм рт. ст., динамічна в'язкість – 0.0027, товщина стінки – 0.0004 м, довжина судини – 0.2 м, густина крові – 996 кг/м<sup>3</sup>, коефіцієнт гідравлічного опору – 0.3. Результати обчислень тиску  $p$  за формулою (6) для різних значень модуля Юнга  $E$  наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Значення тисків крові при швидкості руху 0.35 м/с у вертикально та горизонтально розташованій судині діаметра 0.01 м за різних значень модуля Юнга  $E$ .

$x$	$p$ (вертикальна судина)			$p$ (горизонтальна судина)			
	$E \times 10^5$	5	10	20	5	10	20
0.02		11322.8	11304.4	11291.1	13296.6	13273.2	13253.7
0.04		11283.6	11242.1	11210.9	13263.1	13216	13177.2
0.06		11244.3	11179.5	11130.5	13229.3	13158.6	13100.4
0.08		11204.7	11116.6	11049.8	13195.4	13101	13023.3
0.1		11164.8	11053.2	10968.7	13161.4	13043	12946
0.12		11124.7	10989.5	10887.4	13127.1	12984.7	12868.3
0.14		11084.3	10925.5	10805.7	13092.7	12926.1	12790.4
0.16		11043.7	10861.1	10723.7	13058.1	12867.3	12712.2
0.18		11002.8	10796.3	10641.4	13023.3	12808.1	12633.7
0.2		10961.6	10731.1	10558.8	12988.3	12748.6	12555

Результати обчислень узгоджуються з відомими в літературі. Підтверджено також висновок, що на розподіл тиску в судині впливає її розміщення відносно горизонту.

**4.2. Моделювання процесу руху крові в судинах в неусталеному режимі.** Для опису поширення крові в судинах в ізотермічному випадку за наявності джерел та стоків можна використати систему диференціальних рівнянь у частинних похідних [16, 20]

$$\frac{\partial p}{\partial x} + v\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v^2}{2D} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \Psi(x, t). \quad (12)$$

Тут  $c$  – швидкість звуку в рідині. Функція

$$\Psi(x, t) = \frac{4}{\pi D^2} \sum_{j=1}^J \varpi_j(t) \delta(x - x_j) (\eta(t - t_{1,j}) - \eta(t - t_{2,j})).$$

моделює наявність уздовж судини в точках  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , відводів–підводів речовин,  $t_{1,j}$  та  $t_{2,j}$  – відповідно часи включення та виключення масових відводів. Якщо за початковий розподіл тиску взяти вираз

$$p(x, 0) = p_c + \Delta p_c \cos(\alpha_c x + \gamma_c),$$

параметри якого розраховують за вимірними даними частоти скорочень серця, за значення тиску на межі

$$p(0, t) = p_t + \Delta p_t \cos(\alpha_t x + \gamma_t),$$

розв’язок системи рівнянь (12) матиме вигляд:

$$p(x, t) = p_c + \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{q_1 c_z^2}, \\ p\left(0, t - \frac{x}{q_1 c_z^2}\right) - p_c, & t > \frac{x}{q_1 c_z^2}, \end{cases} + \\ + \cos(\alpha_c x + \gamma_c) \Delta p_c \cos(q_1 c_z^2 \alpha_c t) + \\ + \alpha_c \sin(\alpha_c x + \gamma_c) \Delta p_c q_1 c_z^2 \frac{\sin(q_1 c_z^2 \alpha_c t)}{q_1 c_z^2 \alpha_c} - \\ - \Delta p_c \cos(\gamma_c) \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{q_1 c_z^2}, \\ \cos\left(q_1 c_z^2 \alpha_c \left(t - \frac{x}{q_1 c_z^2}\right)\right), & t > \frac{x}{q_1 c_z^2}, \end{cases} - \\ - \Delta p_c q_1 c_z^2 \alpha_c \sin(\gamma_c) \times \\ \times \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{q_1 c_z^2}, \\ \frac{1}{q_1 c_z^2 \alpha_c} \sin\left(q_1 c_z^2 \alpha_c \left(t - \frac{x}{q_1 c_z^2}\right)\right), & t > \frac{x}{q_1 c_z^2}, \end{cases}$$

де  $c = \rho_0 v_0 s_0$ ,  $\beta = D_0 / (Eh)$ .

**5. Рух крові в м’яких тканинах.** Для математичного моделювання процесу поширення крові в м’яких тканинах у літературі використовують два підходи: моделювання руху крові по капілярах з урахуванням точок розгалуження або моделювання м’яких тканин як пористих середовищ і трактування поширення крові як процесу фільтрації. Гемодинамічні умови в капілярах характеризуються низьким тиском (25–30 мм рт. ст. на артеріальному кінці та 8–12 мм рт. ст. – на венозному) і малою швидкістю кровотоку (0.5 мм/с). Просвіт капілярів іноді менший, ніж діаметр еритроцитів (3–5 мкм), однак є і великі капіляри діаметра понад 20–30 мкм, так звані синусоїдні капіляри і лакуни. Середня довжина капіляра 0.7–0.8 мм, площа поперечного розрізу 30 мкм<sup>2</sup>. Різні органи мають різний рівень розвитку капілярної сітки. Наприклад, у шкірі на 1 мм<sup>2</sup> є 40 капілярів, а в м’язах – близько 1000. У літературі називають різну сумарну довжину капілярів – від 60 до 100 тисяч кілометрів. Оскільки параметри капілярів (довжина, діаметр та інші) практично не вдається визначити з необхідною для розрахунків точністю, перший підхід виявляється неефективним. Доцільніше моделювати рух крові в м’яких тканинах пористими середовищами, в яких роль пор відіграють капіляри, а поширення крові реалізується як процес фільтрації, описаний рівнянням із дробовими похідними за часом [6, 12, 15, 19] у декартовій,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 2mh \left( \frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} + 2qp_{at} \right),$$

або циліндричній,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}, \quad x = \frac{k}{2\mu\alpha m},$$

системах координат. Фізичний зміст параметрів, що входять в останні два рівняння, такий самий, як у пластах ПСГ.

Останнім часом для моделювання процесів різної природи використовують похідні дробових порядків, оскільки дробові похідні за часом зберігають «пам'ять» процесу. Тому їх доцільно застосовувати в процесах із великими перехідними часами, зокрема при дослідженні фільтраційних процесів.

**Висновки.** Моделювання наявності КС та стоків уздовж трубопроводів із використанням узагальнених функцій дозволяє значно спростувати дослідження їхнього впливу на режимні параметри руху газу та обчислювальний процес їх розрахунку. Аналітичний підхід до моделювання ГТС на основі побудови контурних рівнянь дає можливість не тільки обчислювати значення параметрів руху газу, а й визначати напрям його руху.

Результати, отримані в ході числового експерименту, добре узгоджуються з відомими в літературі та реальними даними. Зокрема, отримані результати підтверджують необхідність врахування розміщення судини відносно горизонту, оскільки розподіл тиску у вертикальних і горизонтальних судинах істотно відрізняється. На рух крові суттєвий вплив чинить пружність судини, яка характеризується модулем Юнга.

1. *Гладун С., П'янило Я., Притула М.* Нестационарна дифузія газу в пористих середовищах із зосередженими джерелами // Вісн. нац. ун-ту «Львівська політехніка»: Комп. науки та інформаційні технології. – 2009. – № 650. – С. 195–199. – <http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/2795>.
2. *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения. – Москва: Мир, 1981. – 624 с.  
Te same: *Caro C. G., Pedley T. J., Schroter R. C., Seed W. A.* The mechanics of the circulation. – Oxford: Oxford University Press, 1978. – 527 p.
3. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. – Москва: Наука, 1978. – 736 с.  
Te same: *Loitsyanskii L. G.* Mechanics of liquids and gases. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – XII + 804 p.
4. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. – Москва: Мир, 1983. – 400 с.  
Te same: *Pedley T. J.* The fluid mechanics of large blood vessels. – Cambridge: Cambridge University Press, 1980. – 446 p.
5. *Притула Н. М., П'янило Я. Д., Притула М. Г.* Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи). – Львів: В-во «Растр-7», 2015. – 266 с.
6. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. – Москва: Физматлит, 2003. – 272 с.
7. *П'янило Я. Д.* Побудова ітераційної схеми визначення розподілу депресії тиску в горизонтальних трубопроводах // Мат. методи і фіз. мех. поля. – 2004. – 47, № 1. – С. 169–174.
8. *П'янило Я. Д.* Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2004. – Вип. 2. – С. 178–184.
9. *П'янило Я. Д.* Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу. – Львів: Сплайн, 2011. – 248 с.
10. *П'янило Я. Д.* Розподіл гідравлічного тиску при нестационарному русі газу в трубопроводах при наявності компресорних станцій та відборів // Нелінійні коливання. – 1999. – 2, No. 3. – С. 374–383.

11. П'янило Я. Д., П'янило Г. М., Вовчик І. І. Вплив параметрів судини на процес усталеного руху крові // *Мат. методи в хімії і біології* – 2013. – **1**, № 2. – С. 94–98.
12. П'янило Я., Васюник М., Васюник І. Дослідження спектрального методу розв'язування рівнянь у дробових похідних за часом у базисі многочленів Лагерра // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. – 2013. – Вип. 18. – С. 173-179
13. П'янило Я., Гладун С., П'янило Г. Аналітичний спосіб розрахунку параметрів гідравлічної ув'язки за колекторного способу збирання газу // *Вісн. нац. ун-ту «Львівська політехніка»: Комп. науки та інформаційні технології*. – 2011. – № 719. – С. 250-256. – <http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/12459>.
14. П'янило Я., Прытла Н., П'янило Г. Моделювання газотранспортних мереж з урахуванням змінності параметрів стану газу та рельєфу траси трубопроводів // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. – 2008. – Вип. 7. – С. 145-153.
15. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. І. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.  
Te same: *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications*. – Amsterdam: CRC Press, 1993. – 1006 p.
16. Frolov V., Pyanylo Ya., Prytula M. Analytical methods of optimization of operational parameters of the main gas pipelines (gas mains) // *Math. Model. Comput.* – 2018. – **5**, No. 1. – P. 1–9. – <https://doi.org/10.23939/mmc2018.01.001>.
17. Prytula N., Pyanylo Ya., Prytula M. Optimization of unsteady operating modes of gas mains // *Math. Model. Comput.* – 2016. – **3**, No. 2. – P. 183–190. – <https://doi.org/10.23939/mmc2016.02.183>.
18. Pyanylo Ya. D., Gladun S. V. Optimization of energy costs for gas transportation in complex gas transmission systems // *Annals Faculty Eng. Hunedoara – Int. J. Eng.* – 2015. – **13**, No. 3. – P. 31–36.
19. Pyanylo Ya., Bratash O., Pyanylo G. Solving of differential equations systems in the presence of fractional derivatives using the orthogonal polynomials // *Math. Model. Comput.* – 2017. – **4**, No. 1. – P. 87–95. – <https://doi.org/10.23939/mmc2017.01.087>.
20. Pyanylo Ya., Prytula M., Prytula N., Lopuh N. Models of mass transfer in gas transmission systems // *Math. Model. Comput.* – 2014. – **1**, No. 1. – P. 84–96.
21. P'yanylo Ya. D., Lopuh N. B. Numerical model of mass transfer in porous medium // *TASK Quarterly*. – 2012. – **16**, No. 3–4. – P. 229–238.

#### MATHEMATICAL MODELING OF MASS TRANSFER IN COMPLEX TECHNICAL AND BIOMEDICAL SYSTEMS

*The analytical methods for the determination of the operational parameters for the gas transportation process in the basic technological objects of gas transmission systems are presented. The mathematical modeling of gas transmission systems on the basis of the mentioned methods for projecting the underground gas storages is addressed. By taking the advantage of the existing analogy between the hydro-, gas- and hemodynamic processes, the results are extended onto the modeling of the blood circulation in large vessels and soft tissues of living organisms.*

**Keywords:** *mathematical modeling, processes of hydro- and gas-dynamics, hemodynamics, gas transportation system, underground gas storages.*

Центр мат. моделювання  
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
14.10.19