

ЧИСЕЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ РІВНОБЕДРЕНИХ ТРИКУТНИХ ПЛАСТИН З ВІЛЬНИМИ КРАЯМИ

Досліджено вільні коливання ізотропних пластин у формі рівнобедрених трикутників. Виведено формулу розрахунку частот вільних коливань пластин правильної трикутної форми з вільними краями та обчислено коефіцієнти форми коливань і граничних умов. Методом скінченних елементів розраховано частоти та форми вільних коливань ізотропних тонких рівнобедрених трикутних пластин з вільними краями та різними кутами при вершині.

Ключові слова: трикутні пластини, вільні коливання, коефіцієнти форми коливань і граничних умов, частоти коливань, метод скінченних елементів.

Вступ. При проектуванні тонкостінних інженерних споруд, сучасних будівель, авто-, авіа-, ракетно-космічних конструкцій використовують пластинчасті елементи, зокрема трикутної форми. Також при комп'ютерному моделюванні та розрахунку несучих елементів таких споруд у випадку динамічних навантажень із використанням методу скінченних елементів застосовують розбиття на трикутні елементи. Тому вивчення динамічної поведінки, що передбачає дослідження частот і форм вільних коливань пластинчастих елементів трикутної форми з урахуванням властивостей матеріалу і граничних умов, є актуальною проблемою сучасної механіки та прикладної математики.

В рамках класичної теорії для визначення частот і форм вільних коливань використовують методи збурень, рядів, сіток, Релея – Рітца, Бубнова – Гальоркіна, колокацій, сплайн-апроксимації, Едмана, асимптотичний метод Болотіна та інші. В [10] розглянуто класичну задачу про коливання пластини з вільними краями, досліджено точність задоволення однорідних граничних умов та виконано порівняння теоретичних даних з експериментальними. Коливання вільних і заокруглених полігональних пластин досліджено в [19] за допомогою покращеного методу Рітца на класі гомотопічних форм. Наведено перші п'ять частот власних коливань пластин правильної форми та еволюцію форм коливань. В [11] розглянуто задачу про коливання в'язкопружної пластини, що має форму правильного трикутника. Досліджено лінії рівнів амплітуди коливань, наведено графіки розподілу амплітуди за висотою трикутника. В [9] чисельно досліджено функціональний зв'язок між інтегральними фізичними характеристиками в задачах поперечного згину та вільних коливань пружних пластин у вигляді рівнобедрених трикутників з однорідними та комбінованими крайовими умовами. Для визначення основної частоти власних коливань пружних ізотропних правильних n -кутних, трикутних і ромбічних шарнірно опертих пластин у [12] запропоновано використовувати єдину розрахункову функцію однієї змінної. Алгоритми та програми для розрахунку трикутних пластин розроблено в [8]. Чисельний метод, розроблений для розрахунку частот і форм вільних коливань ізотропних та ортотропних трикутних пластин, використано в [17] для дослідження коливань трикутних пластин із різними крайовими умовами. У [18] досліджено частоти вільних коливань трикутних пластин із використанням методу Рітца, в якому функції зміщення взято у вигляді алгебричних многочленів. Вільні коливання товстих консольних пластин довільної трикутної форми проаналізовано в [16] на основі теорії деформації зсуву Міндліна. У [13] досліджено поведінку електрично навантаженої тонкої прямокутної асиметричної біморфної

✉ ayagrigorenko1991@gmail.com

пластини, коливання якої розглянуто в рамках узагальнених гіпотез Кірхгофа. У [2] проаналізовано вплив нелінійності крайових умов на вільні нелінійні коливання прямокутних пластин. В [1] розглянуто крайові задачі узагальненої термопружності для трансверсально ізотропних пластин.

Поряд з аналітичними та експериментальними методами розв'язування задач динаміки теорії пластин і оболонок широко використовують метод скінченних елементів (МСЕ), який є основою багатьох сучасних програмних пакетів для інженерного розрахунку, зокрема FEMAP з ядром NX Nastran. Цей програмний засіб ефективно використано в багатьох дослідженнях [3–5, 14, 15]. У [14] вивчено коливні процеси в тонких пластинах трьох правильних форм з різними фізико-механічними характеристиками та вільними краями. В [6] досліджено динамічні характеристики тонкої ізотропної жорстко закріпленої квадратної пластини за допомогою реалізації не-класичного експерименту Хладні та МСЕ. У [7] визначено частоти та форми вільних коливань тонкої жорстко закріпленої квадратної пластини сталої товщини з використанням двох чисельних методів: МСЕ, який реалізовано на FEMAP, і Релея – Рітца, який модифіковано та реалізовано на ЕОМ в середовищі Delphi.

Метою роботи є отримання формули розрахунку частот вільних коливань трикутних пластин правильної форми з вільною межею, розрахунок коефіцієнтів форми коливань і крайових умов, а також визначення з використанням МСЕ частот та форм вільних коливань ізотропних тонких рівнобедрених трикутних пластин з вільними краями та різними кутами при вершині.

1. Основні співвідношення. При застосуванні МСЕ для вивчення руху пластини за відсутності демпфування використовують рівняння

$$\mathbf{K}\Phi_i + \mathbf{M}\ddot{\Phi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (1)$$

де \mathbf{K} і \mathbf{M} – відповідно матриці жорсткості та мас механічної системи, Φ_i – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає i -му ступеню вільності, який відтворює i -ту форму коливань. У випадку вільних коливань пластини всі вузлові точки коливаються згідно з гармонічним законом

$$\Phi_i(t) = \Phi_i^0 \sin \omega_i t, \quad (2)$$

де ω_i – пульсація або частота гармонічних коливань.

Після підстановки подання (2) в рівняння руху пластини (1) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебричних рівнянь

$$\mathbf{K}\Phi_i^0 - \omega_i^2 \mathbf{M}\Phi_i^0 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3)$$

Для визначення частот ω_i і форм вільних коливань на основі (3) при відсутності дисипації енергії і демпфування застосовується як основний метод Ланцоша в обчислювальному пакеті NX Nastran.

2. Методика розв'язування. Для реалізації розрахунків використаємо формулу

$$f_i = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} GM\tilde{F}_i^e, \quad (4)$$

де G – коефіцієнт геометрії, M – коефіцієнт матеріалу, \tilde{F}_i^e – уточнений коефіцієнт форми коливань, $f_i = \omega_i / (2\pi)$. Формулу (4) отримано в [7] (формула (21)) і застосовано до визначення частот вільних коливань тонкої жорстко закріпленої квадратної пластини сталої товщини. Отримані результати розрахунків показали хорошу збіжність з результатами МСЕ.

Внесемо перший сталий множник в уточнений коефіцієнт форми коливань

$$f_i = GMF_i^e, \quad (5)$$

де $F_i^e = \tilde{F}_i^e \pi / (2\sqrt{6})$, і застосуємо формулу до розв'язування задачі про визначення частот вільних коливань трикутної пластини правильної форми з вільними краями. Права частина формули (5) містить три множники. Перший та другий множники відповідають геометричним параметрам і характеристикам матеріалу, а останній – формам коливань і граничним умовам. Запишемо (5) у вигляді зведеної формули (ЗФ) для пластини у формі правильного трикутника зі стороною a :

$$f_i = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} F_i^e, \quad (6)$$

де h – товщина пластини, ρ – густина матеріалу, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, F_i^e – коефіцієнт форми коливань і граничних умов, що визначається за методикою [7].

Для виконання обчислювального експерименту за допомогою процесора FEMAP побудовано геометрію пластини у вигляді правильного трикутника з параметрами $a = 240$ мм, $h = 4$ мм ($h/a = 1/60$), виготовленої з алюмінію ($E = 71$ ГПа, $\nu = 0.33$, $\rho = 2710$ кг/м³). Скінченно-елементну модель пластини наведено на рис. 1. Розрахунок виконано з метою визначення частот і форм вільних коливань. Отримані частоти використано для уточнення коефіцієнта F_i^e в ЗФ (6) на основі формули

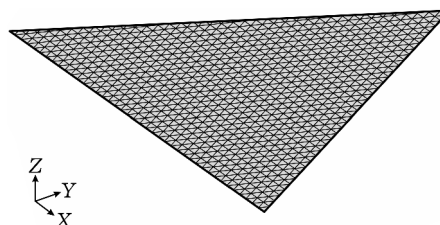


Рис. 1

$$F_i^e = \frac{f_{i,FEMAP}}{h} a^2 \sqrt{\frac{1-\nu^2}{E}} \rho, \quad (7)$$

де $f_{i,FEMAP}$ – розраховане значення частоти. Знайдені за формулою (7) значення уточненого коефіцієнта наведено в табл. 1.

Таблиця 1

i	$f_{i,FEMAP}$, Гц	F_i^e
1	589.22	1.5648
2	607.67	1.6138
3	607.69	1.6139
4	1443.54	3.8336
5	1443.57	3.8337
6	1542.35	4.0960
7	1973.56	5.2412
8	2737.38	7.2697
9	2737.70	7.2705
10	2737.77	7.2707

3. Аналіз результатів. Перші десять частот, розраховані за зведеною формулою (6) та FEMAP для різних відношень h/a наведено в табл. 2, де (i нижче) ε – відхилення між розрахованими значеннями, а у рядках «тах» наведено максимальну похибку для розрахованих значень.

З аналізу даних у табл. 2 робимо висновок, що розрахунки за (6) та уточнені коефіцієнти F_i^e з табл. 1 добре узгоджуються з розрахунками МСЕ: для перших десяти власних частот при $h/a \leq 1/30$ похибка не перевищує 3.5%; спостерігається менша точність при $1/30 \leq h/a \leq 1/20$ з

відносно похибкою до 10%; для перших трьох частот при $h/a \leq 1/10$ відносна похибка не перевищує 10%.

Таблиця 2

i	$h/a = 1/1920$		$\varepsilon, \%$	$h/a = 1/960$		$\varepsilon, \%$	$h/a = 1/480$		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP	
1	18.41	18.57	0.86	36.83	37.03	0.54	73.65	73.97	0.43
2	18.99	19.22	1.20	37.98	38.32	0.89	75.96	76.55	0.77
3	18.99	19.22	1.20	37.98	38.32	0.89	75.96	76.55	0.77
4	45.11	46.32	2.61	90.22	91.53	1.43	180.44	182.23	0.98
5	45.11	46.32	2.61	90.22	91.53	1.43	180.45	182.23	0.98
6	48.20	51.86	7.06	96.40	99.34	2.96	192.79	196.16	1.72
7	61.67	62.75	1.72	123.35	125.09	1.39	246.69	249.79	1.24
8	85.54	89.06	3.95	171.09	175.11	2.30	342.17	347.55	1.55
9	85.55	91.65	6.66	171.11	177.01	3.33	342.21	349.23	2.01
10	85.56	91.65	6.64	171.11	177.01	3.33	342.22	349.23	2.01
max			7.06			3.33			2.01
i	$h/a = 1/240$		$\varepsilon, \%$	$h/a = 1/120$		$\varepsilon, \%$	$h/a = 1/60$		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP	
1	147.31	147.79	0.32	294.61	295.39	0.26	589.22	589.22	0.00
2	151.92	152.92	0.65	303.84	305.34	0.49	607.67	607.67	0.00
3	151.92	152.92	0.65	303.85	305.35	0.49	607.69	607.69	0.00
4	360.89	363.37	0.68	721.77	725.82	0.56	1443.54	1443.54	0.00
5	360.89	363.37	0.68	721.78	725.82	0.56	1443.57	1443.57	0.00
6	385.59	390.15	1.17	771.17	778.17	0.90	1542.35	1542.35	0.00
7	493.39	498.44	1.01	986.78	994.75	0.80	1973.56	1973.56	0.00
8	684.34	691.25	1.00	1368.69	1380.39	0.85	2737.38	2737.38	0.00
9	684.42	693.35	1.29	1368.85	1383.30	1.04	2737.70	2737.70	0.00
10	684.44	693.35	1.29	1368.88	1383.31	1.04	2737.77	2737.77	0.00
max			1.29			1.04			0.00
i	$h/a = 1/30$		$\varepsilon, \%$	$h/a = 1/20$		$\varepsilon, \%$	$h/a = 1/15$		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP	
1	1178.45	1169.26	0.79	1767.67	1736.35	1.80	2356.89	2286.27	3.09
2	1215.34	1199.48	1.32	1823.01	1772.03	2.88	2430.68	2320.76	4.74
3	1215.38	1199.51	1.32	1823.07	1772.05	2.88	2430.76	2320.77	4.74
4	2887.09	2836.91	1.77	4330.63	4157.11	4.17	5774.17	5384.56	7.24
5	2887.14	2836.94	1.77	4330.71	4157.16	4.17	5774.28	5384.59	7.24
6	3084.70	3007.29	2.57	4627.05	4370.82	5.86	6169.40	5611.87	9.93
7	3947.12	3852.32	2.46	5920.68	5603.08	5.67	7894.24	7200.69	9.63
8	5474.76	5299.38	3.31	8212.14	7614.85	7.84	10949.52	9642.62	13.55
9	5475.40	5299.75	3.31	8213.10	7615.21	7.85	10950.80	9642.84	13.56
10	5475.54	5323.10	2.86	8213.31	7688.16	6.83	10951.08	9791.03	11.85
max			3.31			7.85			13.56
i	$h/a = 1/12$		$\varepsilon, \%$	$h/a = 1/10$		$\varepsilon, \%$	$h/a = 1/5$		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP	
1	2946.12	2815.88	4.63	3535.34	3323.03	6.39	7070.68	5678.37	24.52
2	3038.35	2842.68	6.88	3646.02	3336.17	9.29	7292.04	5678.48	28.42
3	3038.45	2842.69	6.89	3646.14	3336.17	9.29	7292.28	5849.28	24.67
4	7217.71	6509.06	10.89	8661.26	7528.27	15.05	17322.51	11166.59	55.13
5	7217.84	6509.11	10.89	8661.41	7528.35	15.05	17322.83	11687.35	48.22
6	7711.75	6721.27	14.74	9254.09	7700.02	20.18	18508.19	11687.85	58.35
7	9867.80	8637.85	14.24	11841.35	9920.08	19.37	23682.71	15071.14	57.14
8	13686.90	11378.94	20.28	16424.28	12843.43	27.88	32848.56	17257.39	90.34
9	13688.50	11379.05	20.30	16426.19	12843.48	27.90	32852.39	17258.37	90.36
10	13688.85	11627.27	17.73	16426.62	13215.24	24.30	32853.24	19007.20	72.85
max			20.30			27.90			90.36

Для перших трьох частот розбіжність розрахунків за ЗФ (6) і МСЕ для всіх розглянутих співвідношень товщини пластини до її сторони не перевищують 30%. Необхідно підвищити точність обчислення коефіцієнтів

F_i^e для різних відношень товщини пластини до її сторони за умови, що розбіжності між розрахованими частотами за ЗФ (6) і МСЕ становитимуть до 20% та до 10% між першими трьома частотами. У табл. 3 наведено розраховані уточнені коефіцієнти F_i^e .

Таблиця 3

i	F_i^e		
	$\frac{1}{1920} \leq \frac{h}{a} \leq \frac{1}{20}$	$\frac{1}{20} < \frac{h}{a} \leq \frac{1}{10}$	$\frac{1}{10} < \frac{h}{a} \leq \frac{1}{5}$
1	1.564809	1.495634	1.330106
2	1.613798	1.509868	1.330135
3	1.613851	1.509876	1.355306
4	3.833636	3.457241	2.763673
5	3.833705	3.457263	2.821098
6	4.096037	3.569952	2.821209
7	5.241207	4.587930	3.647936
8	7.269696	6.043840	4.371995
9	7.270544	6.043899	4.372244
10	7.270732	6.175739	4.677455

Таблиця 4

i	$h/a = 1/20$		$\varepsilon, \%$	$h/a = 1/15$		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (6)	ФЕМАР		ЗФ (6)	ФЕМАР	
1	1689.53	1736.35	2.70	2252.70	2286.27	1.47
2	1705.61	1772.03	3.75	2274.14	2320.76	2.01
3	1705.62	1772.05	3.75	2274.16	2320.77	2.01
4	3905.44	4157.11	6.05	5207.25	5384.56	3.29
5	3905.46	4157.16	6.05	5207.28	5384.59	3.29
6	4032.76	4370.82	7.73	5377.01	5611.87	4.19
7	5182.71	5603.08	7.50	6910.28	7200.69	4.03
8	6827.36	7614.85	10.34	9103.15	9642.62	5.59
9	6827.43	7615.21	10.34	9103.24	9642.84	5.60
10	6976.36	7688.16	9.26	9301.82	9791.03	5.00
max			10.34			5.60
i	$h/a = 1/12$		$\varepsilon, \%$	$h/a = 1/10$		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (6)	ФЕМАР		ЗФ (6)	ФЕМАР	
1	2815.88	2815.88	0.00	3379.06	3323.03	1.69
2	2842.68	2842.68	0.00	3411.21	3336.17	2.25
3	2842.69	2842.69	0.00	3411.23	3336.17	2.25
4	6509.06	6509.06	0.00	7810.88	7528.27	3.75
5	6509.10	6509.11	0.00	7810.93	7528.35	3.75
6	6721.27	6721.27	0.00	8065.52	7700.02	4.75
7	8637.85	8637.85	0.00	10365.42	9920.08	4.49
8	11378.94	11378.94	0.00	13654.73	12843.43	6.32
9	11379.05	11379.05	0.00	13654.86	12843.48	6.32
10	11627.27	11627.27	0.00	13952.72	13215.24	5.58
max			0.00			6.32

Перші десять частот, розраховані за формулою (6) та уточненими коефіцієнтами з табл. 3 та ФЕМАР, наведено в табл. 4 при $1/20 < h/a \leq 1/10$ і табл. 5 при $1/10 < h/a \leq 1/5$.

Перші десять форм коливань, отримані за допомогою ФЕМАР, наведено на рис. 2 при $h/a \leq 1/10$. Зауважимо, що форми коливань є однаковими для всіх розглянутих пластин, але порядок формоутворення може порушуватися. При подальшому збільшенні товщини виявлено форми коливань (рис. 3), які є характерними для неплоских тіл і не були враховані при укладанні табл. 2, табл. 4 і табл. 5.

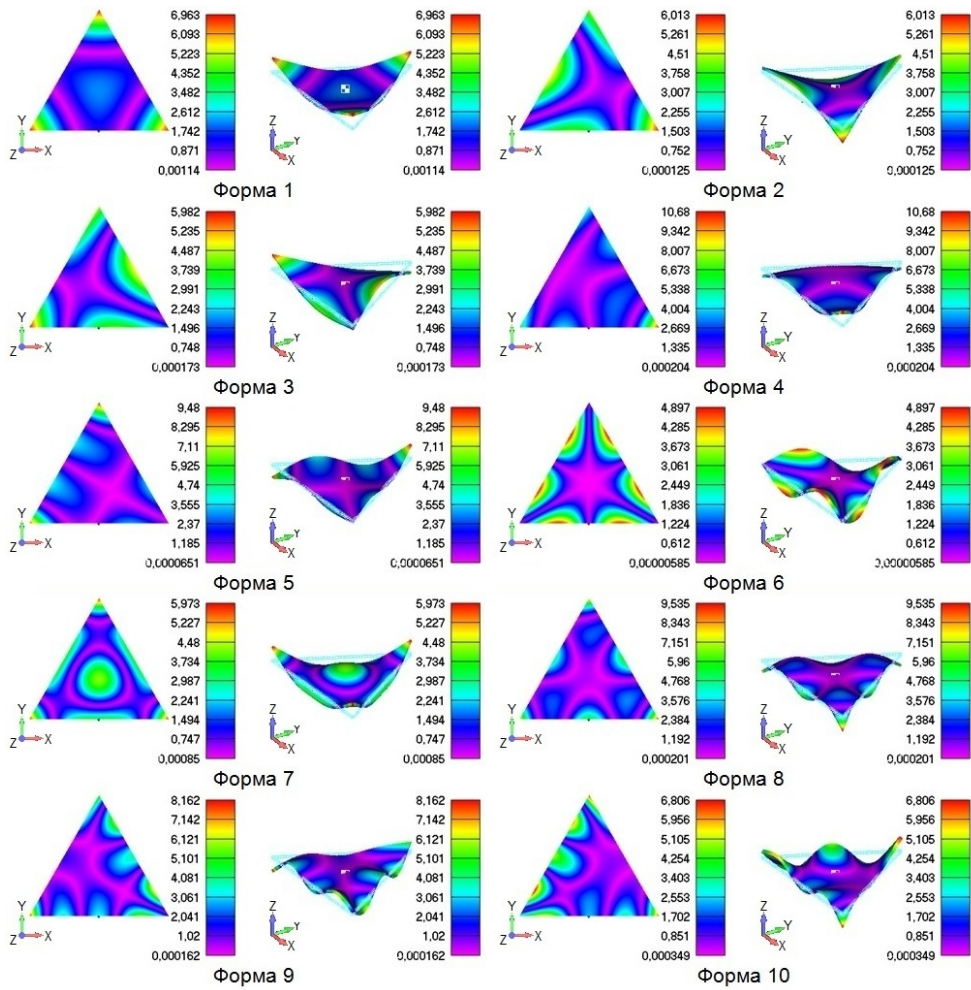


Рис. 2

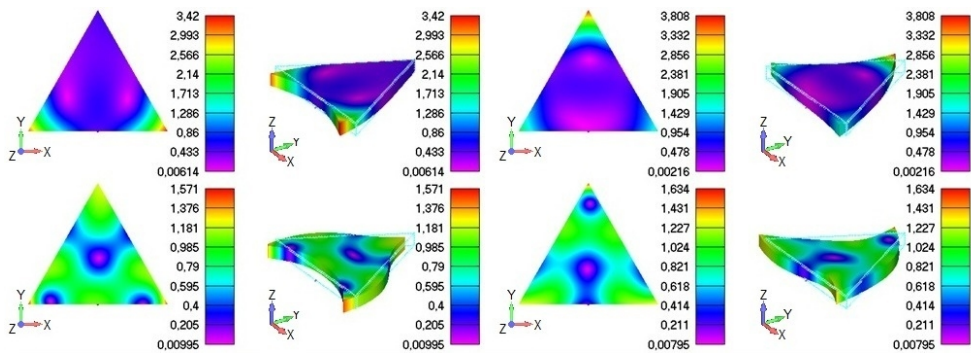


Рис. 3

Таблиця 5

<i>i</i>	<i>h/a</i> = 1/10		$\varepsilon, \%$	<i>h/a</i> = 1/8		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP	
1	3005.08	3323.03	9.57	3756.35	4019.21	6.54
2	3005.15	3336.17	9.92	3756.43	4019.24	6.54
3	3062.02	3336.17	8.22	3827.52	4037.66	5.20
4	6243.91	7528.27	17.06	7804.89	8862.15	11.93
5	6373.65	7528.35	15.34	7967.06	8862.26	10.10
6	6373.90	7700.02	17.22	7967.38	8927.23	10.75
7	8241.71	9920.08	16.92	10302.14	11572.89	10.98
8	9877.56	12843.43	23.09	12346.95	14577.60	15.30
9	9878.12	12843.48	23.09	12347.65	14578.22	15.30
10	10567.68	13215.24	20.03	13209.60	15184.68	13.01
max			23.09			15.30
<i>i</i>	<i>h/a</i> = 1/6		$\varepsilon, \%$	<i>h/a</i> = 1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP	
1	5008.47	5008.47	0.00	6010.16	5678.37	5.84
2	5008.58	5008.58	0.00	6010.29	5678.48	5.84
3	5103.36	5103.36	0.00	6124.03	5849.28	4.70
4	10406.52	10406.52	0.00	12487.82	11166.59	11.83
5	10622.75	10622.75	0.00	12747.30	11687.35	9.07
6	10623.17	10623.17	0.00	12747.80	11687.85	9.07
7	13736.18	13736.18	0.00	16483.42	15071.14	9.37
8	16462.60	16462.60	0.00	19755.12	17257.39	14.47
9	16463.54	16463.54	0.00	19756.25	17258.37	14.47
10	17612.80	17612.80	0.00	21135.36	19007.20	11.20
max			0.00			14.47

Оцінимо точність розрахунку частот вільних коливань за формулою (6) та уточненими коефіцієнтами F_i^e з табл. 3 на трьох різних пластинах, параметри яких наведено в табл. 6. Розраховані частоти у порівнянні з частотами, розрахованими МСЕ, дано в табл. 7.

Таблиця 6

	<i>a</i> , мм	<i>h</i> , мм	<i>h/a</i>	<i>E</i> , ГПа	ν	ρ , кг/м ³
1	930	31	1/30	110	0.35	8920
2	150	10	1/15	2.56	0.32	936
3	80000	10000	1/8	0.003	0.49	1200

Таблиця 7

<i>i</i>	<i>h/a</i> = 1/30		$\varepsilon, \%$	<i>h/a</i> = 1/15		$\varepsilon, \%$	<i>h/a</i> = 1/8		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP		ЗФ (6)	FEMAP	
1	210.26	208.22	0.98	1160.34	1179.17	1.60	0.11921	0.11301	5.48
2	216.84	211.46	2.54	1171.38	1202.66	2.60	0.11921	0.11309	5.41
3	216.85	211.46	2.55	1171.38	1202.70	2.60	0.12146	0.12156	0.08
4	515.11	504.09	2.19	2682.18	2780.89	3.55	0.24768	0.25064	1.18
5	515.12	504.10	2.19	2682.20	2781.08	3.56	0.25283	0.25901	2.39
6	550.36	530.53	3.74	2769.62	2905.48	4.68	0.25284	0.25902	2.39
7	704.23	685.71	2.70	3559.38	3716.91	4.24	0.32693	0.34764	5.96
8	976.79	939.82	3.93	4688.90	4983.65	5.91	0.39182	0.41562	5.72
9	976.91	939.86	3.94	4688.95	4983.97	5.92	0.39185	0.41564	5.72
10	976.93	948.26	3.02	4791.23	5055.00	5.22	0.41920	0.44464	5.72
max			3.94			5.92			5.96

З використанням МСЕ розраховано частоти та форми вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин товщини $h = 2$ мм з кутами при вершині від 10° до 150° з кроком 10° еквівалентної маси з вільними краями. Вибір максимальних і мінімальних кутів зумовлений використанням моделі пластини і стержня, тому введемо обмеження $0.1 \leq H/a_0 \leq 10$, де H/a_0 –

відношення висоти до основи трикутника. Розміри основ a_0 та висот H рівнобедрених трикутників при відповідних значеннях кутів наведено в табл. 8, де α – вершина трикутника, β – кут при основі трикутника.

Таблиця 8

	$\alpha, [^\circ]$	$\beta, [^\circ]$	$a_0, \text{мм}$	$H, \text{мм}$	H/a_0
1	10	85	93.43	533.93	5.715
2	20	80	132.63	376.10	2.836
3	30	75	163.50	305.10	1.866
4	40	70	190.56	261.78	1.374
5	50	65	215.69	231.27	1.072
6	60	60	240.00	207.85	0.866
7	70	55	264.30	188.73	0.714
8	80	50	289.33	172.41	0.596
9	90	45	315.86	157.93	0.500
10	100	40	344.81	144.67	0.420
11	110	35	377.47	132.15	0.350
12	120	30	415.69	120.00	0.289
13	130	25	462.55	107.84	0.233
14	140	20	523.55	95.28	0.182
15	150	15	610.19	81.75	0.134

Таблиця 9

	α / β				
	10/85	20/80	30/75	40/70	50/65
1	47.53	95.72	144.98	195.53	247.36
2	121.01	244.21	310.41	309.50	307.87
3	227.66	309.88	369.46	438.01	358.64
4	306.93	459.87	566.49	499.60	621.35
5	367.64	604.48	641.63	682.02	722.58
6	541.12	736.58	700.64	927.97	886.19
7	574.21	819.10	1078.48	1091.43	1016.60
8	748.28	960.29	1124.91	1131.97	1197.79
9	860.93	1101.21	1268.86	1197.54	1304.90
10	956.78	1384.64	1422.42	1500.85	1635.67
	α / β				
	60/60	70/55	80/50	90/45	100/40
1	295.39	255.33	219.02	188.25	161.30
2	305.34	301.79	295.83	285.95	269.82
3	305.35	354.01	404.43	446.02	441.58
4	725.82	629.56	548.89	486.93	464.67
5	725.82	775.32	761.47	719.05	673.60
6	778.17	804.15	825.30	825.96	793.55
7	994.75	1026.18	1030.68	983.91	973.67
8	1380.39	1217.54	1193.08	1224.08	1121.51
9	1383.30	1403.57	1335.40	1257.31	1224.28
10	1383.31	1486.70	1507.95	1512.93	1535.60
	α / β				
	10/85	20/80	30/75	40/70	50/65
1	110/35	120/30	130/25	140/20	150/15
2	137.09	114.82	93.99	74.17	55.09
3	245.97	215.40	180.97	144.87	108.45
4	411.67	393.79	330.62	263.74	196.91
5	445.00	394.03	383.32	372.00	303.75
6	646.99	629.04	525.27	424.52	384.90
7	723.99	634.93	621.62	572.24	440.74
8	996.12	922.56	776.40	658.45	602.98
9	1048.89	995.24	936.13	799.19	625.28
10	1119.36	1120.75	1085.26	968.64	792.14

Перші десять частот рівнобедрених трикутних пластин при $1/10 \leq H/a_0 \leq 10$, отримані за допомогою FEMAP, наведено в табл. 9 і на рис. 4.

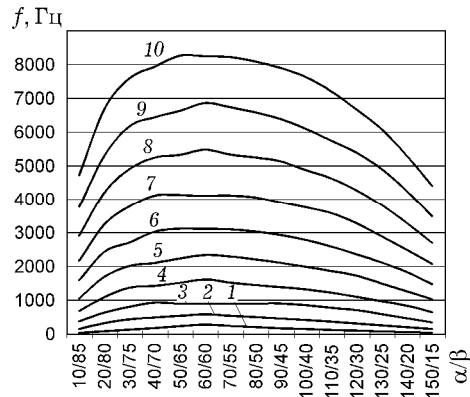


Рис. 4

Перші три форми вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин при $1/10 \leq H/a_0 \leq 10$ наведено на рис. 5 – рис. 7.

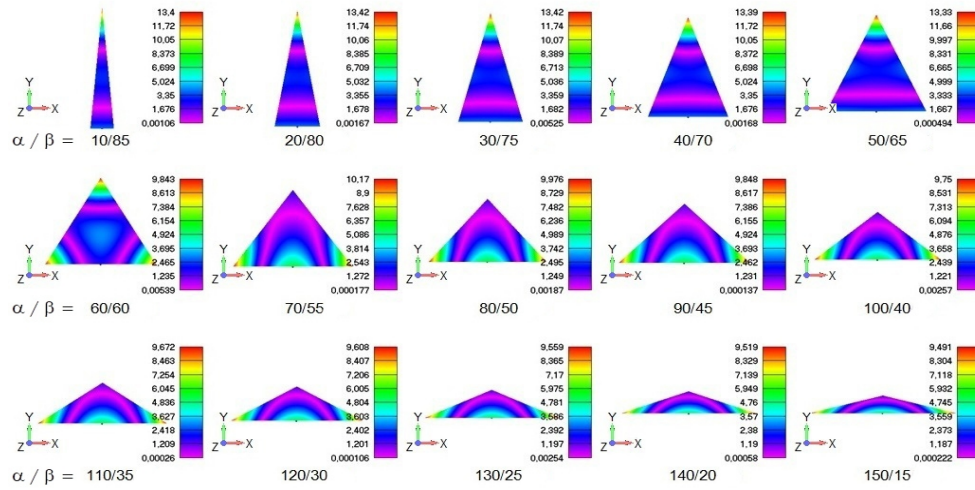


Рис. 5

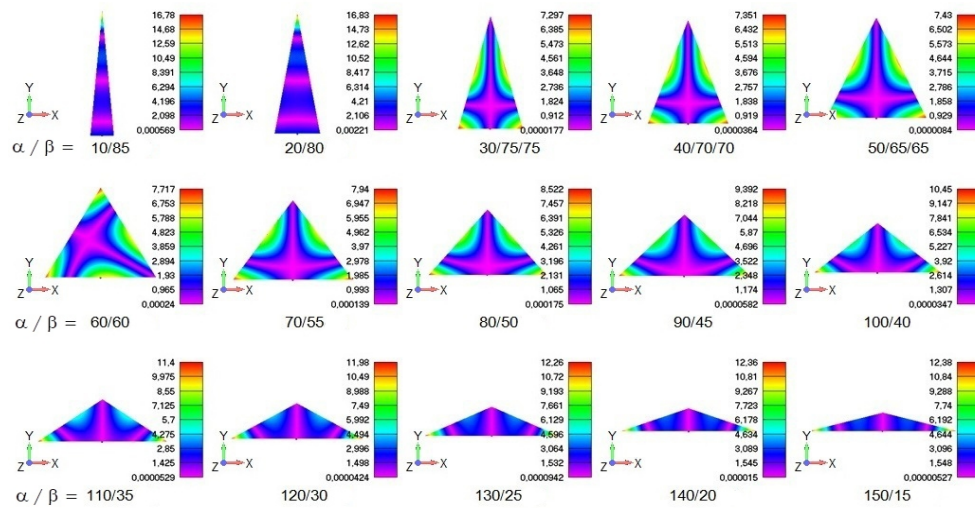


Рис. 6

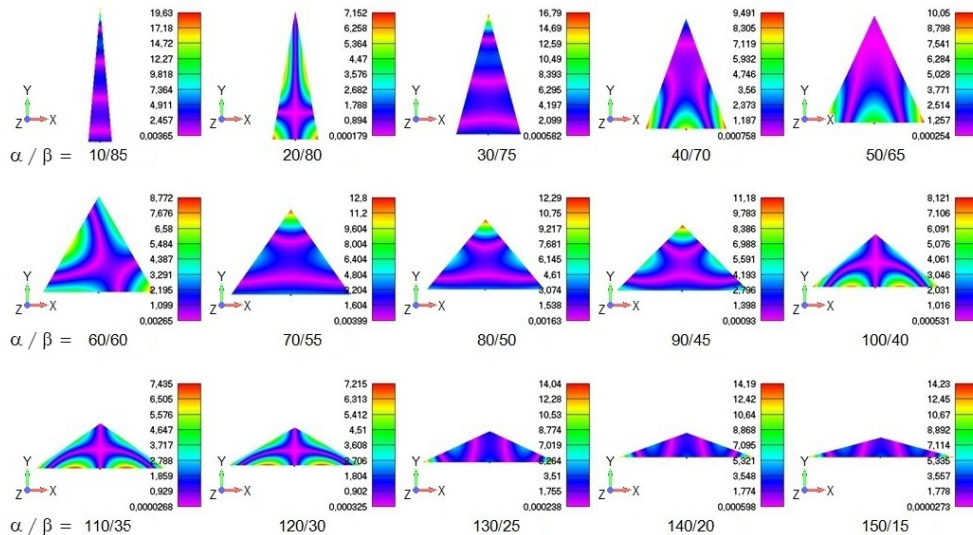


Рис. 7

Висновки. У роботі отримано зведену формулу розрахунку частот вільних коливань трикутних пластин правильної форми з вільними краями та коефіцієнти форми коливань і граничних умов, які залежать від співвідношення товщини пластини до сторони трикутника. Похибка розрахунку частот вільних коливань за зведеною формулою порівняно з розрахунком за допомогою МСЕ не перевищує 6% для перших трьох частот. Встановлено межі застосування зведеної формули.

При дослідженні динамічної поведінки трикутних пластин виявлено планарні коливання, які спостерігаються на високих частотах для тонких пластин та проявляються на нижчих частотах зі збільшенням товщини.

Розраховано за допомогою МСЕ частоти та форми вільних коливань ізотропних тонких рівнобедрених трикутних пластин з вільними краями та різними кутами при вершині. Отримано залежність частот вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин від кута при вершині. Здебільшого максимальні значення частот відповідають пластині з кутом при вершині 60° , що свідчить про її високу жорсткість, а мінімальні значення відповідають пластині з кутом при вершині 150° .

Однакові форми коливань рівнобедрених трикутних пластин не відповідають одному порядковому номеру, оскільки всі пластини мають різну жорсткість, проте топологія форм коливань добре спостерігається.

1. Алтухов Е. В., Шевченко В. П. Метод однородных решений в трехмерных задачах обобщенной термомеханики транслопных пластин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 84–91.
2. Бреславский И. Д., Аврамов К. В. Влияние нелинейностей в граничных условиях на свободные колебания пластин при их геометрически нелинейном деформировании // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 3. – С. 72–81.
Te same: Breslavsky I. D., Avramov K. V. Influence of nonlinearities in boundary conditions on the free vibrations of plates under geometrically nonlinear deformation // J. Math. Sci. – 2013. – **194**, No. 2. – P. 213–224.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1521-4>.
3. Будаков В. Д., Григоренко А. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук Е. В. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 1. – С. 145–152.
Te same: Budakov V. D., Grigorenko A. Ya., Borisenko M. Yu., Boichuk E. V. Determination of the natural frequencies of an elliptical shell of constant thickness by the finite-element method // J. Math. Sci. – 2016. – **212**, No. 2. – P. 182–192.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2658-0>.

4. Будак В. Д., Григоренко А. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук Е. В. Частоты и формы свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2017. – **53**, № 2. – С. 59–70.
Te same: Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Borisenko M. Yu., Boichuk E. V. Natural frequencies and modes of noncircular cylindrical shells with variable thickness // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, No. 2. – P. 167–172.
– <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0802-x>.
5. Григоренко А. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук Е. В., Пригода А. П. Численное определение частот и форм свободных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки // Прикл. механика. – 2018. – **54**, № 1. – С. 90–100.
Te same: Grigorenko A. Ya., Borysenko M. Y., Boichuk E. V., Prigoda A. P. Numerical determination of natural frequencies and modes of the vibrations of a thick-walled cylindrical shell // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, No. 1. – P. 75–84.
– <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0861-7>.
6. Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук О. В., Новицький В. С. Застосування експериментального і числового методів до дослідження вільних коливань прямокутних пластин // Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2019. – № 29. – С. 103–112.
7. Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук О. В., Новицький В. С. Чисельний аналіз вільних коливань прямокутних пластин на основ різних підходів // Вісн. Запорізьк. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2020. – № 1. – С. 33–41.
8. Коробко А. В., Гефель В. В. Определение основной частоты колебаний и максимального прогиба пластинок с помощью МИКФ // Вестник ЦРО РААСН. – 2006. – № 5. – С. 81–88.
9. Коробко В. И., Бояркина О. В. Взаимосвязь задач поперечного изгиба и свободных колебаний треугольных пластинок // Вестник ЮУрГУ. – 2007. – № 22. – С. 24–26.
10. Мелешко В. В., Папков С. О. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1990) до наших дней // Акуст. вісник. – 2009. – **12**, № 4. – С. 34–51.
11. Чернышов Н. А., Чернышов А. Д. Вязкоупругие колебания треугольной пластины // Прикл. механика и техн. физика. – 2001. – **42**, № 3. – С. 152–158.
Te same: Chernyshov N. A., Chernyshov A. D. Viscoelastic vibrations of a triangular plates // J. Appl. Mech. Techn. Phys. – 2001. – **42**, No. 3. – P. 510–515.
– <https://doi.org/10.1023/A:1019263108065>.
12. Черняев А. А. Динамический расчет правильных n -угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых пластинок с использованием отношения конформных радиусов в качестве геометрического аргумента // Строит. мех. инж. конструкций и сооружений. – № 2. – 2012. – С. 63–71.
13. Янчевський І. В. Збудження згинних коливань прямокутної пластинки метал – п'єзокераміка нестационарним електричним сигналом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 3. – С. 81–86.
Te same: Yanchevskiy I. V. Excitation of the bending vibrations of a rectangular metalpiezoceramic plate by a nonstationary electric signal // J. Math. Sci. – 2012. – **185**, No. 6. – P. 852–857. – <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0967-0>.
14. Borysenko M., Zavhorodnii A., Skupskiy R. Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone // J. Appl. Math. Comput. Mech. – 2019. – **18**, No. 1. – P. 5–13. – <https://doi.org/10.17512/jamcm.2019.1.01>.
15. Grigorenko A. Ya., Borysenko M. Yu., Boychuk O. V., Vasil'eva L. Ya. Free vibrations of an open non-circular cylindrical shell of variable thickness // In: H. Altenbach, N. Chinchaladze, R. Kienzler, W. Müller (eds.). Analysis of shells, plates, and beams. Advanced structured materials. – Springer, Cham, 2020. – Vol. 134. – P. 141–154. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_8.
16. Karunasena W., Kitipornchai S., Al-Bermani F. G. A. Free vibration of cantilevered arbitrary triangular Mindlin plates // Int. J. Mech. Sci. – 1996. – **38**, No. 4. – P. 431–442. – [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(95\)00060-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)00060-7).
17. Lam K. Y., Liew K. M., Chow S. T. Free vibration analysis of isotropic and orthotropic triangular plates // Int. J. Mech. Sci. – 1990. – **32**, No. 5. – P. 455–464.
– [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(90\)90172-F](https://doi.org/10.1016/0020-7403(90)90172-F).
18. Leissa A. W., Jaber N. A. Vibrations of completely free triangular plates // Int. J. Mech. Sci. – 1992. – **34**, No. 8. – P. 605–616.
– [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(92\)90058-O](https://doi.org/10.1016/0020-7403(92)90058-O).

19. Wang C. Y. Vibrations of completely free rounded regular polygonal plates // Int. J. Acous. Vib. – 2015. – **20**, No. 2. – P. 107–112.
– <https://doi.org/10.20855/ijav.2015.20.2375>.

NUMERICAL EVALUATION OF FREQUENCIES AND MODES OF FREE VIBRATIONS OF ISOSCELES TRIANGULAR PLATES WITH FREE EDGES

Free vibrations are analyzed for isotropic plates in the form of isosceles triangles. A formula for the evaluation of the frequencies of free vibrations of plates of regular triangular shape with free edges is derived, and the coefficients of the vibration mode and boundary conditions are computed. The frequencies and modes of free vibrations of isotropic thin isosceles triangular plates with free edges and different apex angles are calculated by the finite element method.

Keywords: *triangular plates, free vibrations, coefficients of the vibration mode and boundary conditions, frequencies of vibrations, finite element method.*

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України

² Миколаїв. нац. аграр. ун-т

Одержано

12.08.20