

**МЕТОД ПРЯМОГО ВИРІЗУВАННЯ У МОДЕЛЮВАННІ ОРТОТРОПНИХ ТІЛ
З ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ**

З використанням методу прямого вирізування задачі поздовжнього зсуву ортотропних півпростору, шару та клина з тонким пружним ортотропним включенням зведено до базової задачі взаємодії системи тонких неоднорідностей в ортотропному просторі. Отримано умови взаємодії навантаженого пружного анізотропного включення з матрицею тіла. Досліджено вплив модулів пружності включення та тіла, а також геометричних параметрів задач на узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень, побудовано лінії рівня сталих напружень в околі включення.

Ключові слова: ортотропний матеріал, тонке включення, тріщина, півпростір, шар, клин, узагальнений коефіцієнт інтенсивності напружень, метод прямого вирізування, поздовжній зсув.

Вступ. Під час навантажування елементів конструкцій руйнування зазвичай зароджується в околах концентраторів напружень, зокрема тріщин, пружних чи жорстких включень тощо. Тому побудова нових математичних моделей для ефективного врахування впливу неоднорідностей на напружений стан навантажених тіл різної форми та пружних властивостей є визначальною для розуміння механізмів руйнування та розробки технологій виготовлення нових матеріалів та елементів конструкцій з покращеними властивостями, смарт-матеріалів тощо.

Задачу поздовжнього зсуву анізотропного півпростору з жорстким ізотропним включенням досліджували в роботі [20]. Вплив включення враховано за допомогою розподілу зосереджених сил невідомої густини. Задачу розв'язано з використанням методу комплексних потенціалів та зведено до сингулярного інтегрального рівняння. В [14] методом функцій стрибків розв'язано антиплоску задачу теорії пружності для анізотропного півпростору з тонким анізотропним пружним включенням. У [18] побудовано модель нелінійного пружного міжфазного включення у кусково-однорідному просторі за поздовжнього зсуву.

Важливим питанням є дослідження взаємодії тонких деформівних неоднорідностей в анізотропних структурах за поздовжнього зсуву. В [19] з використанням методу інтегральних перетворень Фур'є запропоновано методу розв'язування задач поздовжнього зсуву анізотропних шаруватих структур із системою тонких пружних включень. У [16] з використанням методів функцій комплексної змінної отримано розв'язок задачі поздовжнього зсуву періодичної системи міжфазних жорстких включень у кусково-однорідному анізотропному просторі. У [6] розв'язано задачу взаємодії міжфазних тунельних тріщини і жорсткого включення у кусково-однорідному анізотропному просторі. Проблематиці впливу тонких неоднорідностей на деформівні структури присвячено огляди [9–12].

Застосування аналітичних та аналітично-числових методів є ефективним, як правило, для обмежених тіл канонічної форми, а також простору, півпростору, пакету плоскопаралельних шарів, клинових пакетів. У випадку тіл складнішої геометрії або при розгляді викривлених профілів тонких включень використання таких методів є ускладненим. Натомість ефективним є застосування числових методів, зокрема методів граничних та скінченних елементів. У [15, 17] модифіковано схеми методу граничних елементів для дослідження анізотропних структур з тріщинами і тонкими включеннями. Застосування аналітично-числових методів у випадку обме-

[✉] kirill.all@gmail.com

жених тіл, як правило, вимагає значного обсягу аналітичних перетворень, які в кінцевому рахунку потребують числового розв'язання систем сингулярних інтегральних рівнянь числовими методами. З огляду на це для дослідження пружної рівноваги обмежених тіл з тонкими неоднорідностями структури було запропоновано використовувати аналітично-числовий метод прямого вирізування [1, 3, 5, 8].

Основна ідея цього методу полягає у моделюванні обмеженого однорідного чи кусково-однорідного тіла із системою тонких включень і тріщин за допомогою необмеженого простору з такими ж навантаженими неоднорідностями, а також додатковими тонкими неоднорідностями, які формують межі досліджуваного тіла та відповідні крайові умови на них. За допомогою навантажених тріщин формують крайові умови першого роду, а за допомогою впроваджених у матрицю тіла з певним натягом абсолютно жорстких включень – крайові умови другого роду. У такий спосіб задача для тіла скінченних розмірів зводиться до аналізу необмеженої у просторі структури, для якої, як було зазначено вище, застосування аналітично-числових методів є набагато простішим. Такий підхід був застосований до задач поздовжнього зсуву однорідних та кусково-однорідних ізотропних тіл [2, 5, 8] та плоскої деформації [4] обмежених ізотропних тіл із тонкими дефектами структури. Пізніше [3] метод прямого вирізування було поширено на випадок антипласкої анізотропії тіл із тріщинами за врахування крайових умов першого роду.

У цій роботі метод прямого вирізування застосовано для випадку пружної ортотропії тонких включень в обмежених структурах за крайових умов першого, другого і третього роду. Для надання отриманим залежностям універсального вигляду замість додаткових тріщин, які моделюють крайові умови першого роду [3], використано пружні ізотропні включення з дуже податливого матеріалу, а замість абсолютно жорстких включень, які моделюють крайові умови другого роду, – ізотропні включення з дуже жорсткого матеріалу. Таким чином задачу для обмеженого ортотропного тіла з тонкими неоднорідностями зведено до аналізу базової задачі для анізотропного простору з дещо збільшеною системою довільно орієнтованих тонких анізотропних пружних включень.

1. Формулювання базової задачі. Розглянемо антипласку деформацію анізотропного простору з модулями пружності a_{km} , $k, m = 4, 5$, що містить N довільно орієнтованих стрічкових пружних включень L_j , $j = 1, \dots, N$, з локальними системами координат $s^j O^j n^j$ у їхніх центрах $z_{0j} = x_{0j} + iy_{0j}$. Задано кути φ_j нахилу до горизонталі осей s^j , довжини, товщини та модулі пружності включень $2a^j$, $2h^j$, $a_{km}^{j, \text{in}}$, $k, m = 4, 5$, $j = 1, \dots, N$. Вважаємо, що включення не дотикаються. Простір може бути навантажений на нескінченності однорідними напруженнями $\sigma_{yz}^0 = \tau_1$, $\sigma_{xz}^0 = \tau_2$, а на верхньому та нижньому берегах j -го включення можуть діяти не обов'язково однакові складові $\tau^{j, \text{in}\pm}$ вектора напруження (рис. 1). Напружено-деформований стан у площинах, перпендикулярних до напрямку зсуву (вісь Oz), відповідно до концепції антипласкої задачі є однаковим, тому обмежимося аналізом полів у площині xOy .

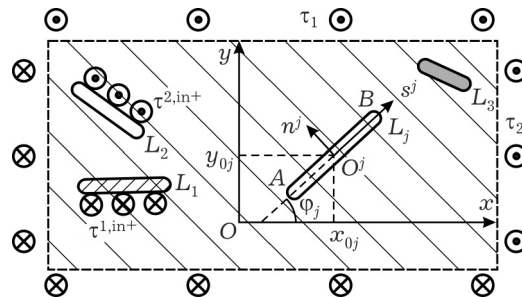


Рис. 1

2. Методика розв'язування.

2.1. Подання розв'язку. Згідно з методом функцій стрибків [11] тонкі неоднорідності вилучаємо з розгляду, а їхній вплив на матрицю замінюємо невідомими функціями стрибків напружень f_5^j та похідних від переміщень f_6^j на серединній лінії $L'_j \equiv [-a^j, a^j]$, $n^j = 0$, неоднорідності у її локальній системі координат $s^j O^j n^j$ (надалі для компактності замість « s^j » та « n^j » в індексах використовуватимемо лише « s » та « n »):

$$\sigma_{nz}^{j-} - \sigma_{nz}^{j+} = f_5^j(s^j), \quad \frac{\partial}{\partial s^j}(w^{j-} - w^{j+}) = f_6^j(s^j),$$

$$s^j \in L'_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

де $f_5^j = f_6^j = 0$ при $s^j \notin L'_j$, а позначки «+» і «-» стосуються відповідно верхнього та нижнього берегів неоднорідності. Напружений стан анізотропного простору з тонкою неоднорідністю L_j у її локальній системі координат стосовно невідомих функцій стрибків f_5^j , f_6^j побудовано в [11, 18], а для плоскої задачі – в [13]. Подамо його у такому вигляді:

$$\widehat{\sigma}_{nz}^j + i\widehat{\sigma}_{sz}^j = \frac{1}{4}(g_p^j t_5^j(z^j) - g_m^j t_5^j(\bar{z}^j)) + \frac{i}{4a_{55}^j \alpha^j}(g_p^j t_6^j(z^j) + g_m^j t_6^j(\bar{z}^j)),$$

$$t_r(z^j) = \frac{1}{\pi} \int_{L'_j} \frac{f_r^j(t)}{t - z^j} dt, \quad r = 5, 6,$$

$$g_p^j = \beta^j + i(1 + \alpha^j), \quad g_m^j = \beta^j + i(1 - \alpha^j), \quad i^2 = -1,$$

$$\alpha^j = \frac{\sqrt{a_{44}^j a_{55}^j - (a_{45}^j)^2}}{a_{55}^j}, \quad \beta^j = \frac{a_{45}^j}{a_{55}^j}, \quad z^j = s^j + (\beta^j + i\alpha^j)n^j. \quad (1)$$

Пружні сталі матеріалу a_{km}^j у системі координат $s^j O^j n^j$ описано формулами [7, 11]

$$a_{44}^j = a_{44} \cos^2 \varphi_j - 2a_{45} \sin \varphi_j \cos \varphi_j + a_{55} \sin^2 \varphi_j,$$

$$a_{45}^j = (a_{44} - a_{55}) \sin \varphi_j \cos \varphi_j + a_{45} (\cos^2 \varphi_j - \sin^2 \varphi_j),$$

$$a_{55}^j = a_{44} \sin^2 \varphi_j + 2a_{45} \sin \varphi_j \cos \varphi_j + a_{55} \cos^2 \varphi_j.$$

Застосувавши до (1) принцип суперпозиції розв'язків та врахувавши формули перетворення для тензора напружень при зміні системи координат, напружений стан анізотропного простору з системою N довільно орієнтованих неоднорідностей подамо у вигляді

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 + \sum_{j=1}^N (\widehat{\sigma}_{nz}^j + i\widehat{\sigma}_{sz}^j) e^{-i\varphi_j},$$

$$s^j + in^j = (x + iy - z_{0j}) e^{-i\varphi_j}. \quad (2)$$

Тут $\sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 = \tau_1 + i\tau_2$ – однорідні напруження для простору без дефектів, проте із тим самим зовнішнім навантаженням.

Перейдемо до системи координат ℓ -ї неоднорідності

$$\sigma_{nz}^{\ell} + i\sigma_{sz}^{\ell} = (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz})e^{i\varphi_{\ell}}, \quad x + iy = (s^{\ell} + in^{\ell})e^{i\varphi_{\ell}} + z_{0\ell}$$

та знайдемо граничні значення напружень $\sigma_{nz}^{\ell\pm}$ та похідних від переміщень $\partial w^{\ell}/\partial s^{\ell}$ на її берегах згідно з формулою Сохоцького – Племелі [11]:

$$\sigma_{nz}^{\ell\pm} = \mp \frac{1}{2} f_5^{\ell}(s^{\ell}) - \frac{1}{2\pi\alpha^{\ell} a_{55}^{\ell}} \int_{L'_{\ell}} \frac{f_6^{\ell}(t)}{t - s^{\ell}} dt + \sigma_{nz}^{\ell,\ell}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial w^{\ell\pm}}{\partial s^{\ell}} = \mp \frac{1}{2} f_6^{\ell}(s^{\ell}) + \frac{a_{55}^{\ell}\alpha^{\ell}}{2\pi} \int_{L'_{\ell}} \frac{f_5^{\ell}(t)}{t - s^{\ell}} dt + a_{45}^{\ell}\sigma_{nz}^{\ell,\ell} + a_{55}^{\ell}\sigma_{sz}^{\ell,\ell}, \quad (4)$$

де

$$\sigma_{nz}^{\ell,k} + i\sigma_{sz}^{\ell,k} = \sigma_{nz}^{\ell,\text{hom}} + i\sigma_{sz}^{\ell,\text{hom}} + \sum_{j=1, j \neq k}^N (\hat{\sigma}_{nz}^j + i\hat{\sigma}_{sz}^j) e^{i(\varphi_{\ell} - \varphi_j)},$$

$$s^j + in^j = (s^{\ell} e^{i\varphi_{\ell}} + z_{0\ell} - z_{0j}) e^{-i\varphi_j},$$

$$\sigma_{nz}^{\ell,\text{hom}} + i\sigma_{sz}^{\ell,\text{hom}} = (\sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0) e^{i\varphi_{\ell}},$$

верхній знак відповідає верхньому берегу неоднорідності, а нижній – нижньому; $\sigma_{nz}^{\ell,\text{hom}}$, $\sigma_{sz}^{\ell,\text{hom}}$ – однорідні напруження в системі координат ℓ -го включення.

2.2. Умови взаємодії. Оскільки включення є тонким, можна встановити зв'язок між напруженнями $\sigma_{nz}^{\ell,\text{in}\pm}$ і похідними від переміщень $\partial w^{\ell,\text{in}\pm}/\partial s^{\ell}$ на його верхньому «+» і нижньому «-» берегах. Індексом «in» позначено величини, що стосуються тонкого включення. Для ненавантаженого пружного анізотропного включення отримані на основі таких умов зв'язку та умов ідеального механічного контакту включення з матрицею «умови взаємодії» наведено в [11]. Аналогічно побудуємо умови взаємодії для пружного анізотропного включення за дії додаткових напружень $\tau^{\ell,\text{in}\pm}$ на його верхньому і нижньому берегах. Уважатимемо, що механічний контакт між включенням і матрицею є неідеальним. З огляду на протилежний напрям зовнішніх нормалей матриці і включення маємо

$$\sigma_{nz}^{\ell,\text{in}\pm} = \sigma_{nz}^{\ell\pm} + \tau^{\ell,\text{in}\pm}, \quad w^{\ell,\text{in}\pm} = w^{\ell\pm}. \quad (5)$$

Середні значення (позначені міткою «mid») напружень та похідних переміщень на осі неоднорідності запишемо у вигляді

$$\sigma_{nz}^{\ell,\text{in},\text{mid}} = \frac{1}{2} (\sigma_{nz}^{\ell,\text{in}+} + \sigma_{nz}^{\ell,\text{in}-}), \quad (6)$$

$$\frac{\partial w^{\ell,\text{in},\text{mid}}}{\partial s^{\ell}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{\ell,\text{in}+}}{\partial s^{\ell}} + \frac{\partial w^{\ell,\text{in}-}}{\partial s^{\ell}} \right). \quad (7)$$

У разі антиплоскої анізотропії включення справедливі співвідношення узагальненого закону Гюка

$$\sigma_{nz}^{\ell,\text{in},\text{mid}} = \frac{a_{45}^{\ell,\text{in}}}{a_{44}^{\ell,\text{in}}} \frac{\partial w^{\ell,\text{in},\text{mid}}}{\partial n^{\ell}} - \frac{a_{45}^{\ell,\text{in}}}{a_{44}^{\ell,\text{in}}} \sigma_{sz}^{\ell,\text{in},\text{mid}}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial w^{\ell,\text{in},\text{mid}}}{\partial s^{\ell}} = \frac{a_{45}^{\ell,\text{in}}}{a_{44}^{\ell,\text{in}}} \frac{\partial w^{\ell,\text{in},\text{mid}}}{\partial n^{\ell}} + \frac{|r^{\ell,\text{in}}|^2}{a_{44}^{\ell,\text{in}}} \sigma_{sz}^{\ell,\text{in},\text{mid}}, \quad (9)$$

$$|r^{\ell, \text{in}}| = \sqrt{a_{44}^{\ell, \text{in}} a_{55}^{\ell, \text{in}} - (a_{45}^{\ell, \text{in}})^2}.$$

З умови рівноваги елемента $[-a^\ell, s^\ell]$ тонкого включення

$$2h^\ell (\sigma_{sz}^{\ell, \text{in, mid}}(s^\ell) - \sigma_{sz}^{\ell, \text{in, mid}}(-a^\ell)) + \int_{-a^\ell}^{s^\ell} (\sigma_{nz}^{\ell, \text{in}+} - \sigma_{nz}^{\ell, \text{in}-}) dt = 0$$

визначимо середні напруження $\sigma_{sz}^{\ell, \text{in, mid}}$ на $s^\ell \in [-a^\ell, a^\ell]$, $n^\ell = 0$,

$$\begin{aligned} \sigma_{sz}^{\ell, \text{in, mid}}(s^\ell, 0) &= \sigma_{sz}^{\ell, \text{in, mid}}(-a^\ell, 0) + \\ &+ \frac{1}{2h^\ell} \int_{-a^\ell}^{s^\ell} (\sigma_{nz}^{\ell, \text{in}+}(t, 0) - \sigma_{nz}^{\ell, \text{in}-}(t, 0)) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Середні значення похідних переміщень $\partial w^{\ell, \text{in, mid}} / \partial n^\ell$ запишемо, здійснюючи такі перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{\ell, \text{in, mid}}}{\partial n^\ell} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{\ell, \text{in}+}}{\partial n^\ell} + \frac{\partial w^{\ell, \text{in}-}}{\partial n^\ell} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{w^{\ell, \text{in}}(s^\ell, h^\ell) - w^{\ell, \text{in}}(s^\ell, 0)}{h^\ell} + \right. \\ &+ \left. \frac{w^{\ell, \text{in}}(s^\ell, 0) - w^{\ell, \text{in}}(s^\ell, -h^\ell)}{h^\ell} \right) = \\ &= \frac{w^{\ell, \text{in}}(s^\ell, h^\ell) - w^{\ell, \text{in}}(s^\ell, -h^\ell)}{2h^\ell} \approx \frac{w^{\ell, \text{in}+} - w^{\ell, \text{in}-}}{2h^\ell} = \\ &= \frac{1}{2h^\ell} \left(\int_{-a^\ell}^{s^\ell} \frac{\partial w^{\ell, \text{in}+}}{\partial t} - \frac{\partial w^{\ell, \text{in}-}}{\partial t} dt + w^{\ell, *(-a^\ell)} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Тут $w^{\ell, *}(-a^\ell) = w^{\ell, \text{in}+}(-a^\ell) - w^{\ell, \text{in}-}(-a^\ell)$. При виведенні формули (11) вважали, що $w^{\ell, \text{in}}(s^\ell, \pm h^\ell) \approx w^{\ell, \text{in}\pm}(s^\ell, 0)$. Таке припущення відповідає так званій «плівковій» моделі включення. В [11] з використанням розвинень переміщень $w^{\ell, \text{in}}(s^\ell, \pm h^\ell)$ у ряди Тейлора та врахуванням першої похідної від переміщень побудовано точнішу «основну» математичну модель включення. Нижче обчислення здійснено лише для плівкової моделі включення.

Підстановка (8), (9) відповідно у (6), (7) з урахуванням розвинень (10), (11), а також умов неідеального механічного контакту (5) дає таку математичну плівкову модель взаємодії матриці з навантаженим напруженнями $\tau^{\ell, \text{in}\pm}$ анізотропним пружним включенням:

$$\begin{aligned} \sigma_{nz}^{\ell+} + \sigma_{nz}^{\ell-} + \tau^{\ell, \text{in}+} + \tau^{\ell, \text{in}-} + \frac{1}{h^\ell a_{44}^{\ell, \text{in}}} \int_{-a^\ell}^{s^\ell} a_{45}^{\ell, \text{in}} (\sigma_{nz}^{\ell-} - \sigma_{nz}^{\ell+} + \tau^{\ell, \text{in}-} - \tau^{\ell, \text{in}+}) dt + \\ + \frac{1}{h^\ell a_{44}^{\ell, \text{in}}} \int_{-a^\ell}^{s^\ell} \left(\frac{\partial w^{\ell-}}{\partial t} - \frac{\partial w^{\ell+}}{\partial t} \right) dt = \\ = -2 \frac{a_{45}^{\ell, \text{in}}}{a_{44}^{\ell, \text{in}}} \sigma_{sz}^{\ell, \text{in, mid}}(-a^\ell) + \frac{w^{\ell, *}}{h^\ell a_{44}^{\ell, \text{in}}}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial w^{\ell+}}{\partial s_\ell} + \frac{\partial w^{\ell-}}{\partial s_\ell} - \frac{1}{h^\ell a_{44}^{\ell, \text{in}}} \int_{-a^\ell}^{s^\ell} |r^{\ell, \text{in}}|^2 (\sigma_{nz}^{\ell-} - \sigma_{nz}^{\ell+} + \tau^{\ell, \text{in}-} - \tau^{\ell, \text{in}+}) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h^\ell a_{44}^{\ell, \text{in}}} \int_{-a^\ell}^{s^\ell} a_{45}^{\ell, \text{in}} \left(\frac{\partial w^{\ell-}}{\partial t} - \frac{\partial w^{\ell+}}{\partial t} \right) dt = \\
& = 2 \frac{|r^{\ell, \text{in}}|^2}{a_{44}^{\ell, \text{in}}} \sigma_{sz}^{\ell, \text{in}, \text{mid}}(-a^\ell) + \frac{a_{45}^{\ell, \text{in}}}{a_{44}^{\ell, \text{in}}} \frac{w^{\ell, *}}{h^\ell}, \quad \ell = 1, \dots, N. \quad (13)
\end{aligned}$$

Сталі $\sigma_{sz}^{\ell, \text{in}, \text{mid}}(-a^\ell)$ та $w^{\ell, *}(a^\ell)$ відповідають напруженням на торці включення, а також величині зміщення верхнього берега торця неоднорідності відносно нижнього. Визначимо їх апріорними залежностями [11]:

$$\sigma_{sz}^{\ell, \text{in}, \text{mid}}(-a^\ell) \approx \sigma_{sz}^{\ell, \text{hom}}(-a^\ell, 0) \frac{a_{44}^\ell}{\max(a_{44}^\ell, a_{44}^{\ell, \text{in}})}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
w^{\ell, *}(a^\ell) & = (w^{\ell, \text{in}+}(-a^\ell) - w^{\ell, \text{in}-}(-a^\ell)) \frac{\min(a_{44}^\ell, a_{44}^{\ell, \text{in}})}{a_{44}^\ell} \approx \\
& \approx (w^{\ell+}(-a^\ell) - w^{\ell-}(-a^\ell)) \frac{\min(a_{44}^\ell, a_{44}^{\ell, \text{in}})}{a_{44}^\ell} \approx \\
& \approx 2h^\ell \frac{\partial w^\ell(-a^\ell)}{\partial n^\ell} \frac{\min(a_{44}^\ell, a_{44}^{\ell, \text{in}})}{a_{44}^\ell} = \\
& = 2h^\ell (a_{44}^\ell \sigma_{nz}^\ell(-a^\ell) + a_{45}^\ell \sigma_{sz}^\ell(-a^\ell)) \frac{\min(a_{44}^\ell, a_{44}^{\ell, \text{in}})}{a_{44}^\ell} \approx \\
& \approx 2h^\ell \left(a_{44}^\ell \left(\sigma_{nz}^{\ell, \text{hom}}(-a^\ell, 0) + \frac{1}{2}(\tau^{\ell, \text{in}+} + \tau^{\ell, \text{in}-}) \right) + \right. \\
& \left. + a_{45}^\ell \sigma_{sz}^{\ell, \text{in}, \text{mid}}(-a^\ell) \right) \frac{\min(a_{44}^\ell, a_{44}^{\ell, \text{in}})}{a_{44}^\ell}. \quad (15)
\end{aligned}$$

Такий спосіб подання торцевих сталей (14), (15) є точним для трьох граничних випадків пружних властивостей пружного тонкого включення, що відповідають тріщині, абсолютно жорсткому включенню та включенню з матеріалу матриці. В [11] наведено також інші способи обчислення торцевих сталей. Проте практика свідчить, що використання апріорних залежностей типу (14), (15) забезпечує доволі точні результати.

Підстановка (3), (4) у (12), (13) дає систему $2N$ сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків. Додаткові умови рівноваги і однозначності переміщень при обході навколо кожного з дефектів

$$\int_{-a^\ell}^{a^\ell} f_5^\ell(t) dt = 2a^\ell (\tau^{\ell, \text{in}+} - \tau^{\ell, \text{in}-}), \quad \int_{-a^\ell}^{a^\ell} f_6^\ell(t) dt = 0, \quad \ell = 1, \dots, N,$$

дають змогу розв'язати систему сингулярних інтегральних рівнянь методом колокацій [11], який полягає у розвиненні функцій стрибків у початковій сумі рядів з виділеною кореневою особливістю

$$f_r^\ell(t) \approx \sum_{m=0}^{M_\ell} \frac{A_m^{r\ell} T_m(t/a^\ell)}{\sqrt{1 - (t/a^\ell)^2}}, \quad r = 5, 6; \quad \ell = 1, \dots, N, \quad (16)$$

та задоволенні системи отриманих після інтегрування рівнянь на скінченному наборі точок колокації $s^{\ell, k} \in (-a^\ell, a^\ell)$, $k = 1, \dots, M_\ell$. Тут $A_m^{r\ell}$ – шукані

коефіцієнти скінченних сум (16), T_m – поліноми Чебишова першого роду, M_ℓ – кількість членів розвинення в ряд функцій стрибків. У такий спосіб систему сингулярних інтегральних рівнянь зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь $2\sum_{\ell=1}^N (M_\ell + 1)$ -го порядку, з якої визначаємо функції стрибків (16), а отже, згідно з формулами (1), (2), напружений стан анізотропного простору із системою тонких анізотропних включень.

Важливим параметром критерію опору матеріалу до початку руйнування матриці в околі торців включення є узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН). Для пружних включень у анізотропному матеріалі УКІН у вершинах A чи B обчислюємо за формулами [11]

$$K_{3,2}^{(A,B)} - iK_{3,1}^{(A,B)} = \mp \left(p_5^{\ell\pm} + \frac{i}{a_{55}^\ell \alpha^\ell} p_6^{\ell\pm} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$p_r^{\ell\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm a^\ell} \left(\sqrt{|a^\ell \mp t|} f_r^\ell(\pm a^\ell) \right), \quad r = 5, 6; \quad \ell = 1, \dots, N.$$

Тут верхній знак відповідає вершині B , а нижній – вершині A .

3. Числові приклади та обговорення. Дослідимо достовірність і ефективність методу прямого вирізування на прикладах поздовжнього зсуву анізотропних тіл із тонкою неоднорідністю L_1 . Лінійні розміри у базовій задачі віднесемо до півдовжини a^1 неоднорідності L_1 , а компоненти модулів пружності тіла a_{km} і включень $a_{km}^{\ell, \text{in}}$, $k, m = 4, 5$, $\ell = 1, \dots, N$, де N – кількість включень базової задачі, віднесемо до компоненти модуля пружності a_{55} матриці тіла. Товщини неоднорідностей вважатимемо однаковими $h^\ell = 0.01a^1$, $\ell = 1, \dots, N$.

Крайові умови першого роду (вільні від навантаження або навантажені межі тіла) моделюємо за допомогою навантажених або вільних від навантаження дуже податливих ізотропних включень (фактично тріщин) з модулями пружності $a_{45}^{j, \text{in}}/a_{55} = 0$, $a_{44}^{j, \text{in}} = a_{55}^{j, \text{in}} = 10^6 a_{55}$. Пружними податливими включеннями з такими самими пружними характеристиками моделюватимемо також інші наявні у тілі тріщини.

Крайові умови другого роду (жорстко закріплені межі) моделюємо за допомогою дуже жорстких ізотропних включень із модулями пружності $a_{45}^{j, \text{in}}/a_{55} = 0$, $a_{44}^{j, \text{in}} = a_{55}^{j, \text{in}} = 10^{-6} a_{55}$. Ці самі пружні характеристики застосуємо для моделювання абсолютно жорстких стрічкових включень.

Розподілене навантаження інтенсивності τ уздовж відрізка всередині тіла моделюватимемо за допомогою розташованого вздовж цього відрізка пружного включення за навантаження одного з його берегів відповідними напруженнями τ . Модулі пружності включення для цього випадку збігаються з модулями пружності матеріалу матриці.

При формулюванні основної задачі зовнішнє навантаження безмежного простору взято у вигляді однорідного поля заданих на нескінченності сталих напружень σ_{yz}^0 , σ_{xz}^0 . Йому відповідає однорідний розв'язок – напруження для простору без дефектів. Якщо ж задати зосереджене силове чи дислокаційне навантаження, то однорідним розв'язком будуть відповідні залежні від координат функції. Тоді однорідний розв'язок можна використовувати у методі прямого вирізування при дослідженні впливу зосереджених сил і дислокацій, як це зроблено у [8]. Нижче однорідний розв'язок взято нульовим: $\sigma_{yz}^0 = \sigma_{xz}^0 = 0$.

Для прикладу застосування методу вирізування розглянуто три види матеріалу: ізотропний (I) з параметрами $a_{44}/a_{55} = 1$, $a_{45} = 0$, ортотропні (II) з $a_{44}/a_{55} = 2/3$, $a_{45} = 0$ та (III) з $a_{44}/a_{55} = 3/2$, $a_{45} = 0$. Обчислення виконано з урахуванням $M_\ell = 80$, $\ell = 1, \dots, N$, перших членів розвинення функцій стрибків у ряди за поліномами Чебишова. Це забезпечило отримання УКІН з похибкою не вище 1%. У прикладах аналізуємо УКІН, нормовані відповідним до задачі навантаженням τ і півдовжиною досліджуваної неоднорідності L_1 : $K_{3,i}^{0,A,B} = K_{3,i}^{1A,B} / (\tau\sqrt{\pi a^1})$, $i = 1, 2$.

Приклад 1. Дослідимо напружений стан ортотропного жорстко закріпленого на поверхні півпростору (лінії півплощини) $y = 0$ із симетрично навантаженою зусиллями τ тріщиною L_1 . Нехай $(0, H)$ – відносні координати центра тріщини ($H = y_{01}/a^1$); $2a^1$ – її довжина. За допомогою методу прямого вирізування зведемо вихідну задачу до базової для ортотропного простору (площини) з двома пружними включеннями L_1 , L_2 (рис. 2, рис. 3).

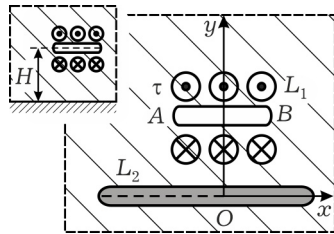


Рис. 2

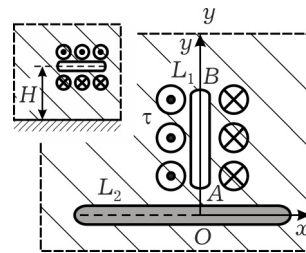


Рис. 3

Розглянемо випадок тріщини, паралельної до межі області (рис. 2), де $H = 1$, $\varphi_1 = 0$. У табл. 1 наведено результати обчислення нормованих УКІН $K_{3,1}^{0,A} = K_{3,1}^{0,B}$ для податливого включення L_1 за різних відносних довжин $a = a^2/a^1$ моделюючої тріщини та згаданих вище трьох видів матеріалу тіла. Оскільки включення дуже податливе, то $K_{3,2}^{0,A} = K_{3,2}^{0,B} \approx 0$.

Таблиця 1

a	0.5	1	2	4	8	16
I	0.999	0.995	0.965	0.937	0.927	0.925
II	0.999	0.993	0.948	0.916	0.907	0.905
III	0.999	0.996	0.978	0.954	0.945	0.942

Спостерігаємо, як зі збільшенням відносної довжини a УКІН прямують до остаточних значень, які можна вважати наближеними значеннями коефіцієнтів інтенсивності напружень для задачі поздовжнього зсуву тріщини у півпросторі із зацементованою межею. Меншу за 1% похибку отримано вже при $a = 8$ для всіх розглянутих видів матеріалу.

Якщо $H = 2$ і тріщина є перпендикулярною до межі області ($\varphi_1 = \pi/2$, рис. 3), то так само, як у випадку її горизонтального розташування, зі збільшенням параметра a моделюючої тріщини нормовані значення УКІН біля A і B прямують (табл. 2) до граничного значення для зацементованої межі простору (півплощини). У табл. 2 подано результати обчислення нормованих УКІН $K_{3,1}^{0,A}$ (верхні частини клітинок) та $K_{3,1}^{0,B}$ (їхні нижні частини); $K_{3,2}^{0,A} = K_{3,2}^{0,B} \approx 0$.

Таблиця 2

a	0.5	1	2	4	8	16
I	0.990	0.976	0.961	0.956	0.955	0.955
	0.996	0.990	0.980	0.975	0.974	0.974
II	0.987	0.971	0.959	0.955	0.955	0.955
	0.995	0.987	0.978	0.974	0.974	0.974
III	0.993	0.981	0.965	0.957	0.955	0.955
	0.997	0.992	0.983	0.976	0.974	0.974

Як і для випадку навантаженої тріщини у півпросторі з вільною межею [3], можна зробити висновок про незалежність УКІН від міри ортотропії матеріалу матриці.

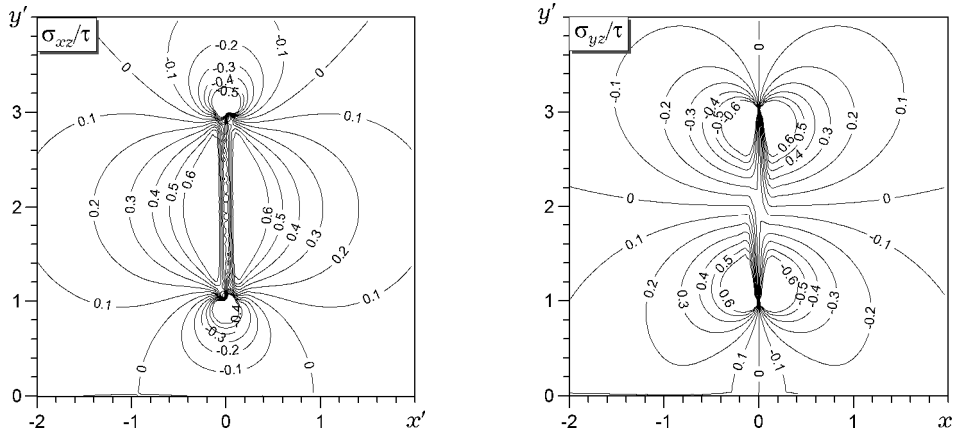


Рис. 4

На рис. 4 показано лінії рівня нормованих сталих напружень σ_{xz}/τ , σ_{yz}/τ цієї задачі, обчислені з використанням методу прямого вирізування для ізотропного матеріалу у безрозмірних координатах $x' = x/a^1$, $y' = y/a^1$. Оскільки межа півпростору є жорстко защемленою, то значення σ_{xz}/τ при $y' = 0$ є близькими до нуля. Біля вершин навантаженої тріщини через високу концентрацію напружень спостерігаємо значне згущення ліній рівня. Оскільки задача є симетричною відносно осі $x' = 0$, то за заданого навантаження лінії рівня нормованих сталих напружень σ_{xz}/τ є симетричними стосовно цієї осі, а σ_{yz}/τ – антисиметричними, у зв'язку з чим $\sigma_{yz}/\tau \approx 0$ при $x' = 0$.

Приклад 2. Дослідимо напружений стан ортотропного півпростору з вільною межею за наявності у ньому абсолютно жорсткого включення L_1 , яке є паралельним до межі півпростору, $(0, H)$ – відносні координати центра неоднорідності ($H = y_{01}/a^1$), $2a^1$ – її довжина. Зовнішнє навантаження задано симетричним розподілом напружень τ уздовж вертикальних відрізків завдовжки $2a^1$, $x = \pm a^1(1 + d)$, $y \in [a^1(-1 + H), a^1(1 + H)]$, на відносній відстані d від вершин неоднорідності (рис. 5). За допомогою методу прямого вирізування зведемо задачу до базової для ортотропного простору з чотирма пружними тонкими включеннями L_1 (основне, великої жорсткості), L_2 (моделююче, малої жорсткості), L_3 та L_4 (з матеріалу матриці).

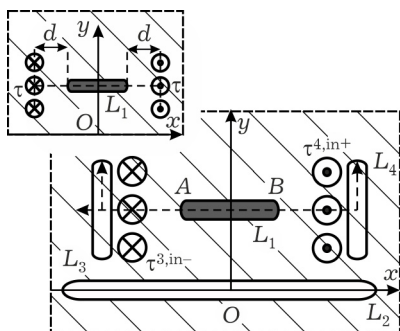


Рис. 5

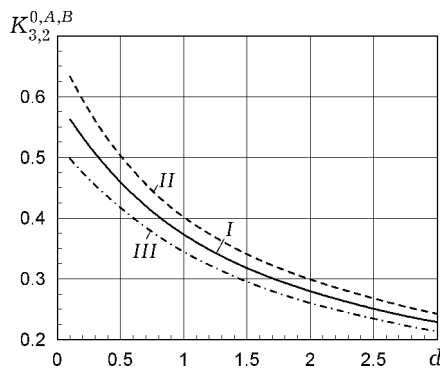


Рис. 6

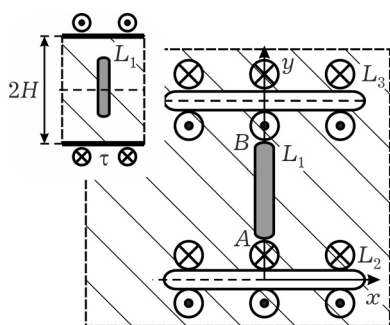


Рис. 7

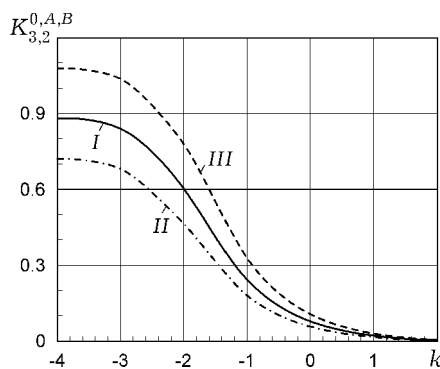


Рис. 8

На рис. 6 наведено графіки залежності УКІН $K_{3,2}^{0,A,B}$ ($K_{3,1}^{0,A,B} \approx 0$) від d для ізотропного (суцільна лінія) та двох ортотропних матеріалів при $H = 2$. Зі збільшенням відстані d прикладення навантаження УКІН монотонно зменшуються. З наближенням розподіленого навантаження до вістря абсолютно жорсткого включення УКІН зростають, проте є обмеженими.

Приклад 3. Дослідимо напружений стан ортотропного симетрично навантаженого зусиллями τ шару за наявності у ньому центрального стрічкового включення L_1 , яке є перпендикулярним до меж шару. Відносна ширина шару – $2H$, $(0, H)$ – відносні координати центра неоднорідності; $2a^1$ – її довжина; $\varphi_1 = \pi/2$ – кут повороту відносно осі абсцис. За допомогою методу прямого вирізування зведемо вихідну задачу до базової (рис. 7) для ортотропного простору з трьома пружними включеннями L_1, L_2, L_3 .

У табл. 3 подано результати обчислення нормованих УКІН $K_{3,2}^{0,A} = K_{3,2}^{0,B}$ ($K_{3,1}^{0,A} = K_{3,1}^{0,B} \approx 0$) для різних відносних довжин моделюючої тріщини $a = a^2/a^1 = a^3/a^1$ та трьох розглянутих видів матеріалу матриці при $2H=3$, $\varphi_1 = \pi/2$ у випадку абсолютно жорсткого ізотропного включення L_1 .

Таблиця 3

a	0.5	1	2	4	8	16
I	0.323	0.550	0.764	0.867	0.882	0.884
II	0.314	0.505	0.659	0.716	0.720	0.725
III	0.328	0.589	0.869	1.041	1.079	1.082

Як і в першому прикладі, спостерігаємо, що зі збільшенням відносної довжини a включення УКІН прямують до граничних значень для безмежного шару. Для $a = 8$ вони відрізняються менше ніж на 1% від результатів обчислення нормованих УКІН при $a = 16$ для усіх розглянутих випадків ортотропного матеріалу. Навантаження меж тіла можна моделювати, навантажуючи лише ближчі до L_1 береги неоднорідностей L_2 та L_3 . Тоді результати обчислення УКІН для включення L_1 відрізнятимуться від розглянутого випадку симетричного навантаження в межах похибки обчислень.

Досліджено випадок пружного включення всередині шару. На рис. 8 наведено графіки залежності УКІН $K_{3,2}^{0,A} = K_{3,2}^{0,B}$ ($K_{3,1}^{0,A} = K_{3,1}^{0,B} \approx 0$) від відносної жорсткості включення $k = \lg(a_{55}^{1,\text{in}}/a_{55})$ для трьох видів матеріалу матриці. Максимальні значення УКІН отримано для випадку дуже жорсткого включення ($a_{55}^{1,\text{in}} = 10^{-4} a_{55}$). Зі зростанням $a_{55}^{1,\text{in}}$ УКІН монотонно зменшуються і для дуже податливого включення, що є практично тріщиною ($a_{55}^{1,\text{in}} = 10^4 a_{55}$), прямують до нуля. За такої орієнтації неоднорідності УКІН не залежать від $a_{44}^{1,\text{in}}$.

Приклад 4. Дослідимо поздовжній зсув анізотропного клина із симетрично навантаженою зусиллями τ тріщиною L_1 на його бісектрисі. Верхня межа клина є вільною від навантаження, а нижня – жорстко зацмеленою. Кут розхилу клина 2φ . Центр тріщини L_1 розташовано на відносній відстані $d = x_{01}/a^1$ від вістря клина, а її довжина становить $2a^1$ (рис. 9). Застосовуючи метод прямого вирізування, задачу зводимо до розв'язування базової задачі для анізотропного простору з включеннями L_1, L_2, L_3 , де жорстке включення L_2 та дуже податливе включення L_3 (майже тріщина) моделюють межі клина із відповідними крайовими умовами.

Позначимо через $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ відстані від суміжних вершин неоднорідностей L_2, L_3 до точки перетину їхніх осьових ліній. Нехай $\varepsilon = \varepsilon_2/a^1 = \varepsilon_3/a^1$ – відносна відстань до віртуальної вершини клина; $a = a^2/a^1 = a^3/a^1$ – відносні півдовжини L_2 та L_3 .

У табл. 4 подано результати обчислення нормованих УКІН $K_{3,1}^{0A}$ (верхні значення у клітинках) та $K_{3,1}^{0B}$ (нижні значення) ($K_{3,2}^{0,A,B} = 0$) для лівого A і правого B фронтів тріщини для різних відносних довжин a та видів матеріалу для кута піврозхилу змодельованого клину $\varphi = \pi/6$, $\varepsilon = 10^{-3}$ та відносної відстані $d = 2$ між центром тріщини L_1 і вершиною клина. Зі збільшенням a нормовані УКІН прямують до граничних значень для клина. Вже для $a = 8$ та $a = 16$ обчислені значення УКІН відрізняються не більше ніж на 0.1%. Це дає підстави вважати отримані для $a = 16$ результати значеннями нормованих КІН навантаженої тріщини у клині.

Досліджено вплив параметра ε на швидкість збіжності методу прямого вирізування у цій задачі. Нехай $a = 16$, а відносна відстань від центра тріщини L_1 до вершини клина доволі мала, $d = 1.1$, оскільки зі зменшенням відстані між вістрям тріщини L_1 та вершиною O віртуального клина концентрація напружень збільшуватиметься і це вимагатиме зменшення ε .

У табл. 5 наведено результати обчислення нормованих УКІН $K_{3,1}^{0A}$ та $K_{3,1}^{0B}$ для різних значень параметра ε і видів матеріалу тіла. Високу

точність досягнуто вже для $\varepsilon = 0.01$, причому помітно, що міра ортотропії матеріалу також впливає на швидкість збіжності значень УКІН.

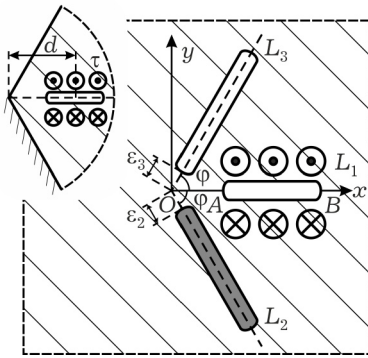


Рис. 9

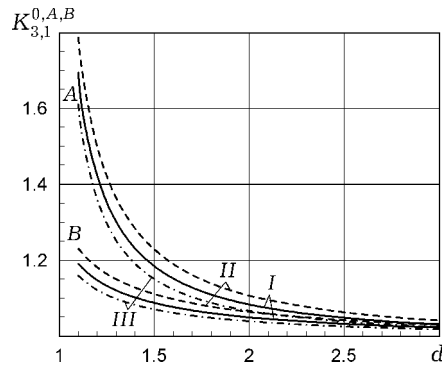


Рис. 10

Таблиця 4

a	$K_{3,1}^{0,A,B}$					
	0.5	1	2	4	8	16
I	0.9706 0.9944	1.0009 0.9756	1.0779 1.0387	1.0828 1.0487	1.0829 1.0489	1.0829 1.0489
II	0.9729 0.9966	0.9965 0.9687	1.1015 1.0517	1.1063 1.0633	1.1064 1.0633	1.1064 1.0633
III	0.9710 0.9925	1.0058 0.9829	1.0612 1.0302	1.0658 1.0384	1.0660 1.0387	1.0660 1.0387

Таблиця 5

ε	$K_{3,1}^{0,A}$				$K_{3,1}^{0,B}$			
	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.1	0.01	0.001	0.0001
I	1.5223	1.7030	1.6952	1.6941	1.1866	1.1907	1.1904	1.1903
II	1.6501	1.8070	1.7873	1.7853	1.2284	1.2310	1.2305	1.2305
III	1.4131	1.6113	1.6104	1.6101	1.1535	1.1592	1.1591	1.1591

На рис. 10 подано графіки залежності УКІН $K_{3,1}^{0,A,B}$ від відносної відстані d до вершини клина. Максимальні УКІН розглянутої задачі одержуємо за мінімальної відстані вістря тріщини до межі (вістря клина), так само, як і для клина з вільними межами [3]. Проте у випадку клина з обома жорстко зацмеленими межами УКІН тріщини біля вістря навпаки буде мінімальним.

Досліджено задачі поздовжнього зсуву ортотропних тіл із внутрішніми тріщинами за врахування крайових умов першого роду. Оскільки зіставленням отриманих результатів з результатами роботи [3] (метод прямого вирізування з використанням лише тріщин) виявлено їхнє узгодження в межах похибки обчислень, тут їх не наводимо.

Висновки. Метод прямого вирізування є придатним для розв'язування задач поздовжнього зсуву навантажених тонких пружних включень у анізотропних матеріалах. Його застосування дало змогу досліджувати усі основні типи крайових умов для обмежених анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями. Досліджено напружений стан анізотропних півпростору, шару та клина з жорсткими та пружними включеннями і тріщинами для різних типів крайових умов. Отримані результати збіглися з відомими з літератури з похибкою, не більшою від 1%. У рамках побудованої моделі виявлено також можливість моделювання впливу розподіленого вздовж

скінченного відрізка навантаження за допомогою навантаженого вздовж поперхні пружного включення з модулями пружності, ідентичними модулям пружності матеріалу матриці.

1. *Васильєв К. В., Сулим Г. Т.* Застосування методу прямого вирізування до розв'язування задачі поздовжнього зсуву клина з тонкими неоднорідностями довільної орієнтації // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 3. – С. 117–126.
Te same: *Vasil'ev K. V., Sulym H. T.* Application of the method of direct cutting-out to the solution of the problem of longitudinal shear of a wedge with thin heterogeneities of arbitrary orientation // *J. Math. Sci.* – 2012. – **180**, No. 2. – P. 122–134. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0634-x>.
2. *Васильєв К. В., Сулим Г. Т.* Метод прямого вирізування у задачах кусково-однорідних тіл з міжфазними тріщинами за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 4. – С. 44–57.
Te same: *Vasil'ev K. V., Sulym H. T.* Method of direct cutting-out in the problems of piecewise homogeneous bodies with interface cracks under longitudinal shear // *J. Math. Sci.* – 2019. – **238**, No. 1. – P. 46–62. – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04217-w>.
3. *Васильєв К. В., Сулим Г. Т.* Метод прямого вирізування у задачах пружної рівноваги анізотропних тіл з тріщинами за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. – **61**, № 3. – С. 89–100.
4. *Васильєв К. В., Сулим Г. Т.* Метод прямого вирізування у плоских задачах теорії пружності // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2017. – Вип. **15**. – С. 89–96.
5. *Васильєв К., Сулим Г.* Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування // *Машинознавство.* – 2006. – № 11-12. – С. 10–17.
6. *Кривий О. Ф.* Взаємний вплив міжфазних тунельних тріщини і включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 4. – С. 118–124.
Te same: *Kryvyy O. F.* Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface tunnel inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space // *J. Math. Sci.* – 2015. – **208**, No. 4. – P. 409–416. – <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2455-9>.
7. *Лехницький С. Г.* Теория упругости анизотропного тела – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
8. *Пастернак Я. М., Васильєв К. В., Сулим Г. Т.* Антиплоска деформація зосередженими чинниками обмежених тіл із тріщинами та жорсткими включеннями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 1. – С. 72–83.
Te same: *Pasternak Ia. M., Vasil'ev K. V., Sulym H. T.* Antiplane deformation by concentrated factors of bounded bodies with cracks and rigid inclusions // *J. Math. Sci.* – 2013. – **190**, No. 5. – P. 710–724. – <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1282-0>.
9. *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Ільчук Н. І.* Взаємодії фізико-механічних полів у тілах із тонкими структурними неоднорідностями: огляд // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. – **61**, № 2. – С. 57–79.
10. *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пастернак Р. М.* Вивчення напруженого стану тіл із функціональних структурно неоднорідних матеріалів: огляд публікацій до 2010 р. // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2015. – № 95. – С. 35–80.
11. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.
12. *Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З.* Умови контактної взаємодії тіл (Огляд) // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2004. – **47**, № 3. – С. 110–125.
13. *Павлычко В. М., Сулим Г. Т.* Плоская задача для линейных включений на границе раздела анизотропных материалов. – Львов, 1987. – 11 с. – Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 15.01.1987, № 330-В87.
14. *Шевчук С. П.* Вплив пружного стрічкового включення на деформацію поперхні анізотропного півпростору за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – **49**, № 3. – С. 125–130.

15. *Bozhydarnyk V., Pasternak Ia., Sulym H., Oliyarnyk N.* BEM approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities // *Acta Mech. Automat.* – 2011. – **5**, No. 4. – P. 11–16.
16. *Liu Y. W.* Antiplane problems of periodical rigid line inclusions between dissimilar anisotropic materials // *Appl. Math. Mech.* – 2001. – **22**, No. 10. – P. 1149–1154.
– <https://doi.org/10.1023/A:1016341132522>.
17. *Pasternak Ia., Sulym H.* Boundary element analysis of anisotropic thermomagneto-electroelastic solids with 3D shell-like inclusions // *Acta Mech. Automat.* – 2017. – **11**, No. 4. – P. 308–312. – <https://doi.org/10.1515/ama-2017-0047>.
18. *Sulym H., Piskozub Y., Polanski J.* Antiplane deformation of a bimaterial with thin interfacial nonlinear elastic inclusion // *Acta Mech. Automat.* – 2018. – **12**, No. 3. – P. 190–195. – <https://doi.org/10.2478/ama-2018-0029>.
19. *Sulym G., Shevchuk S.* Antiplane problem for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1999. – **37**, No. 1. – P. 47–63.
20. *Kondo T., Sekine H., Tamate O.* Longitudinal shear of anisotropic elastic half-space with an elastic flat inclusion // *Bull. JSME.* – 1985. – **28**, No. 239. – P. 761–768.
– <https://doi.org/10.1299/jsme1958.28.761>.

DIRECT CUTTING-OUT METHOD IN MODELLING OF ORTHOTROPIC SOLIDS WITH THIN ELASTIC INCLUSIONS UNDER LONGITUDINAL SHEAR

By means of the direct cutting-out method, the problems on the longitudinal shear of an orthotropic half-space, a layer, and a wedge with a thin elastic orthotropic inclusion are reduced to a basic problem on the interaction of thin inhomogeneities in an orthotropic space. The conditions for the loaded elastic anisotropic inclusion interacting with the body matrix are derived. The influence of the elastic moduli of both the inclusion and the body, as well as the geometric parameters of the problems, on the generalized stress intensity factors is investigated. The isoclines of stresses in the vicinity of the inclusion are plotted.

Keywords: *orthotropic material, thin inclusion, crack, half-space, layer, wedge, generalized stress intensity factor, direct cutting-out method, longitudinal shear.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.06.20