

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ПОЛЯРИМЕТРІЯ
ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ЧАСТКОВО ПРОЗОРОМУ ТІЛІ З
УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ТЕПЛОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ**

З використанням методу модуляційної поляриметрії та розробленої моделі термомеханіки частково прозорих тіл досліджено кінетику та динаміку температури і напружень у зразку із кварцу у формі паралелепіпеда. Експериментально підтверджено ефективність запропонованої моделі теплопереносу для опису теплового стану. Із задовільного узгодження отриманих експериментально та розрахованих характеристик напруженого стану робиться висновок про застосовність запропонованої математичної моделі і методу модуляційної поляриметрії у двох напрямках для тестування напруженого стану матеріалів і визначення їх фізичних констант.

Ключові слова: частково прозорі тверді тіла, теплове випромінювання, модель теплопереносу, модуляційна поляриметрія у двох напрямках, зразок із кварцу, температура, напруження.

Вступ. Розвиток і вдосконалення сучасних приладобудування, електронної (зокрема, мікроелектроніки), космічної, авіаційної та інших галузей техніки неможливі без застосування нових конструкційних матеріалів на основі кераміки, склокераміки, скла, ситалів, кварцу, феритів, пластмас та ін. неметалевих (діелектричних) матеріалів. На відміну від металів, які є непрозорими для електромагнітного випромінювання у видимому та інфрачервоному діапазонах (повне поглинання енергії випромінювання в приповерхневому шарі, порядку 10 ± 100 нм), для них характерною є часткова прозорість (повне поглинання енергії електромагнітного випромінювання при товщинах від часток міліметра до декількох метрів) у цих діапазонах [2, 8, 9, 17]. Тому властивості таких матеріалів можна досліджувати за параметрами їх напружено-деформованого стану експериментально неруйнівним методом з використанням поляризованого світла. Існує значний перелік методик фотопружності, зокрема [1, 22, 24, 26, 29], у яких зондування матеріалів здійснюється в певних напрямках електромагнітним випромінюванням з оптичного діапазону. Інформативними параметрами тут є величина зміни фази електромагнітних хвиль [18] або різниці фаз у випадку використання модуляційної поляриметрії (МП) [28].

У фотопружності досягнуто суттєвого прогресу у реєстраційній здатності мінімального значення величини фази електромагнітної хвилі в оптичному діапазоні, зокрема з огляду на конструкцію пристрою, що на фізичному принципі адекватно відповідає змісту терміну модулятор поляризації [13]. Цей принцип став підґрунтям оптико-поляризаційного методу, що отримав назву модуляційної поляриметрії [14]. Його функціонування базується на виявленні поляризованої компоненти випромінювання за рахунок модуляції та вимірюванні її величини чи зміни на принципі «від нуля». Досягнута при цьому виявна здатність систем на основі МП відносно величини анізотропії діелектричних властивостей на декілька порядків перевершує можливості традиційних методів фотопружності. Тому доцільним є використання надчутливого методу реєстрації явища лінійного подвійного променезаломлення у зразках з частково прозорих пружних матеріалів, фазова анізотропія в яких індукована механічними напруженнями від незначного перепаду температури. Як відомо [15], суть явища полягає у виникненні різниці у величинах показників заломлення для ортогональних

✉dept13@iapmm.lviv.ua

компонент лінійно поляризованої електромагнітної хвилі, азимуту поля яких орієнтовані паралельно до осей оптичної індикатриси. У цьому випадку, відповідно до прийнятої класифікації [11, 27], має місце лінійна фазова анізотропія, а визначення її особливостей, пов'язаних з різними видами теплопередачі (теплого навантаження) за незалежності коефіцієнтів від температури (при незначному нагріві), суттєво спрощується.

Інша сторона проблеми пов'язана з методикою реєстрації подвійного променезаломлення технікою МП електромагнітного випромінювання. В основі модуляції використано таку часову дію на хвилю, результатом якої є періодична зміна її стану поляризації при незмінних всіх інших параметрах. Величина частоти модуляції є обмежуючим фактором методики у реєстрації кінетичних і динамічних властивостей, оскільки процеси, які мають час релаксації менший від часу, що відповідає оберненій частоті модуляції, стають недоступними для реєстрації. Цей факт також обмежує перелік задач, у вирішенні яких можливе її використання. Тому необхідне випробування методики стосовно визначення ієрархії характеристичних часів релаксації фізичних процесів щодо реєстрації найменших величин температури і напружень.

Такі експериментальні дослідження напруженого стану можуть служити для підтвердження достовірності моделей механіки взаємозв'язаних полів, зокрема радіаційної термомеханіки стосовно частково прозорих тіл, що вимагає аналізу із залученням експериментальних даних наявних підходів, до опису процесів випромінювання і поглинання теплової енергії в таких тілах, а також застосовності наближених моделей теплопереносу при постановці задач термомеханіки. Частково такі дослідження на основі розробленої методики розв'язування нелінійних задач теплопереносу проведені в роботах [4, 5, 7, 19–21].

Однією з переваг методу МП є можливість визначати термонапружений стан, зумовлений настільки малими температурами (чи їх зміною), коли можна знехтувати залежністю від температури теплофізичних характеристик чи параметрів реєстрації. Саме за таких умов доцільно розпочинати вивчення закономірностей виникнення напруженого стану при контактній передачі теплової енергії до тіла через поверхню (тепловим потоком) чи безконтактній – в об'єм тіла (тепловиділеннями), зокрема електромагнітним випромінюванням світлового діапазону частот, як тепловим, так і нетепловим (лазерним), що їх вивчає радіаційна термомеханіка (термопружність).

1. Математичне моделювання теплового та напруженого станів частково прозорих тіл за врахування впливу теплового випромінювання. При описі термонапруженого стану частково прозорих тіл використаємо відомі співвідношення динамічної чи квазістатичної лінійної незв'язаної задачі термопружності [10, 16], які включають:

– рівняння, що описують механічні поля – рівняння руху (рівноваги)

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1)$$

(тут σ_{ij} , u_i – компоненти тензора напружень і вектора переміщень, а ρ – густина тіла);

– співвідношення Дюгамеля – Неймана

$$\sigma_{ij} = [\lambda_m u_{\ell,\ell} - (3\lambda_m + 2\mu) \phi(T, T_0)] \delta_{ij} + 2\mu u_{i,j}, \quad (2)$$

які пов'язують компоненти σ_{ij} тензора напружень з компонентами тензора деформації $\epsilon_{ij} = u_{i,j}$ (співвідношення Коші) при відомому розподілі температури у тілі.

Тут $\phi(T, T_0) = \alpha_t(T - T_0)$, де T – температура, в загальному випадку функція координат і часу, T_0 – початкова температура, α_t – коефіцієнт лінійного температурного розширення; $\lambda_m = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – сталі Ляме, де E – модуль Юнга, а ν – коефіцієнт Пуассона; t – час; δ_{ij} – символ Кронекера; кома перед індексом означає диференціювання за відповідними координатами, а повторювані індекси – підсумовування. Через x_i позначаємо декартові координати точок тіла, а через \mathbf{x} надалі будемо позначати радіус-вектор точки тіла. Для незв'язаної задачі (температурна задача теорії пружності) температура у тілі визначається з рівняння теплопровідності [12, 16]

$$(\mathbf{x}T_{,i})_{,i} + Q = \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

де α , c_ε – коефіцієнт теплопровідності та питома теплоємність, Q – об'ємні тепловиділення, які визначаються процесами різної фізичної природи (хімічними, дисипацією електромагнітної енергії та ін.). Для термочутливих тіл враховується залежність величин ν , E , α_t , α , c_ε , ρ від температури

T , а $\phi(T, T_0) = \int_{T_0}^T \alpha_t(T_*) dT_*$. Зауважимо, що у частково прозорих тілах теп-

ловиділення Q можуть бути пов'язані, зокрема, з переносом теплового випромінювання, джерелом якого є як інші навколишні нагріті тіла, так і саме досліджуване тіло. Для них рівняння теплопровідності (3) потрібно доповнити квазістаціонарним рівнянням переносу випромінювання [8, 17], отриманим феноменологічно на підставі закону Бугера. Це рівняння є узагальненням рівняння переносу геометричної оптики для тіл низької електропровідності [6], якщо врахувати власне випромінювання тіла (яке вважають ізотропним), і має вигляд

$$\frac{dI_\lambda(\mathbf{x}, t, \mathbf{g}_0)}{dg} = a_\lambda(\mathbf{x}) [I_{m\lambda}(\lambda, T) - I_\lambda(\mathbf{x}, t, \mathbf{g}_0)]. \quad (4)$$

Тут λ – довжина хвилі електромагнітного випромінювання, $I_\lambda(\mathbf{x}, t, \mathbf{g}_0)$ – спектральна інтенсивність випромінювання у тілі, яка є функцією координат, часу t і напрямку, який характеризується ортом \mathbf{g}_0 (g – віддаль у напрямку поширення променя); $I_{m\lambda}(\lambda, T) = n_\lambda^2 I_{\lambda b}(\lambda, T)$ – спектральна інтенсивність власного випромінювання, яку визначають через спектральний показник заломлення n_λ і спектральну інтенсивність випромінювання абсолютно чорного тіла $I_{\lambda b}(\lambda, T)$ при температурі T :

$$I_{\lambda b}(\lambda, T) = \frac{2\pi c_1}{\lambda^5 \exp(c_2/\lambda T - 1)},$$

де c_1 , c_2 – відомі сталі [2, 4]; $a_\lambda(\mathbf{x})$ – спектральний коефіцієнт поглинання.

Рівняння (4) визначає перенос у тілі як власного теплового випромінювання, так і випромінювання від оточуючих тіл, яке можна врахувати при окресленні граничних умов на поверхні [6].

Гранична умова для рівняння (4) описує зв'язок на поверхні тіла спектральної інтенсивності випромінювання у ньому (спектральної інтенсивності ефективного випромінювання $I_\lambda^{\text{ef}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_0)$, що відходить від елемента dS поверхні тіла в точці \mathbf{x} у напрямку \mathbf{g}_0 всередину тіла) з інтенсивністю

падаючого випромінювання (за визначених експериментально коефіцієнтів відбивання і заломлення) з урахуванням балансу всіх потоків, що підводяться до поверхні S (у тому числі й перевідбитих всередині тіла). Ця умова є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду [8, 17].

Враховуючи електромагнітну природу теплового випромінювання, його вплив на тепловий стан частково прозорого тіла пов'язуємо з об'ємними тепловиділеннями [6]. Вираз для них отримуємо базуючись на рівнянні переносу (4) і відомому виразі для тепловиділень у тілі низької електропровідності, знайдених на основі підходів наближення геометричної оптики електромагнітної теорії. Тоді об'ємна густина тепловиділень через інтенсивність випромінювання $I_\lambda(\mathbf{x}, t, \mathbf{g}_0)$ у тілі виражається формулою [6, 17]

$$Q = \int_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(\mathbf{x}) [\eta_\lambda(\mathbf{x}, t) - \eta_{m\lambda}(T)] d\lambda. \quad (5)$$

Тут

$$\eta_\lambda(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma=4\pi} I_\lambda(\mathbf{x}, t, \mathbf{g}_0) d\Gamma_{\mathbf{g}_0} \quad (6)$$

– густина потоку падаючого випромінювання, а $\eta_{m\lambda}(T) = 4\pi I_{m\lambda}(T)$ – густина потоку власного ізотропного випромінювання. Інтегрування в (5), (6) виконується за тілесним кутом Γ ($d\Gamma_{\mathbf{g}_0}$ – його елемент).

Розв'язок рівняння (4) можемо записати у вигляді

$$I_\lambda(\theta_\lambda, \mathbf{g}_0) = I_\lambda^{\text{ef}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_0) \exp(-\theta_\lambda) + \int_0^{\theta_\lambda} I_{m\lambda}(\lambda, T) \exp[-(\theta_\lambda - \theta_\lambda^*)] d\theta_\lambda^*, \quad (7)$$

де $\theta_\lambda(\mathbf{x}) = \int_0^{g(x_i)} a_\lambda(g^*) dg^*$ – оптична товщина шляху, $g(x_i)$ – віддаль від поверхні до точки \mathbf{x} у напрямку променя, а ефективна інтенсивність I_λ^{ef} випромінювання на поверхні визначається з граничної умови для рівняння (4). Тоді з урахуванням (7) рівняння (3) можемо подати у вигляді

$$(\mathbf{x}T_i)_{,i} + Q_{\text{ef}} + Q_{\text{ir}}^{(a)} - Q_{\text{ir}} = \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} Q_{\text{ef}} &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \left[a_\lambda(\mathbf{x}) \int_{\Gamma=4\pi} I_\lambda^{\text{ef}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_0) \exp(-\theta_\lambda) d\Gamma_{\mathbf{g}_0} \right] d\lambda, \\ Q_{\text{ir}}^{(a)} &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ a_\lambda(\mathbf{x}) \int_{\Gamma=4\pi} \left[\int_0^{\theta_\lambda} I_{m\lambda}(\lambda, T) \exp(-(\theta_\lambda - \theta_\lambda^*)) d\theta_\lambda^* \right] d\Gamma_{\mathbf{g}_0} \right\} d\lambda, \\ Q_{\text{ir}} &= 4\pi \int_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(\mathbf{x}) I_{m\lambda}(\lambda, T) d\lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

Складова Q_{ir} тепловиділень пов'язана з випромінюванням кожною точкою тіла теплової енергії, $Q_{\text{ir}}^{(a)}$ – з поглинанням цієї енергії, а Q_{ef} – як з поглинанням енергії зовнішнього випромінювання, так і перевідбитого поверхнею власного. Складова Q_{ef} за нехтування перевідбиванням у тілі власного випромінювання визначає джерела тепла, обумовлені зовнішнім опроміненням і не залежить від температури.

Отже, для визначення температури у тілі отримуємо нелінійне інтегродиференціальне рівняння (8) зі змінними коефіцієнтами, яке розв'язуємо сумісно з інтегральним рівнянням, що описує ефективну I_{λ}^{ef} інтенсивність випромінювання на поверхні. При значних інтенсивностях зовнішнього випромінювання (високих температур джерела порівняно з наявною температурою тіла) використовують наближення невідпромінюючого тіла [4, 6], за якого у виразах (9) покладають $I_{m\lambda}(\lambda, T) = 0$. Тоді в рівнянні теплопереносу (8) залишається тільки складова тепловиділень Q_{ef} .

Теплові крайові умови формулюємо, як прийнято в літературі, на основі умов неперервності нормальних складових теплового потоку на поверхні тіла (умов балансу теплових потоків). Зокрема, якщо тіло перебуває в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температура $T^{\text{ext}}(t)$ якого задана як функція від часу, то обмін теплом описується за законом Ньютона [12], і крайова умова має вигляд

$$(\alpha T_i) n_i = \alpha_S(\mathbf{x}) [T(\mathbf{x}, t) - T^{\text{ext}}(t)], \quad \mathbf{x} \in S, \quad (10)$$

де $\alpha_S(\mathbf{x})$ – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні S тіла.

У співвідношення сформульованих задач теплопереносу і термодружності для термочутливих частково прозорих тіл входять певні теплофізичні, радіаційні та механічні характеристики, залежності яких від температури і способи апроксимації експериментальних даних проаналізовано в працях [4, 20]. Особливості опису спектральних залежностей радіаційних характеристик, які забезпечують співпадіння з експериментальними вимірюваннями температури, досліджено в [7]. Зокрема, коефіцієнт поглинання a_{λ} запропоновано апроксимувати такою кусково-сталою функцією:

$$a_{\lambda} = \begin{cases} a_1, & 0 < \lambda \leq \lambda_{\text{th}}, \\ a_2, & \lambda_{\text{th}} < \lambda \leq \lambda_{\text{max}}, \\ a_3, & \lambda_{\text{max}} < \lambda \leq \infty, \end{cases} \quad (11)$$

де λ_{th} – порогова довжина хвилі, λ_{max} – верхня межа діапазону оптичних вимірювань.

2. Методика експерименту. Оптична схема для вимірювання еластооптичного ефекту є класичною [1]. Вона складається як мінімум із трьох елементів: лінійного чи циркулярного поляризатора, аналізатора та об'єкта дослідження, розміщеного між ними. Сучасні вимоги до підвищення виявної та інформативної здатності експериментальних методів стимулювали розвиток поляриметрії за рахунок її модуляції. Результати цього вдосконалення детально викладено у [10]. Для дослідження еластооптичного ефекту використовуємо оптичну схему, зображену на рис. 1.

Основним елементом схеми є фотопружний модулятор поляризації 5, функціонування якого налаштоване на реєстрацію оптичної анізотропії та лінійного двоприменезаломлення, що виникає при лінійному (одновісному) напруженому стані [10, 16].

За такої умови зразок має властивості фазової пластинки, розповсюджуючись через яку лінійно поляризоване випромінювання, відповідно до геометрії досліду, набуває еліптичної поляризації [6]. Циркулярна компонента у її складі є мірою величини анізотропії. Модулятор поляризації 5 спільно з аналізатором 7 виконують роль динамічного аналізатора стану поляризації, виокремлюючи змінну на частоті модуляції (50 кГц) циркулярну поляризовану компоненту хвилі. Згідно з властивостями поляризаційної оптики інтенсивність цієї компоненти визначається співвідношенням

$$I_V = E_x E_y \sin \Delta\varphi, \quad (12)$$

де $\Delta\varphi = 2\pi(d/\lambda)\Delta n$. Тут d – товщина зразка в напрямку поширення випромінювання, $\Delta n = n_x - n_y$ – різниця показників заломлення в напрямках осей Ox , Oy .

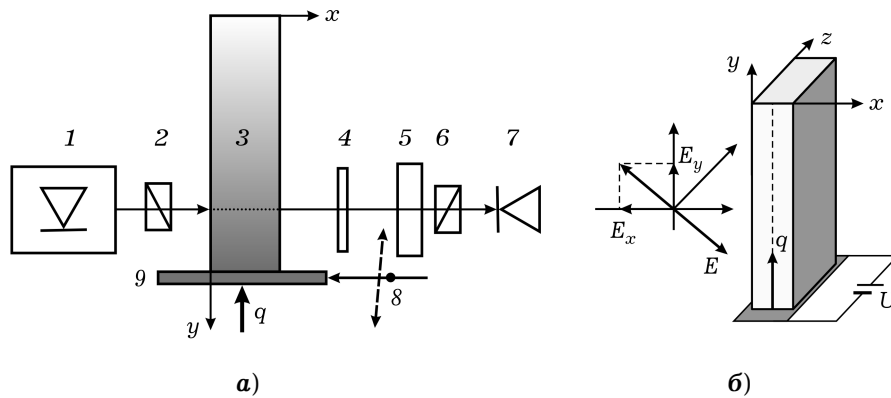


Рис. 1. а) – Оптична схема експерименту: 1 – лазерний діод; 2, 6 – поляризатори; 3 – зразок; 4 – фазова пластинка; 5 – модулятор поляризації; 7 – фотодетектор; 8 – пристрій переміщення зразка уздовж осі y ; 9 – півковий резистор.

б) – Геометрія експерименту: \mathbf{E} – напруженість та орієнтація електричного поля хвилі зондувального випромінювання; q – тепловий потік від джерела нагріву; U – джерело струму живлення нагрівача.

Таким чином, з урахуванням (12) вимірювання здійснюється в межах лінійності функції синуса, що є метрологічною перевагою. Для того щоб різниця фаз ортогональних компонент лінійно поляризованого випромінювання, що поширюється в анізотропному зразку, забезпечувала ефективно її перетворення в циркулярну, вісь поляризатора 2, а отже, і напрямок напруженості електричного поля \mathbf{E} , повинні утворювати певний кут відносно осей еліпсоїда (оптичної індикатрис) зразка 3. Цей кут, згідно з (12), визначається рівністю ортогональних компонент поля ($E_x = E_y$) і становить 45° відносно оптичної осі зразка (рис. 1б).

Для вимірювання температурних напружень використовували зразок у формі паралелепіпеда розмірами $1 \times 5 \times 2$ [см] в напрямку осей Ox , Oy , Oz , вирізаний із заготовки з кварцового скла, призначеного для виготовлення оптичних виробів. Всі його поверхні полірувалися для зняття поверхневих залишкових напружень і зменшення розсіювання зондувального випромінювання. Зразок в напрямку осі Oy встановлювався на ситалову підкладку з нікелевою плівкою – резистором 9 на її поверхні, який був джерелом нагріву. Електроживленням резистора встановлювалась потужність джерела тепла ~ 1 Вт у стаціонарному режимі. Тепловий контакт зразка на резисторі забезпечувався за допомогою теплопровідної пасти, яка також фіксувала його положення.

Усі вимірювання проводилися при кімнатній температурі. Джерелом 1 зондувального випромінювання був напівпровідниковий лазер. Зауважимо, що роль лінійного поляризатора 2 полягає в «очищенні» випромінювання від практично завжди присутньої з різних причин циркулярної компоненти. Оскільки довжина хвилі зондувального випромінювання λ і товщина зразка d в напрямку його поширення відомі, то інтенсивність I_V відповідає величині і знаку оптичної анізотропії Δn . За умови $\Delta\varphi \ll 1$, яка задовольняється при вимірюваннях, і при невеликих лінійних деформаціях (в межах пружності) величина оптичної анізотропії є мірою механічного напруження $\Delta\varphi = C\sigma$, де σ – інтегральна характеристика напруженого стану, що зале-

жить від усіх компонент σ_{ij} тензора напружень у напрямку зондування [1]. Еластооптичний коефіцієнт C (величина фази на одиницю механічного напруження) визначається додатковим вимірюванням анізотропії при деформації зразка зовнішнім контрольованим зусиллям. Таким чином, у величині і знаку циркулярної компоненти випромінювання, що поширилось крізь зразок, міститься інформація про величину і знак внутрішніх температурних напружень у зразку, що виникли внаслідок нагріву.

Сканування зразка зондувальним променем проводили послідовно при його переміщенні відносно джерела світла уздовж осей Oy та Oz за допомогою керованого кроковим двигуном пристрою. Вимірювали величину циркулярної компоненти вектора Стокса I_V для **трьох варіантів**:

- I) як функцію y -координати зразка вздовж напрямку теплового потоку в характерні моменти часу його розповсюдження;
- II) як функцію часу в трьох точках тієї ж y -координати;
- III) як функцію z -координати при значенні $y = 1$ см.

Як допоміжні проводилися вимірювання зміни температури $\Delta T(t)$, $\Delta T(y)$ із застосуванням тепловізора і напівпровідникового датчика. Результати вимірювань порівнювали з даними, отриманими з перерахунків двопротенезаломлення.

3. Результати експерименту та їх інтерпретація. Із результатів вимірювань насамперед впливає, що всі реальні речовини у конденсованому стані є неоднорідні, і внаслідок цього їм властива діелектрична анізотропія, нижня межа величини якої визначається виявною здатністю пристроїв для її вимірювання. У нашому випадку оптична анізотропія, що пов'язана з неоднорідністю зразка, виявилися на два порядки вищою виявної здатності вимірювальної системи. Незважаючи на те, що відпал матеріалу зразка, як і при хімічному його травленні, практично усуває поверхневий натяг і згладжує внутрішні неоднорідності, сигнал від залишкових напружень у зразку визначався величиною, що на два порядки перевищує рівень шуму. З урахуванням цього, величина напруження σ , індукована тепловим потоком, визначалася як різниця відповідних значень в умовах нагріву і без нього.

Отримані результати вимірювання **за варіантом I** подані на рис. 2 у вигляді залежностей величини анізотропії в зразку від координати y . Відкалібровані в значеннях одновісного напруження σ , ці залежності зареєстровані при наявності теплового потоку через $t = 1, 5$ і 20 хв після включення джерела тепла.

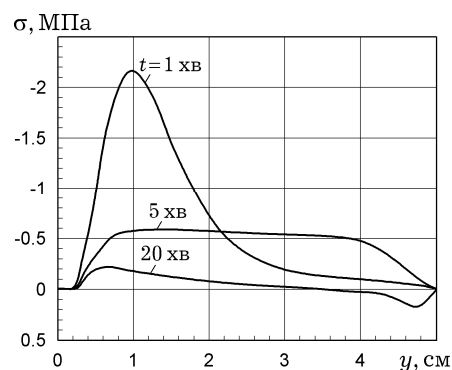


Рис. 2. Розподіл за координатою характеристики термонапружень $\sigma(y)$ у різні моменти часу.

У контрольному досліді встановлено, що від'ємний знак напружень відповідає деформації стиску в y -напрямі, а протилежні знаки у розподілі

уздовж зразка пов'язані з орієнтацією оптичної індикатриси, що відрізняється на 90° і відповідає зміні знаку різниці показників заломлення Δn .

Аналіз отриманих результатів проводили з урахуванням того факту, що амплітуди залежностей, наведених на рис. 2, визначаються співвідношенням $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \sigma$ (як і при лінійному (одновісному) напруженому стані). Це означає, що індукована неоднорідною температурою деформація пружного твердого тіла в цьому випадку описується рівнянням Пуассона у вигляді

$$\frac{\partial^2 u_*}{\partial y^2} \sim -\frac{\sigma}{\eta}, \quad (13)$$

де u_* – потенціал, який, крім температури, може бути пов'язаний, наприклад, з хімічним потенціалом чи енергією Фермі [23]; $1/\eta$ – коефіцієнт пропорційності. Тому описана вище методика застосовна до визначення напружень у багатокомпонентному тілі (напівпровідниковий кристал, скло) спричинених неоднорідністю складу або дефектністю структури («заморожена» термопружність).

Оскільки експериментальні криві, наведені на рис. 2, є функціями, пропорційними правій частині рівняння (13), вони можуть бути використані для визначення зміни в часі і за координатою температури за результатами вимірювань напружень (обернена задача). Це представляє інтерес, зокрема, коли для розв'язання задачі нестационарного теплопереносу недостатньо даних про теплофізичні властивості матеріалу, а також невідомі реальні умови теплообміну. Отримані таким чином розподіли температури можна використати для підтвердження застосовності моделей теплопереносу, особливо тих, що враховують вплив теплового випромінювання.

Розподіли температури просто отримати подвійним графічним інтегруванням експериментальних залежностей напружень з використанням рівняння (13), забезпечивши умову визначеності інтеграла. Для цього необхідно, по-перше, встановити величину постійної складової температури, яка визначається меншим значенням температури на кінці зразка. По-друге, встановити зв'язок абсолютних величин другої похідної функції температури і функції напружень як меж інтегрування. Обидві вимоги задовольняються проведенням додаткових разових вимірювань, які виконують роль граничних умов при інтегруванні диференціальних рівнянь.

На рис. 3 показано результат інтегрування функції $\sigma(y)$, який відповідає кривій на рис. 2 у момент часу $t = 1$ хв, у вигляді функції $\Delta T(y)$ – величини перевищення поточною температурою її значення на холодному кінці зразка (крива 1), а також виміряна температура при $t = 1$ хв (крива 2).

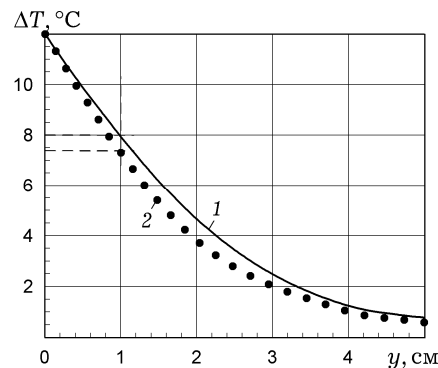


Рис. 3. Розподіл $\Delta T(y)$, отриманий графічним інтегруванням функції $\sigma(y)$ (крива 1), і вимірюванням температури на поверхні (крива 2).

Вимірювання температури на поверхні проводили мініатюрним напівпровідниковим датчиком при переміщенні його по поверхні xOy зразка в напрямку осі Oy . Отримано достатньо задовільне співпадіння якісного характеру зміни температури, оскільки наведені величини стосуються відповідно об'єму і поверхні зразка.

4. Розрахунок температури і напружень. Теорія і експеримент. Для знаходження температури у зразку у формі паралелепіпеда $0 \leq x \leq x_\ell$, $0 \leq y \leq y_\ell$, $0 \leq z \leq z_\ell$ (рис. 4) використовуємо описану в п. 1 модель теплопереносу. При цьому вважаємо, що на поверхні $0 \leq x \leq x_\ell$, $y = 0$, $0 \leq z \leq z_\ell$ підтримується постійна температура T_S (що забезпечується терморезистором), і вона є джерелом теплового випромінювання, яке поширюється вглиб зразка. Спектральну інтенсивність такого випромінювання визначаємо, як для абсолютно чорного тіла:

$$\bar{I}_\lambda(x, z) = I_{\lambda b}(\lambda, T_S) = \text{const}.$$

Інші поверхні зразка знаходяться в умовах (10) конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Враховуємо власне теплове випромінювання у зразку, спектральна інтенсивність якого має вигляд

$$I_{m\lambda}(x, y, z) = n_\lambda^2 I_{\lambda b}(\lambda, T(x, y, z)).$$

Надалі досліджуємо незначну зміну температури, тому нехтуємо термочутливістю теплофізичних і радіаційних характеристик матеріалу зразка. Тоді температура T відповідно до (8) описується таким рівнянням:

$$\begin{aligned} \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + 4 \int_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda I_{m\lambda}(x, y, z) d\lambda - \\ - 2 \int_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda^2 \left[\int_{x_*=0}^{x_\ell} \int_{y_*=0}^{y_\ell} \int_{z_*=0}^{z_\ell} I_{m\lambda}(x, y, z) A(a_\lambda, x, y, z, x_*, y_*, z_*) dx_* dy_* dz_* \right] d\lambda - \\ - 2y \int_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda n_\lambda^2 \left[\int_{x_*=0}^{x_\ell} \int_{z_*=0}^{z_\ell} \bar{I}_\lambda(x_*, z_*) B(a_\lambda, x, y, z, x_*, z_*) dx_* dz_* \right] d\lambda = 0, \quad (14) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A(a_\lambda, x, y, z, x_*, y_*, z_*) &= \frac{\exp(-a_\lambda \sqrt{(x-x_*)^2 + (y-y_*)^2 + (z-z_*)^2})}{(x-x_*)^2 + (y-y_*)^2 + (z-z_*)^2}, \\ B(a_\lambda, x, y, z, x_*, z_*) &= \frac{\exp(-a_\lambda \sqrt{(x-x_*)^2 + y^2 + (z-z_*)^2})}{(\sqrt{(x-x_*)^2 + y^2 + (z-z_*)^2})^3}. \end{aligned}$$

Для кварцового скла [9] коефіцієнт заломлення вважаємо постійним у всьому спектральному діапазоні $n_\lambda = n$, а коефіцієнт поглинання a_λ апроксимуємо згідно з (11) кусково-сталою функцією

$$a_\lambda = \begin{cases} a_1, & 0 < \lambda < \lambda_{th}, \\ a_2, & \lambda_{th} < \lambda \leq \infty. \end{cases}$$

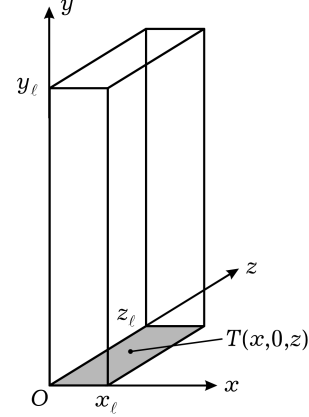


Рис. 4

Тоді, виконавши інтегрування в (14) по довжині хвилі λ , отримуємо

$$\begin{aligned}
\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + 4\sigma_B n^2 (a_1 F_{0 \rightarrow \lambda_{th}} + a_2 (1 - F_{\lambda_{th} \rightarrow \infty})) T^4(x, y, z) - \\
- 2\sigma_B n^2 a_1^2 F_{0 \rightarrow \lambda_{th}} \left[\int_{x_*=0}^{x_\ell} \int_{y_*=0}^{y_\ell} \int_{z_*=0}^{z_\ell} T^4(x, y, z) A(a_1, x, y, z, x_*, y_*, z_*) dx_* dy_* dz_* \right] - \\
- 2\sigma_B n^2 a_2^2 (1 - F_{\lambda_{th} \rightarrow \infty}) \left[\int_{x_*=0}^{x_\ell} \int_{y_*=0}^{y_\ell} \int_{z_*=0}^{z_\ell} T^4(x, y, z) A(a_2, x, y, z, x_*, y_*, z_*) dx_* dy_* dz_* \right] - \\
- 2y\sigma_B T_S^4 n^2 a_1 F_{0 \rightarrow \lambda_{th}} \int_{x_*=0}^{x_\ell} \int_{z_*=0}^{z_\ell} B(a_1, x, y, z, x_*, z_*) dx_* dz_* - \\
- 2y\sigma_B T_S^4 n^2 a_2 (1 - F_{\lambda_{th} \rightarrow \infty}) \int_{x_*=0}^{x_\ell} \int_{y_*=0}^{y_\ell} B(a_2, x, y, z, x_*, z_*) dx_* dz_* = 0, \quad (15)
\end{aligned}$$

де σ_B – стала Стефана – Больцмана. Згідно з припущеннями про характер теплообміну зразка, граничну умову на поверхні контакту з терморезистором запишемо у вигляді

$$T = T_S, \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_\ell, \quad y = 0, \quad 0 \leq z \leq z_\ell. \quad (16)$$

На всіх інших поверхнях зразка маємо умови

$$\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial x} e_x \right) + \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} e_y \right) + \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial z} e_z \right) = \alpha_S [T(x, y, z, t) - T^{\text{ext}}(t)], \quad (17)$$

де e_x, e_y, e_z – напрямні косинуси цих поверхонь. За початкову вибирали умову

$$T(x, y, z, t)|_{t=0} = T_0. \quad (18)$$

Для обчислень використовували такі теплофізичні та радіаційні характеристики кварцового скла [4, 9]:

$$\alpha = 1.38 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad \rho = 2210 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad c_\varepsilon = 728 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$\alpha_S = 6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}), \quad n = 1.458, \quad a_1 = 100 \text{ м}^{-1}, \quad a_2 = 1000 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda_{th} = 2.73 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \quad T_0 = T^{\text{ext}} = 293 \text{ К}, \quad T_S = 310 \text{ К}.$$

Досліджували зразок таких розмірів:

$$x_\ell = 1 \text{ см}, \quad y_\ell = 5 \text{ см}, \quad z_\ell = 2 \text{ см}.$$

Числове розв'язування крайової задачі (15)–(18) проводили на основі розробленої в роботах [3, 4, 7, 19, 20, 30] методики розв'язування наведених у п. 1 нелінійних задач теплопереносу. Також виконували експериментальне дослідження температури в часі у різних точках бокової поверхні зразка за допомогою згаданого вище датчика.

Результати проведених досліджень показано на рис. 5 і рис. 6 у точках $y = 1, 2.5, 4$ см.

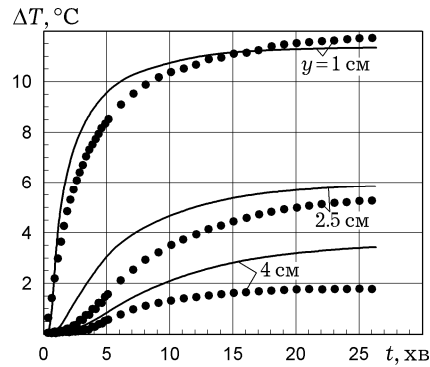


Рис 5. Порівняння розрахунку відхилення температури $\Delta T(t)$ від початкової за співвідношеннями, які враховують процеси теплопровідності, випромінювання і поглинання теплової енергії та конвективний теплообмін (суцільні криві), з результатами вимірювань.

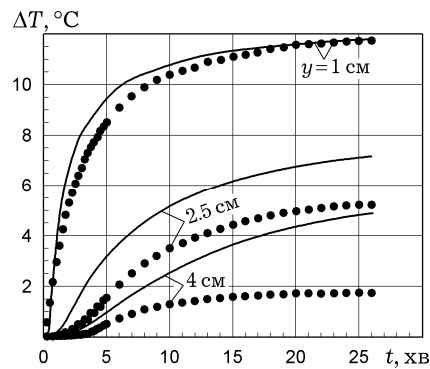


Рис 6. Порівняння розрахунку відхилення температури $\Delta T(t)$ від початкової за спрощеною моделлю (невипромінюючого тіла) з урахуванням лише процесів теплопровідності та конвективного теплообміну ($I_{m\lambda}(x, y, z) = 0$, $\bar{I}_\lambda(x, z) = 0$) (суцільні криві) з результатами вимірювань.

Бачимо, що модель теплопереносу, яка враховує випромінювання і поглинання теплової енергії, дає результати, що краще узгоджуються з експериментом, особливо в точках, що знаходяться на більшій віддалі від джерела нагріву. Це підтверджує суттєвий вплив процесів переносу випромінювання на тепловий стан у зразку.

Розрахунок напружень у зразку за знайденого (чисельно) розподілу температури у ньому проводили згідно зі співвідношеннями (1), (2) чисельно методом скінченних елементів у середовищі COMSOL, при таких граничних умовах (умовах закріплення), які відповідають умовам експерименту при визначенні напружень:

- бічні поверхні і верхній торець – вільні від силового навантаження;
- переміщення нижнього торця (який підігрівався терморезистором) вважаємо рівними нулеві, оскільки він вільно контактує з підкладкою.

Механічні характеристики для кварцового скла, згідно зі стандартами на його виготовлення, вибирали такими:

$$E = 73.6 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0.18, \quad \alpha_t = 4 \cdot 10^{-7} \text{ К}^{-1}.$$

Результати вимірювання подвійного променезаломлення за **варіантом II** показано на рис. 7 у вигляді залежностей від часу величини напружень

(анізотропії), спричинених нагрівом, у трьох фіксованих точках $y = 1, 2.5, 4$ см уздовж координати y . Зауважимо, що для всіх залежностей відправною точкою є початок координат, тому що значення залишкових напружень, які довільним чином залежать від координати y , компенсовано обертанням фазової пластинки на певний кут. Така процедура, яка не спотворює результатів вимірювань, дозволяє відобразити в деталях динаміку процесу теплопереносу на початковій стадії нагріву. Як виявилось, напруження виникає в будь-якій точці зразка уздовж осі Oy практично одночасно з включенням нагрівача. На цьому ж рисунку показано розраховані значення напружень σ_{yy} у точці $x = 0.5$ см, $y = 2.5$ см, $z = 0$.

Достовірність отриманого результату з точки зору наявного співвідношення величини сигнал-шум не викликає сумніву, а обґрунтування може бути отримано лише теоретичним дослідженням теплового та напруженого станів.

Також теорія і експеримент підтверджує нагрівання в усьому зразку з моменту включення нагрівача, що теж пояснюється специфікою впливу випромінювання, і підтверджує результати вимірювань напружень, подані на рис. 7.

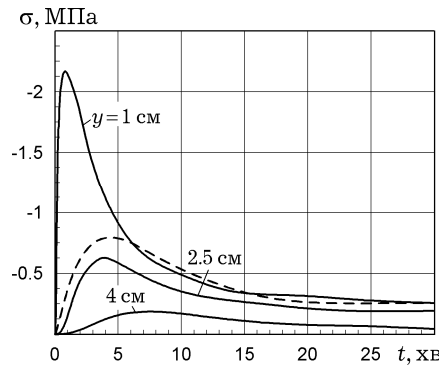


Рис. 7. Кінетика величини $\sigma(t)$ в деяких точках y -координати зондуючого променя (суцільні криві) і розраховані значення напружень σ_{yy} при $y = 2.5$ см (штрихова крива).

Результати вимірювання поперечного розподілу напружень $\sigma(z)$ (за **варіантом III** як функції z -координати при $y = 1$ см) показано на рис. 8а штриховою лінією. На відміну від значень напружень $\sigma(y)$ поздовжнього розподілу, вони можуть бути розтягувальними. На цьому ж рисунку суцільною лінією зображено розподіл відхилення температури ΔT , отриманий подвійним інтегруванням $\sigma(z)$ з тією різницею, що внаслідок геометричної симетрії умов дослідження, різниця температур визначалася не кінцями зразка, а значеннями на поверхні при $y = 1$ см у точках зондування поперечного розподілу (рис. 2). У підсумку інтервали, що показані штриховими лініями на осі ординат на рис. 3 і правої шкали на рис. 8а стають однаковими. Зазначимо, що поперечний розподіл $\sigma(x)$ (при скануванні в напрямку осі Ox) відрізняється від наведеного лише значеннями напружень, що залежать від y -координати сканування. На рис. 8б подано розрахований розподіл напружень $\sigma_{yy}(z)$ на поверхні (при $x = 1$ см, $y = 1$ см) для різних моментів часу.

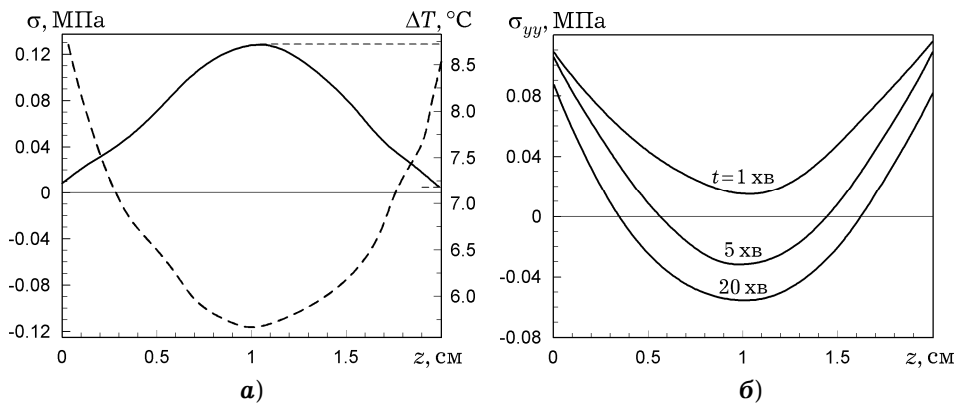


Рис. 8. **а)** – Отримана експериментально функція напружень $\sigma(z)$ в позиції променя $y = 1$ см (штрихова крива) і розподіл $\Delta T(z)$, розрахований подвійним інтегруванням (суцільна крива); **б)** – Розрахований розподіл напружень $\sigma_{yy}(z)$ у різні моменти часу.

Порівняння наведених графіків на рис. 8а і рис. 8б координатних, а на рис. 7 часових залежностей свідчить про якісне узгодження отриманих експериментально інтегральних характеристик напружень σ і розрахункових σ_{yy} . Отримані значення цих характеристик напруженого стану мають однаковий порядок величин.

Висновки. Отримані результати вказують на ефективність методу модуляційної поляриметрії у поєднанні з математичним моделюванням для оцінки напруженого стану в частково прозорих елементах конструкцій і приладів та водночас на можливість його використання при вдосконаленні підходів інтегральної фотопружності [1, 25].

1. Абен Х. К. Интегральная фотоупругость. – Таллин: Валгус, 1975. – 218 с.
2. Блох А. Г., Журавлев Ю. А., Рыжков Л. Н. Теплообмен излучением: Справочник. – Москва: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.
3. Брухаль М., Терлецький Р., Фундак О. Методика числового розв'язування нелінійних задач теплоперенесення в тілах різної прозорості для теплового випромінювання // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2007. – Вип. 13. – С. 59–71.
4. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б. Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 202–219.
Te same: *Nachkevych A. R., Terletskii R. F., Brukhal' M. B. Some problems of mathematical modeling in thermomechanics of bodies of various transparencies subjected to thermal irradiation // J. Math. Sci. – 2010. – 165, No. 3. – P. 403–425.*
5. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б. Моделювання та дослідження теплового та напруженого станів в опромінюваній системі з шарів різної прозорості, розділених непоглинаючим середовищем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 4. – С. 124–136.
Te same: *Nachkevych O. R., Terletskii R. F., Brukhal' M. B. Modeling and investigation of thermal and stressed states in an irradiated system of layers with different transparencies separated by nonabsorbing media // J. Math. Sci. – 2020. – 247, No. 1. – P. 157–172. – <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04794-1>.*
6. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Курницький Т. Л. Механотермодифузія в частково прозорих тілах. – Львів: Сполом, 2007. – 184 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 2.
7. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Сосновий Ю. Р., Брухаль М. Б. Механічна поведінка охолоджуваних тіл з урахуванням випромінювання теплової енергії // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 42–50.

- Te same: *Nachkevych O. R., Terlets'kyi R. F., Sosnovyi Yu. R., Brukhal' M. B.* Mechanical behavior of cooled bodies with regard for the emission of heat energy // *Mater. Sci.* – 2010. – **46**, No. 1. – P. 47–55.
8. *Зигель Р., Хауелл Дж.* Теплообмен излучением. – Москва: Мир, 1975. – 935 с.
Te same: *Siegel R., Howell J. R.* Thermal radiation heat transfer – New York: McGraw Hill, 1972. – xiv+814 p.
 9. *Излучательные свойства твердых материалов: Справочник / Под ред. А. Е. Шейдлина.* – Москва: Энергия, 1974. – 471 с.
 10. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
 11. *Ландсберг Г. С.* Оптика. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1957. – 760 с.
 12. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 599 с.
Te same: *Luikov A. V.* Analytical heat diffusion theory. – New York: Acad. Press, 1968. – 702 p.
 13. *Максименко Л. С., Матяш И. Е., Минайлова И. А., Мицук О. Н., Руденко С. П., Сердега Б. К.* Модуляционная стокс-поляриметрия амплитудно-фазовых характеристик поверхностного плазмон-поляритонного резонанса // *Оптика и спектроскопия. Физическая оптика.* – 2010. – **109**, № 5. – С. 870–875.
 14. *Матяш И. Е., Минайлова И. А., Мицук О. Н., Сердега Б. К.* Кинетика и динамика двулучепреломления, индуцированного тепловым потоком в стекле, в изображении модуляционной поляриметрии // *Физика твёрдого тела.* – 2013. – **55**, № 5. – С. 1003–1010.
 15. *Матяш И. Е., Минайлова И. А., Мицук О. Н., Сердега Б. К.* Модуляционная поляриметрия термоупругости, индуцированной тепловым излучением в стекле // *Физика твёрдого тела.* – 2014. – **56**, № 7. – С. 1439–1445.
 16. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
Te same: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – Oxford etc.: Pergamon Press, 1962. – xii+628 p.
 17. *Рубцов Н. А.* Теплообмен излучением в сплошных средах. – Новосибирск: Наука, 1984. – 277 с.
 18. *Сердега Б. К.* Модуляційна поляриметрия. – Київ: Наук. думка, 2011. – 241 с.
 19. *Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б.* Нестационарний теплообмін та напружений стан в опромінованій системі зі шарів різної прозорості // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2016. – **52**, № 4. – С. 79–85.
Te same: *Terlets'kyi R. F., Brukhal' M. B.* Nonstationary heat exchange and stressed state in the irradiated system of layers with different transparencies // *Mater. Sci.* – 2017. – **52**, No. 4. – P. 533–541.
<https://doi.org/10.1007/s11003-017-9987-8>.
 20. *Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б., Немировський Ю. В.* Моделювання і дослідження термомеханічної поведінки термочутливих тіл за врахування впливу теплового випромінювання // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 2. – С. 212–224.
Te same: *Terlets'kyi R. F., Brukhal' M. B., Nemirovskii Yu. V.* Modeling and investigation of the thermomechanical behavior of heat-sensitive bodies with regard for the influence of thermal radiation // *J. Math. Sci.* – 2014. – **203**, No. 2. – P. 265–278.
 21. *Терлецький Р. Ф., Турій О. П., Брухаль М. Б.* Задачі термомеханіки для облучаемых тел // *Теорет. и прикл. механика.* – 2012. – Вып. 4(50). – С. 30–37.
 22. *Фофанов Я. А., Плешаков И. В., Соколов И. М.* Детектирование нестационарных поляризационных откликов в оптическом и радиодиапазонах // *Науч. приборостроение.* – 2010. – **20**, № 2-3. – С. 202–219.
 23. *Уэрт Ч., Томсон Р.* Физика твердого тела. – Москва: Мир, 1966. – 568 с.
Te same: *Wert Ch. A., Thomson R. M.* Physics of solids. – New York: McGraw-Hill, 1964. – 436 p.
 24. *Azzam R. M. A., Bashara N. M.* Ellipsometry and polarized light. – Amsterdam etc.: North-Holland Publ. Co., 1977. – xvii+529 p.
 25. *Chekurin V. F.* Integral photoelasticity relations for inhomogeneously strained dielectrics // *Math. Model. Comput.* – 2014. – **1**, No. 2. – P. 144–155.
 26. *Dally J. W., Riley W. F.* Experimental stress analysis, – New York: McGraw-Hill, 1991. – xxii+639 p.
 27. *Gerrard A., Burch J. M.* Introduction to matrix methods in optics. – London: Dover Publ. Inc., 1990. – 384 p.

28. *Jasperson S. N., Schnatterly S. E.* An improved method for high reflectivity ellipsometry based on a new polarization modulation technique // *Rev. Sci. Instrum.* – 1969. – **40**, No. 6. – P. 761–767. – <https://doi.org/10.1063/1.1684062>.
29. *Schajer G. S.* Practical residual stress measurement methods. – New York: J. Wiley & Sons, 2013. – 328 p.
30. *Schmidt M., Schutze A., Seelecke S.* Elastocaloric cooling processes: The influence of material strain and strain rate on efficiency and temperature span // *APL Mater.* – 2016. – **4**, No. 6, 064107. – <https://doi.org/10.1063/1.4953433>.

MATHEMATICAL MODELING AND POLARIMETRY OF THE THERMAL STRESS STATE IN SEMITRANSSPARENT SOLID TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF THERMAL RADIATION

Using the method of modulation polarimetry and the developed model of thermo-mechanics of semitransparent solids, the kinetics and dynamics of temperature and stresses in a quartz sample in the shape of a parallelepiped were studied. The efficiency of the proposed heat transfer model for describing the thermal state was experimentally confirmed. From the satisfactory agreement of the experimentally obtained and calculated characteristics of the stress state, a conclusion is made on the applicability of the proposed mathematical model and method of modulation polarimetry in two directions for testing the stress state of materials and determining their physical constants.

Key words: *semitransparent solids, thermal radiation, heat transfer model, modulation polarimetry in two directions, quartz sample, temperature, stresses.*

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано

² Ін-т фізики напівпровідників
ім. В. Є. Лашкарьова НАН України, Київ

21.11.20