

НЕСТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУРИ В ТЕРМОІЗОЛЬОВАНОМУ КОНЦЕНТРИЧНОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ КАНАЛІ З БІОМАСОЮ, ЩО РУХАЄТЬСЯ ПІД ВПЛИВОМ ОБЕРТАННЯ ЕЛЕКТРИЧНО НАГРІТОЇ ГЕЛІСИ

Розглядається нестационарна задача визначення температури у круговому концентричному циліндричному каналі безмежної довжини з термоізольованими поверхнями, заповненому рухомих середовищем, під впливом індукційного нагрівання провідника у вигляді циліндричної гвинтової лінії (геліси), що синхронно обертається навколо осі симетрії каналу. Подібні задачі зустрічаються в процесі термічної переробки біоматеріалів із використанням реакції піролізу, коли гвинтова поверхня шнека, що пересуває матеріальну суміш, індукційно нагрівається електромагнітним полем. Задачу розв'язано з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом та інтегрального перетворення Фур'є за осьовою координатою, а також розкладів Фур'є – Бесселя за кутовою і радіальною координатами. Показано, що температура в каналі характеризується головним чином лінійним зростанням у часі. На цю складову накладаються слабкі коливання, спричинені обертанням нагрітої геліси. Низькоамплітудні коливання температури описуються подвійними рядами Фур'є – Бесселя, коефіцієнти яких визначаються через корені трансцендентного рівняння, що містить перехресні добутки похідних функцій Бесселя і Неймана. Ці корені визначаються чисельно за допомогою методу «regula falsi». Числовий аналіз виявив істотний вплив радіуса, кроку та кутової швидкості обертання геліси, а також лінійної швидкості руху середовища в каналі, на формування просторових і часових характеристик мікроструктури температурного поля. Зокрема, встановлено умови, за яких виникає резонансне підсилення амплітуди квазімонохроматичних коливань температури в каналі.

Ключові слова: шнековий реактор, шнекова спіраль, електричне нагрівання, нестационарне температурне поле, математичне моделювання, числовий аналіз.

Вступ. Удосконалення технологічних процесів піролізної переробки різного типу відходів і біомаси вимагають всебічного вивчення шляхом проведення відповідних модельних і експериментальних досліджень [18]. В останні роки в практиці значної популярності набули шнекові реактори. Джерелом тепла в системі безпосередньо є шнек, що піддається дії термоелектричного ефекту Джоуля – Ленца. Критичний аналіз таких шнекових систем, їхніх переваг та недоліків, був нещодавно проведений у роботі [15].

Як відомо, сировина подається в нагрітий реактор і транспортується обертанням гвинта. Крім транспортування, відповідно спроектовані шнеки, покращуючи контакт між частинками транспортованої маси і нагрітою поверхнею, можуть підсилити змішування частинок і тепловіддачу між твердими теплоносіями та реагентами [12], а забезпечення оптимальної тривалості перебування вихідної сировини в реакторі при дотриманні відповідних теплових умов сприяє піролізу [25]. Відомо також, що піроліз – це ендотермічний процес, який вимагає додавання тепла не тільки для підвищення температури реагентів до температури піролізу, але й для стимулювання хімічних реакцій піролізу, тобто ентальпії для піролізу [24]. Забезпечення тепловою енергією, необхідною для піролізу, в одно- або двошнекових реакторах досягається непрямым нагріванням через стінки реактора, через верхню гвинта шнека або ж прямим нагріванням за допомогою теплоносіїв. При цьому температура нагрівання має бути трохи вищою від необхідної температури піролізу. Таким чином, одним із важливих питань у проекту-

[✉]pidsub@wp.pl

ванні шнекових реакторів є створення такого розподілу температурного поля в них, який сприяв би ефективному проходженню процесу піролізу [31]. Щобільше, передача тепла в міру збільшення масштабу реактора стає першорядною проблемою для підвищення ефективності процесу піролізу, особливо швидкісного. Так, у роботі [21] на основі проведених експериментів із використанням піролізера з електрично нагрітим гвинтом, принцип дії якого описаний у патенті [22], було показано, що температура піролізу має великий вплив на якість продукту.

Типовий шнековий реактор має нерухому зовнішню оболонку і обертальний гвинтовий шнек, розміщений на центральному валі, іноді порожнистому. Геометрія окремої секції шнека є однією з основних особливостей, яка модифікується залежно від застосування (транспортування, подача, змішування або їхнє поєднання) та вимог до процесу. У промисловій практиці використовують також шнекові системи з гвинтовою спіраллю без несучого валу [13, 29]. Такий тип шнека, що нагрівається за допомогою ефекту Джоуля – Ленца, використовується для піролізу липких, клейких або в'язких речовин, а також жилавих відходів.

Поруч із експериментальними дослідженнями важливе місце посідає математичне моделювання процесів у шнекових реакторах. Так, у роботах [27, 28] із використанням методів числової гідромеханіки (див., наприклад, [20]) був змодельований розклад швидкостей багатофазної рідини у гвинтовому реакторі, а в роботі [25] також було визначено осьовий розподіл температури. Проте проблема аналітичного опису розподілу температурного поля в реакторі, його залежностей від геометричних, механічних і термодинамічних параметрів системи далі залишається актуальною. Цей опис є принциповим ще й тому, що температура входить у відповідні співвідношення для визначення швидкості хімічної реакції піролізу.

У цій статті зроблено спробу виконати математичне моделювання температурного поля у кільцевому циліндричному каналі з термоізолюваними поверхнями, заповненому рухомим середовищем, наприклад, біомасою, у припущенні, що первинне тепло в реактор надходить від геліси, що обертається і не контактує з внутрішньою поверхнею каналу (гвинт без валу). Необхідно виконати аналіз температури в каналі залежно від просторових координат і часу, геометричних розмірів геліси та кутової швидкості її обертання, термодинамічних параметрів речовини, що заповнює канал, та швидкості її руху. Оскільки врахування ширини і товщини ребра шнека значно ускладнює розв'язання задачі, тому спочатку доцільно розглянути простішу ситуацію, замінивши шнек тонким дротом у вигляді циліндричної гвинтової лінії (геліси), а корпус реактора – довгим термоізолюваним каналом із зовнішньою оболонкою і внутрішнім валом, з яким геліса в цьому випадку в контакт не перебуває.

1. Постановка задачі. Розглянемо термоізолюваний безмежно довгий канал кільцевого поперечного перерізу з радіусами R_1 і R_2 , $R_1 > R_2$, заповнений в'язкою масою (рідиною), що рухається зі сталою швидкістю v_0 з одного кінця циліндричної області $z = -\infty$ до іншого $z = +\infty$ (тут і далі r, θ, z – циліндричні координати з початком відліку на осі симетрії каналу). В середині каналу розміщено провідник у вигляді геліси безмежної довжини, радіус якої R_0 , а кут нахилу до осі каналу φ_0 (кут підйому геліси). Геліса обертається навколо осі симетрії каналу з кутовою швидкістю ω . Провідником є тонкий дріт із площею поперечного перерізу (прямокутного чи кругового) s_0 , який розігрівається електричним струмом за допомогою ефекту Джоуля – Ленца [3]. Дослідимо розподіл температури в рухомому середовищі, що виникає під дією такого джерела тепла.

Внаслідок того, що дріт нагрівача тонкий, його можна замінити точковими джерелами тепла, неперервно розподіленими вздовж геліси. Тоді

задача зводиться до розв'язання диференціального рівняння теплопровідності [6]

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q(r, \theta, z, \tau),$$

$$R_2 < r < R_1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

за початкової умови

$$T|_{\tau=0} = T_0$$

та умов термоізоляції на зовнішній поверхні каналу

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} = 0$$

і внутрішній поверхні каналу

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_2} = 0.$$

Тут ρ – густина рухомого середовища; c_p – його теплоємність при сталому тиску; λ – коефіцієнт теплопровідності; τ – час.

Опис функції джерела тепла q у рівнянні (1) виконуємо з таких міркувань. Лінія спряження тонкого дроту нагрівача з уявним обертальним циліндром радіуса R_0 є циліндричною гвинтовою лінією, твірна якої нахилена до осі Oz під кутом підйому φ_0 . Фізичну поверхню цього циліндра $r = R_0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ можна продовжити поверхнями $r = R_0$, $2k\pi \leq \theta \leq 2(k+1)\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, $-\infty < z < \infty$, тобто розгорнути в безмежну площину $-\infty < R_0\theta < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Тоді лінія спряження дроту, що нагрівається, з уявним обертальним циліндром на цій площині буде прямою, нахиленою під кутом φ_0 до осі Oz . Рівняння цієї прямої має вигляд [1]

$$R_0\theta = z \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Якщо ввести нову систему координат Oxy

$$x = R_0\theta \sin \varphi_0 + z \cos \varphi_0, \quad y = R_0\theta \cos \varphi_0 - z \sin \varphi_0 \quad (2)$$

то рівняння лінії спряження дроту з уявним обертальним циліндром описуватиметься співвідношеннями $-\infty < x < \infty$, $y = 0$. Зовнішню поверхню циліндричного каналу $r = R_1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ так само можна розгорнути у безмежну площину, паралельну до попередньої площини.

Внаслідок обертання уявної циліндричної поверхні радіуса R_0 разом із гелісою матеріальна точка гребеня цієї лінії, яка в деякий момент часу τ розміщена в точці простору з координатами $r = R_0$, $\theta = \theta_0$, $z = z_0$, після одного оберту за час $\tau_0 = 2\pi/\omega$ (період обертання геліси) пройде шлях $d = 2\pi R_0 \operatorname{ctg} \varphi_0$ (крок гвинтової лінії). При багатьох обертах це рівнозначно руху паралельних прямих, рівновіддалених між собою на віддалі d і нахилених під кутом φ_0 до осі Oz , в напрямку осі $R_0\theta$ з лінійною швидкістю $v = \omega R_0$ у площині $r = R_0$, паралельній до площини $r = R_1$.

Далі вважатимемо, що кожна з цих ліній є областю неперервно розподілених точкових джерел тепла однакової інтенсивності $q^*(\tau)$. Тоді функцію джерела в цій області можемо записати у вигляді

$$q(y, r, \tau) = q^*(\tau)\delta(y)\frac{\delta(r - R_0)}{r},$$

де $\delta(y)$ – функція Дірака, або з урахуванням формул (2) у вигляді

$$q(r, \theta, z, \tau) = q^*(\tau)\delta(R_0\theta \cos \varphi_0 - z \sin \varphi_0)\frac{\delta(r - R_0)}{r}.$$

Із властивостей функції Дірака [5]

$$\delta(x - x_0)f(x) = \delta(x - x_0)f(x_0),$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad a \neq 0,$$

отримуємо

$$q(r, \theta, z) = \frac{q^*(\tau)}{R_0 \cos \varphi_0} \delta\left(\theta - \frac{z}{R_0} \operatorname{tg} \varphi_0\right) \frac{\delta(r - R_0)}{r}. \quad (3)$$

Якщо лінія джерела тепла рухається разом із площиною зі швидкістю $v = \omega R_0$ уздовж від'ємного напрямку $R_0\theta$, то замість формули (3) з урахуванням розмірностей потрібно записати

$$q(r, \theta, z, \tau) = q^*(\tau) \frac{R_0^2}{\cos \varphi_0} \delta\left(\theta - \frac{z}{R_0} \operatorname{tg} \varphi_0 + \omega\tau\right) \frac{\delta(r - R_0)}{r}. \quad (4)$$

У випадку безлічі джерел (обертання спіралі за час τ від $-\infty$ до $+\infty$) замість формули (4) матимемо суму

$$q(r, \theta, z, \tau) = q^*(\tau) \frac{R_0^2}{\cos \varphi_0} \frac{\delta(r - R_0)}{r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta + 2\pi m - \frac{z}{R_0} \operatorname{tg} \varphi_0 + \omega\tau\right).$$

Якщо нагрівання спіралі відбувається під дією електричного струму силою $I(\tau)$, то функція модуляції дорівнює [3, 4]

$$q^*(\tau) = \rho_0 j^2(\tau) H(\tau),$$

де $H(\tau)$ – функція Гевісайда, ρ_0 – електричний опір провідника, $j(\tau)$ – густина електричного струму провідника

$$j(\tau) = \frac{I(\tau)}{s_0}.$$

Далі обмежимося випадком сталої сили струму $I(\tau) = I = \text{const}$, тоді

$$q(r, \theta, z, \tau) = q_0 \varepsilon^2 \frac{\delta(r - R_0)}{r \cos \varphi_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta + 2\pi m - \frac{z}{R_0} \operatorname{tg} \varphi_0 + \omega\tau\right) H(\tau), \quad (5)$$

де $q_0 = \rho_0 j^2 R_1^2$, $\varepsilon = R_0/R_1$.

2. Аналітичні співвідношення для температури в каналі. Якщо використати заміну [8]

$$T(r, \theta, z, \tau) = T_0 + U(r, \theta, z, \tau)e^{bz}, \quad (6)$$

де $b = v_0/(2a)$, a – коефіцієнт температуропровідності, $a = \lambda/(\rho c_p)$, то для функції U одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \tau} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - b^2 U \right] = Q(r, \theta, z, \tau),$$

$$R_2 < r < R_1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty, \quad \tau > 0, \quad (7)$$

з початковою і граничними умовами

$$U|_{\tau=0} = 0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R_1} = 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R_2} = 0. \quad (10)$$

Тут

$$Q(r, \theta, z, \tau) = \frac{1}{\lambda} e^{-bz} q(r, \theta, z, \tau). \quad (11)$$

Подамо функцію U у вигляді експоненціального ряду Фур'є за кутовою змінною θ :

$$U(r, \theta, z, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m(r, z, \tau) e^{-im\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

У подібному вигляді можемо записати також і функцію q . Для цього користуємось властивістю [11]

$$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imx}.$$

Тоді на основі формул (5) і (11) одержимо

$$Q(r, \theta, z, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_m(r, z, \tau) e^{-im\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

де

$$Q_m(r, z, \tau) = \frac{q_0 \varepsilon^2 \delta(r - R_0)}{2\pi \lambda r \cos \varphi_0} e^{-bz} \exp \left[im \left(\frac{z}{R_0} \operatorname{tg} \varphi_0 - \omega \tau \right) \right]. \quad (12)$$

Застосуємо також до диференціального рівняння (7) і граничних умов (9), (10) інтегральне перетворення Фур'є за просторовою змінною z та інтегральне перетворення Лапласа за часом τ [5]. В результаті з урахуванням початкової умови (8) задачу зведемо до звичайного диференціального рівняння для коефіцієнтів $U_m(r, z, \tau)$ розкладів у ряди Фур'є:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + s^2 \right) \right] U_m^{FL}(r, k, p) + Q_m^{FL}(r, k, p) = 0, \quad R_2 < r < R_1, \quad (13)$$

з граничними умовами

$$\left. \frac{dU_m^{FL}}{dr} \right|_{r=R_1} = 0, \quad (14)$$

$$\left. \frac{dU_m^{FL}}{dr} \right|_{r=R_2} = 0, \quad (15)$$

де

$$U_m^{FL}(r, k, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} dz \int_0^{\infty} U_m(r, z, \tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

$$Q_m^{FL}(r, k, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} dz \int_0^{\infty} Q_m(r, z, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \\ -\infty < k < \infty, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

– трансформанти Фур'є і Лапласа функцій $U_m(r, z, \tau)$ і $Q_m(r, z, \tau)$, а

$$s = \sqrt{k^2 + b^2 + \frac{p}{a}}, \quad \text{Im } s \geq 0.$$

Розв'язавши диференціальне рівняння (13) з урахуванням граничних умов (14), (15), одержимо [5]

$$U_m^{FL}(r, k, p) = \int_r^{R_1} C_m^{FL}(r, r', k, p) Q_m^{FL}(r', k, p) r' dr' + \int_{R_2}^r C_m^{FL}(r', r, k, p) Q_m^{FL}(r', k, p) r' dr'. \quad (16)$$

де

$$C_m^{FL}(r, r', k, p) = -\frac{1}{\Delta_m(s)} S_m(sR_2, sr) S_m(sR_1, sr'), \quad (17)$$

$$\Delta_m(s) = I'_m(sR_1) K'_m(sR_2) - K'_m(sR_1) I'_m(sR_2),$$

$$S_m(sr, sr') = I'_m(sr) K_m(sr') - K'_m(sr) I_m(sr').$$

Тут $I_m(x)$ – модифікована функція Бесселя m -го порядку; $K_m(x)$ – функція Макдональда m -го порядку; штрихом позначено похідні від цих функцій.

Застосовуючи тепер до (16) обернені інтегральні перетворення Фур'є і Лапласа, одержимо розв'язок задачі у вигляді інтегралів згортки

$$U_m(r, z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\tau} \left[\int_r^{R_1} C_m(r, r', z', \tau') Q_m(r', z - z', \tau - \tau') r' dr' + \int_{R_2}^r C_m(r', r, z', \tau') Q_m(r', z - z', \tau - \tau') r' dr' \right] d\tau', \quad (18)$$

де

$$C_m(r, r', z, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_m^F(r, r', k, \tau) e^{ikz} dk, \quad (19)$$

$$C_m^F(r, r', k, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} C_m^{FL}(r, r', k, p) e^{p\tau} dp, \quad \sigma > 0. \quad (20)$$

Аналізуючи функцію $C_m^{FL}(r, r', k, p)$, задану у вигляді (17), з огляду на асимптотичну поведінку циліндричних функцій при малому аргументі s [9], можна показати, що для $m = 0$ ця функція має полюс у точці $s^2 = 0$, тобто в точці

$$p \equiv p_0 = -a(k^2 + b^2).$$

Для $m \neq 0$ функція $C_m^{FL}(r, r', k, p)$ має полюси $s = s_{mn} = -i\mu_{mn}/R_1$, $n = 1, 2, \dots$, що співпадають з нулями функції $\Delta_m(s)$, тобто в точках

$$p \equiv p_{mn} = -a \left[k^2 + b^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{R_1} \right)^2 \right], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Якщо врахувати, що [2]

$$I_m(-ix) = e^{-i\pi m/2} J_m(x), \quad I'_m(-ix) = ie^{-i\pi m/2} J'_m(x),$$

$$K_m(-ix) = \frac{\pi i}{2} e^{i\pi m/2} H_m^{(1)}(x), \quad K'_m(-ix) = -\frac{\pi}{2} e^{i\pi m/2} H_m^{(1)'}(x),$$

де $J_m(x)$ – функція Бесселя m -го порядку, а $H_m^{(1)}(x)$ – функція Ганкеля першого роду m -го порядку, то нулі функції $\Delta_m(s)$ визначатимуться через дійсні додатні корені μ_{mn} трансцендентного рівняння

$$J'_m(\mu_{mn})N'_m(\mu_{mn}\varepsilon_0) - N'_m(\mu_{mn})J'_m(\mu_{mn}\varepsilon_0) = 0, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

де $\varepsilon_0 = R_2/R_1$. Тут враховано, що $H_m^{(1)}(x) = \frac{1}{2}[J_m(x) + iN_m(x)]$; $N_m(x)$ – функція Неймана m -го порядку.

Тоді, переходячи в поле оригіналів, з (20) знайдемо

$$C_m^F(r, r', k, \tau) = \frac{2a}{R_1^2} \left[\frac{e^{p_0\tau}}{1 - \varepsilon_0^2} \delta_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} B_{mn} \left(\frac{r}{R_1} \right) B_{mn} \left(\frac{r'}{R_1} \right) e^{p_{mn}\tau} \right],$$

де δ_{m0} – символ Кронекера,

$$A_{mn} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{\mu_{mn}^2 [J'_m(\mu_{mn}\varepsilon_0)]^2}{\left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) [J'_m(\mu_{mn}\varepsilon_0)]^2 - \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 \varepsilon_0^2} \right) [J'_m(\mu_{mn})]^2},$$

$$B_{mn} \left(\frac{r}{R_1} \right) = J'_m(\mu_{mn})N_m \left(\mu_{mn} \frac{r}{R_1} \right) - N'_m(\mu_{mn})J_m \left(\mu_{mn} \frac{r}{R_1} \right).$$

Обчислюючи обернене інтегральне перетворення Фур'є (19), з урахуванням інтеграла [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau k^2} e^{ikz} dk = \sqrt{\frac{\pi}{a\tau}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a\tau}\right), \quad \tau > 0,$$

одержимо

$$C_m(r, r', z, \tau) = \frac{1}{R_1^2} \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}} e^{-ab^2\tau} \exp\left(-\frac{z^2}{4a\tau}\right) \left\{ \frac{1}{1 - \varepsilon_0^2} \delta_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} B_{mn} \left(\frac{r}{R_1} \right) B_{mn} \left(\frac{r'}{R_1} \right) \exp\left[-a \left(\frac{\mu_{mn}}{R_1} \right)^2 \tau\right] \right\}. \quad (22)$$

З цього виразу видно, що функція $C_m(r, r', z, \tau)$ є симетричною відносно аргументів r і r' : $C_m(r, r', z, \tau) = C_m(r', r, z, \tau)$. Тоді з (18) одержуємо

$$U_m(r, z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\tau} d\tau' \int_r^{R_1} C_m(r, r', z', \tau') Q_m(r', z - z', \tau - \tau') r' dr'.$$

Підставляючи у цю формулу вирази (12), (22), з урахуванням інтеграла [7]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\left(b - \frac{im}{R_0} \operatorname{tg} \varphi_0\right) z'\right] \exp\left(-\frac{z'^2}{4a\tau'}\right) dz' = \\ = 2\sqrt{\pi a\tau'} \exp\left[\left(b - \frac{im}{R_0} \operatorname{tg} \varphi_0\right) a\tau'\right]$$

і властивості функції Дірака [5]

$$\int_{R_2}^{R_1} f(r')\delta(r' - R_0) dz' = f(R_0), \quad R_2 < R_0 < R_1,$$

а також обчислення інтеграла по τ' , одержимо

$$U_m(r, z, \tau) = \frac{q_0 \varepsilon^2 e^{-bz}}{\pi \lambda \cos \varphi_0} \left\{ \frac{1}{1 - \varepsilon_0^2} \frac{a\tau}{R_1^2} \delta_{m0} + \exp \left[im \left(\frac{z}{R_0} \operatorname{tg} \varphi_0 - \omega\tau \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} B_{mn} \left(\frac{r}{R_1} \right) B_{mn}(\varepsilon) \frac{1}{\Phi_{mn}} \left[1 - \exp \left(-\Phi_{mn} \frac{a\tau}{R_1^2} \right) \right] \right\}, \quad (23)$$

де

$$\Phi_{mn} = \mu_{mn}^2 + \left(\frac{m \operatorname{tg} \varphi_0}{\varepsilon} \right)^2 + im \left(\frac{2bR_1 \operatorname{tg} \varphi_0}{\varepsilon} - \frac{R_1^2 \omega}{a} \right). \quad (24)$$

Далі використаємо безрозмірні змінні

$$\xi = \frac{r}{R_1}, \quad \zeta = \frac{z}{R_1}, \quad \text{Fo} = \frac{a\tau}{R_1^2},$$

де Fo – число Фур'є, і безрозмірний радіус геліси $\varepsilon = R_0/R_1$.

Якщо $\tau_0 = 2\pi/\omega$ – період обертання джерела тепла навколо осі симетрії каналу, то

$$\frac{R_1^2 \omega}{a} = \frac{2\pi R_1^2}{a\tau_0} = \frac{2\pi}{\text{Fo}_0}, \quad \text{Fo}_0 = \frac{a\tau_0}{R_1^2},$$

де Fo₀ – число Фур'є, що відповідає цьому періоду.

Якщо через ω_v позначити кутову швидкість обертання частинок суміші навколо циліндричної поверхні геліси: $\omega_v = v_0 \operatorname{tg} \varphi_0 / R_0$, то $\tau_v = 2\pi / \omega_v$ буде періодом цього обертання. Тоді

$$\frac{2bR_1 \operatorname{tg} \varphi_0}{\varepsilon} = \frac{v_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{R_0} \frac{R_1^2}{a} = \omega_v \frac{R_1^2}{a} = \frac{2\pi}{\tau_v} \frac{R_1^2}{a} = \frac{2\pi}{\text{Fo}_v}, \quad \text{Fo}_v = \frac{a\tau_v}{R_1^2},$$

де Fo_v – число Фур'є, відповідне періоду τ_v , і формулу (24) запишемо у вигляді

$$\Phi_{mn} = \mu_{mn}^2 + \left(\frac{m \operatorname{tg} \varphi_0}{\varepsilon} \right)^2 + 2\pi im \left(\frac{1}{\text{Fo}_v} - \frac{1}{\text{Fo}_0} \right)$$

або у вигляді

$$\Phi_{mn} = D_{mn} e^{i\varphi_{mn}},$$

де

$$D_{mn} = \sqrt{\left[\mu_{mn}^2 + \left(\frac{2\pi m}{\Delta} \right)^2 \right]^2 + \left[2\pi m \left(\frac{1}{\text{Fo}_v} - \frac{1}{\text{Fo}_0} \right) \right]^2}, \\ \varphi_{mn} = \operatorname{arctg} \left[\frac{2\pi m \left(\frac{1}{\text{Fo}_v} - \frac{1}{\text{Fo}_0} \right)}{\mu_{mn}^2 + \left(\frac{2\pi m}{\Delta} \right)^2} \right].$$

Тут Δ – відносний крок спіралі, $\Delta = d/R_1 = 2\pi \varepsilon \operatorname{ctg} \varphi_0$.

Тоді, підставляючи функцію $U_m(r, z, t)$ з (23) у формулу (6) і використовуючи властивості циліндричних функцій [9]: $J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$, $N_{-m}(z) = (-1)^m N_m(z)$, а також симетричність коренів $\mu_{-m, n} = \mu_{mn}$, остаточно одержимо вираз для температури в коаксіальному каналі:

$$T(r, \theta, z, \tau) \equiv T(\xi, \theta, \zeta, \text{Fo}) = T_0 + \frac{q_0 \varepsilon^2}{\pi \lambda \cos \varphi_0} \left[\frac{\text{Fo}}{1 - \varepsilon_0^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_m(\xi, \theta, \zeta, \text{Fo}) \right],$$

$$\varepsilon_0 < \xi < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < \zeta < \infty, \quad \text{Fo} > 0, \quad (25)$$

де

$$\Theta_0(\xi, \theta, \zeta, \text{Fo}) \equiv \Theta_0(\xi, \zeta, \text{Fo}) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\mu_{0n} \varepsilon_0) B_{0n}(\xi) B_{0n}(\varepsilon)}{J_1^2(\mu_{0n} \varepsilon_0) - J_1^2(\mu_{0n})} [1 - \exp(-\mu_{0n} \text{Fo})], \quad (26)$$

$$\Theta_m(\xi, \theta, \zeta, \text{Fo}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{D_{mn}} B_{mn}(\xi) B_{mn}(\varepsilon) \times$$

$$\times \left[\cos \left[m \left(\theta - 2\pi \frac{\zeta}{\Delta} + 2\pi \frac{\text{Fo}}{\text{Fo}_0} \right) + \varphi_{mn} \right] - \right.$$

$$\left. - \cos \left[m \left(\theta - 2\pi \frac{\zeta}{\Delta} + 2\pi \frac{\text{Fo}}{\text{Fo}_v} \right) + \varphi_{mn} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \exp \left\{ - \left[\mu_{mn}^2 + \left(\frac{2\pi m}{\Delta} \right)^2 \right] \text{Fo} \right\} \right], \quad m = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Із формул (25)–(27) видно, що температурне поле є сумою складової, що лінійно зростає в часі, нестационарної осесиметричної компоненти ($m = 0$) і суперпозиції двох типів парціальних квазімонохроматичних сигналів ($m \neq 0$). Різниця парціальних фаз цих останніх сигналів дорівнює

$$\Delta_m = 2\pi m \left(\frac{1}{\text{Fo}_0} - \frac{1}{\text{Fo}_v} \right).$$

При цьому, якщо рух маси здійснюватиметься в додатному напрямі осі Oz ($v_0 > 0$) і лівостороння спіраль ($\varphi_0 > 0$) обергатиметься проти годинникової стрілки ($\omega > 0$), то різниця Δ_m зменшуватиметься, і при $\text{Fo}_0 = \text{Fo}_v$, тобто, коли лінійна швидкість обертання геліси v дорівнюватиме проекції осьової швидкості руху біомаси в напрямку $R_0\theta$:

$$v = R_0 \omega = v_0 \text{tg } \varphi_0, \quad (28)$$

досягнеться умова просторового синхронізму динамічного процесу.

3. Числовий аналіз розподілу температури за деяких конкретних значень параметрів системи. Ця задача є багатопараметричною і містить термодинамічні (c_p, ρ, λ), термоелектричні (j, ρ_0), геометричні ($\varepsilon, \Delta, \varphi_0$) і кінематичні (ω, v_0) параметри. Для проведення числових експериментів необхідно вибрати всі параметри фіксованими, або ж один змінним, а решту – фіксованими [30].

Спочатку проаналізуємо залежність температури від часу в певній точці каналу при всіх решту незмінних параметрах системи. Для того щоб

наблизитись до реальних експериментів, результати яких подані в роботах [25, 27], виберемо такі значення цих параметрів:

- радіус спіралі $R_0 = 0.025$ м ($\varepsilon = 0.962$);
- внутрішній радіус каналу $R_2 = 0.009$ м ($\varepsilon_0 = 0.346$);
- площа поперечного перерізу провідника $s_0 = 7.07 \cdot 10^{-6}$ м²;
- зовнішній радіус каналу $R_1 = 0.026$ м;
- кут нахилу спіралі $\varphi_0 = 73.68^\circ$ (це відповідає кроку спіралі $d = 0.046$ м або $\Delta = 1.77$);
- кутова швидкість обертання спіралі $\omega = 0.292$ Гц (це відповідає $Fo_0 = 0.0135$);
- питомий опір вольфрамового провідника $\rho_0 = 5.44 \cdot 10^{-8}$ Ом·м;
- початкова температура реактора $T_0 = 293.15$ К;
- теплоємність суміші $c_p = 1502$ Дж/(кг·К) за робочої температури $T = 589$ К;
- коефіцієнт теплопровідності суміші $\lambda = 0.35$ Вт/(м·К);
- густина біомаси $\rho = 551$ кг/м³;
- швидкість масового потоку $v_M = 6.89 \cdot 10^{-4}$ кг/с; звідки визначаємо швидкість руху суміші $v_0 = v_M / (\rho \pi R_1^2) = 5.89 \cdot 10^{-4}$ м/с (це відповідає $Fo_v = 0.593$).

Обчислення виконаємо з використанням програмного забезпечення Фортран 90. При цьому для обчислень коренів μ_{mn} трансцендентного рівняння з перехресними добутками циліндричних функцій (21) застосовуємо метод «фальшивої позиції» («regula falsi») [26].

На рис. 1 подано часову залежність температури в точці $\xi = 0.5$, $\theta = 0^\circ$, $\zeta = 0.5$ для значень сили струму $I = 2, 5, 10, 15$ А та при заданих вище інших параметрах. Бачимо, що при $Fo < 0.1$ температура близька до сталої, але при $Fo > 0.01$ (значення $Fo = 1$ відповідає $\tau = 26.6$ хв) настає її зростання, прямо пропорційне до часу. Зауважимо, що подібний характер має зміна температури в дроті при неперервному нагріванні його індукційним струмом [10].

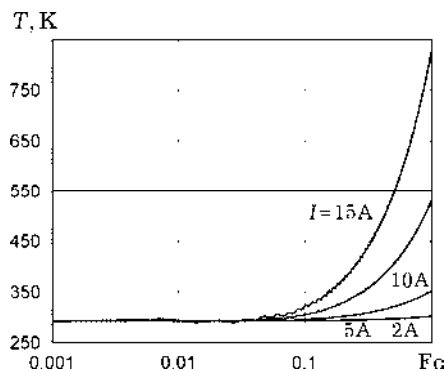


Рис. 1

На рис. 2 подано цю саму часову залежність температури (рис. 2а) та її фрагмент (рис. 2б) при $I = 10$ А без урахування лінійного члена, пропорційного до числа Fo . Бачимо, що мікроструктура температурного поля є амплітудно-модульованою функцією часу, а окремі коливання за формою нагадують пилкоподібні сигнали з амплітудою близько 18 К (рис. 2б). Число Фур'є, що відповідає періоду коливань (періоду обертів геліси), дорівнює $Fo_0 = 0.0135$.

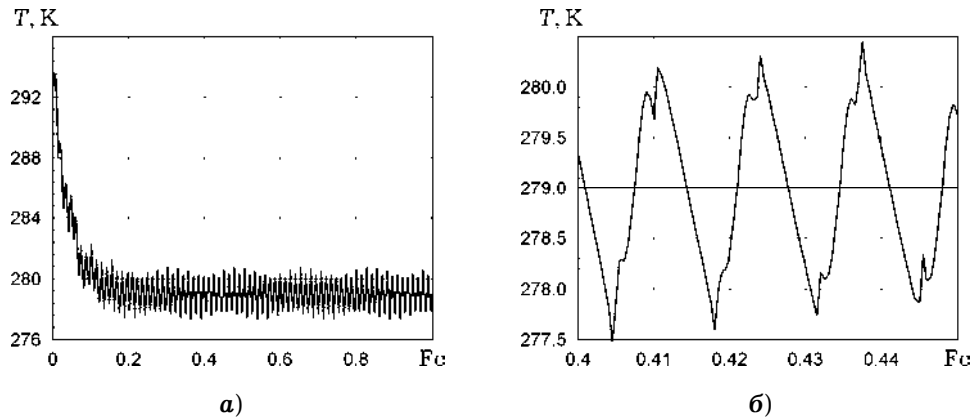


Рис. 2

Для детального аналізу теплового стану біомаси в каналі доцільно розрахувати розподіл часових характеристик температури в його різних напрямках. Для усунення залежності від інтенсивності джоулевого тепла розглянемо функцію $\vartheta = (T - T_0)/(q_0/(\pi\lambda))$, яка описує вплив геометрії і кутової швидкості геліси, а також теплофізичних параметрів і швидкості потоку біомаси, на формування температурного поля. Назвемо цю характеристику *функцією впливу* нагрівача на температурне поле. На рис. 3 подано залежності функції ϑ від чисел Фур'є Fo при $\theta = 0^\circ$, $\zeta = 0.5$, $I = 10$ А на внутрішній і зовнішній поверхнях каналу, $\xi = \varepsilon_0$ і $\xi = 1$ для випадків $\varepsilon_0 = R_2/R_1$ (рис. 3а) і $\varepsilon_0 = 1.5R_2/R_1$ (рис. 3б). При цьому $q_0/\pi\lambda = 66.9$ К. Порівнюючи наведені графіки з подібним результатом для нагрівання циліндра із заданим сталим поверхневим тепловим потоком [6], можемо зауважити немонотонність зростання температури зі збільшенням радіальної координати, що пов'язано з неосесиметричним розміщенням джерела тепла. При цьому частота коливань кривих відповідає кутовій частоті обертання геліси.

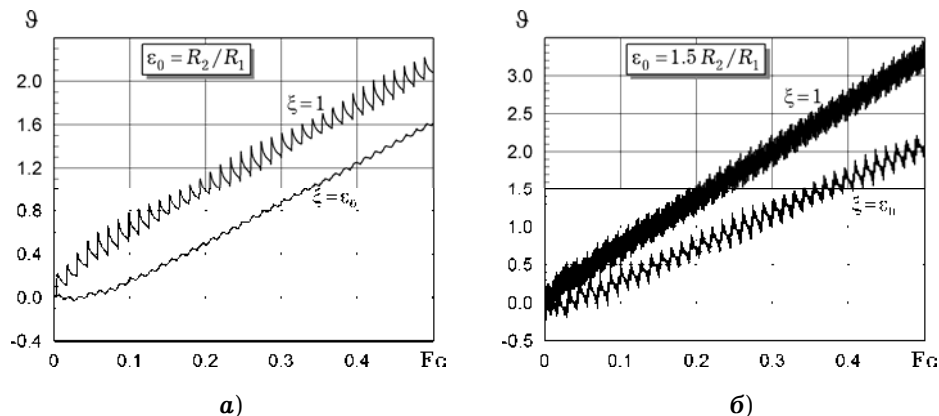


Рис. 3

На рис. 4 зображено кутово-часову залежність функції впливу ϑ по колу $\xi = 0.8$, $0 \leq |\theta| \leq 180^\circ$, $\zeta = 0.5$ зі сталими всіма іншими параметрами системи. Тут діапазон зміни числа Фур'є Fo відповідає чотирьом періодам обертання геліси. Розрахунки показують, що функція впливу зростає з часом ступінчасто, причому сходинки нахилені відносно кутової координати і майже не змінюються на поверхні плато, тобто в поперечних перерізах каналу, повернутих до осі симетрії під кутом $\pi/2 - \varphi_0$, що пов'язано з неосесиметричністю джерела тепла.

На рис. 5 показано подібну часову залежність функції ϑ уздовж твірної циліндра геліси $\xi = 0.8$, $\theta = 0^\circ$ при незмінних всіх інших параметрах джерела тепла. Видно, що вздовж осевого напрямку температура змінюється також періодично. Період зміни збігається з кроком геліси, в межах якого амплітуда температури має пилкоподібний характер. Розподіл мікроструктури температурного поля тут теж має характер періодичних плато, кожне з яких нахилене під кутом φ_0 до осі симетрії каналу.

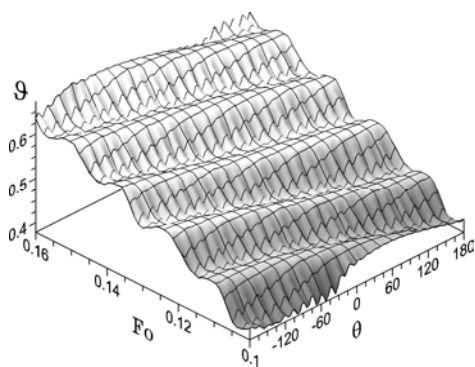


Рис. 4

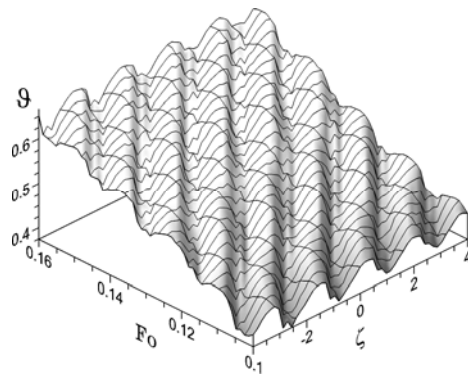


Рис. 5

На рис. 6 подано тривимірний радіально-кутовий розподіл температури в поперечному перерізі каналу $\zeta = 0.5$ у момент часу $\tau = 13.3$ хв ($Fo = 0.5$) при $\varepsilon = 0.962$. Видно, що температура зростає з відходом від внутрішньої поверхні каналу, а потім її значення стає майже сталим і навіть трохи зменшується при наближенні до зовнішньої поверхні каналу. Значна зміна температури у вигляді переходу на підвищене плато спостерігається у тих перерізах каналу, де в цей час розташований гребінь геліси (у розглядуваному випадку при $\xi = \varepsilon$ і $\theta \approx 45^\circ$). Очевидно, що зі зміною часу місце розташування плато змінюється.

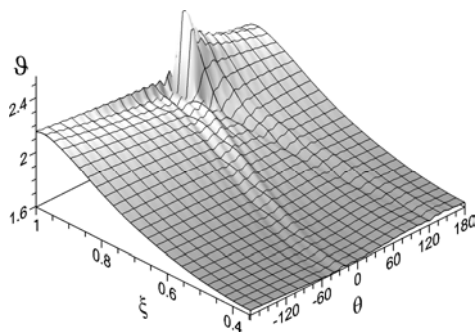


Рис. 6

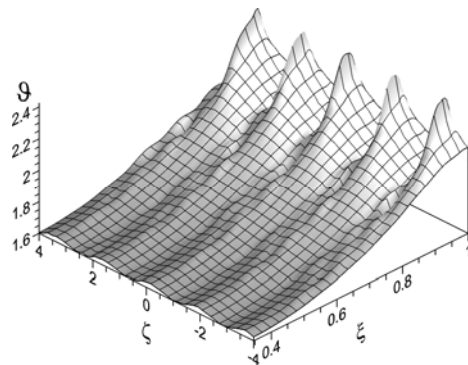


Рис. 7

На рис. 7 зображено подібний розподіл функції впливу ϑ , але в площині поздовжнього перерізу каналу $\varepsilon_0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq |\zeta| \leq 4$, при $Fo = 0.5$. Графік демонструє осциляції температурного поля поблизу поверхні каналу, спричинені пересуванням гребеня геліси з безрозмірним кроком $\Delta = 1.77$ біля цієї поверхні.

Розподіл температурного поля на циліндричній поверхні $\xi = 0.8$, $0 \leq |\theta| \leq 180^\circ$ в межах $0 \leq |\zeta| \leq 4$ каналу при $Fo = 0.5$ показано на рис. 8. Із цього рисунка видно, що профіль функції впливу своєрідно відображає профіль геліси. Внаслідок того, що зі зміною осьової координати ζ температура має періодичний пилкоподібний характер (амплітуда коливань функції впливу $\vartheta \approx 0.04$), у місцях наближення геліси до зазначеної циліндричної поверхні амплітуди температурного поля на гребнях, нахилених до осі каналу під кутом φ_0 , виходять майже сталими (у межах похибки розрахунку). За фіксованих значень ζ можна зауважити різкі зміни амплітуди при певних кутах θ , зумовлені впливом тепла, відбитого від стінок каналу (див. рис. 6).

На рис. 9 зображено часову зміну температури в точці $\xi = 0.8$, $\theta = 0^\circ$, $\zeta = 0.5$ при $\varphi_0 = 73.68^\circ$ і $v_0 = 5.89 \cdot 10^{-4}$ м/с залежно від зміни частоти обертання ω геліси. При цьому інші параметри є незмінними. З обчислень випливає, що при частоті обертання геліси $\omega = 0.080$ Гц, що, згідно з формулою (28), відповідає умові просторового синхронізму, амплітуда температурного поля різко зростає, тобто ця частота є резонансною. При відхиленні від резонансної частоти амплітудний рівень температурних коливань зменшується і залишається практично незмінним.

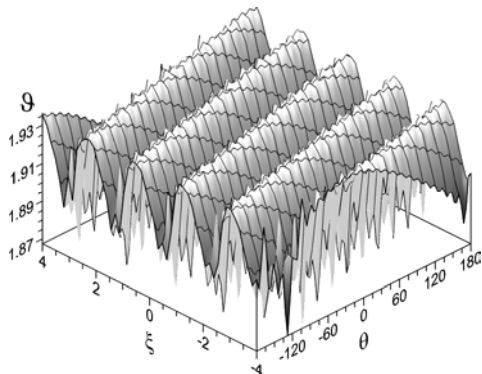


Рис. 8

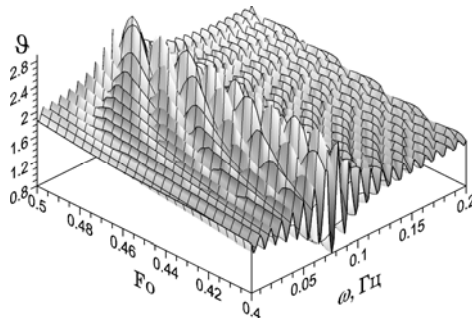


Рис. 9

На рис. 10 наведено залежність функції впливу ϑ від часу і швидкості потоку субстанції v_0 в тій самій точці, що й на рис. 9, при $\omega = 0.292$ Гц та інших незмінних параметрах. Із обчислень випливає, що і в цьому випадку має місце резонансне збудження температурного поля. Формула (28), що визначає умову просторового синхронізму, дає значення швидкості потоку $v_0 = 2.14 \cdot 10^{-3}$ м/с. Як видно, ця величина відповідає значенню швидкості потоку, при якій відбувається резонансне підсилення рівня температури. При швидкостях потоку, менших або більших від резонансного значення, амплітуда коливань температури є нижчою і від зміни v_0 практично не залежить.

На рис. 11 показано вплив безрозмірного радіуса геліси ε на часову залежність температурного поля в точці $\xi = 0.5$, $\theta = 0^\circ$, $\zeta = 0.5$ при $\omega = 0.292$ Гц, $v_0 = 5.89 \cdot 10^{-4}$ м/с. Видно, що зі збільшенням відносного раді-

уса геліси температура зростає, а в моменти наближення гребеня спіралі до точки спостереження має місце додаткове локальне збільшення температури. Періодичність цих локальних максимумів відповідає періоду обертання геліси $\tau_0 = 21.52$ с або $Fo_0 = 0.0135$.

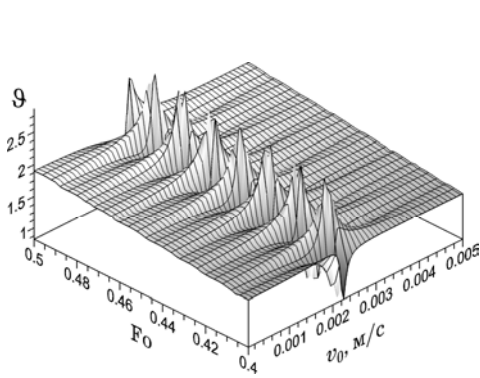


Рис. 10

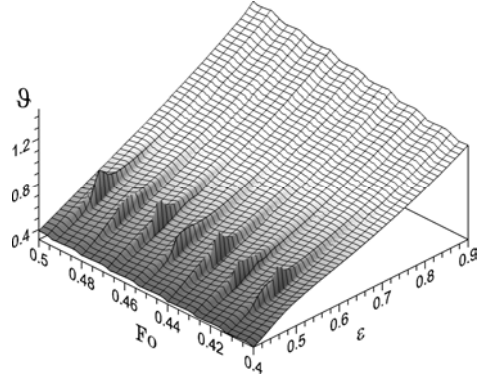


Рис. 11

Проаналізуємо тепер вплив співвідношення кроку та діаметра геліси на температурне поле в каналі. Деякі практики стверджували, що шнеки з великим діаметром відносно ефективніші в транспортних цілях, ніж шнеки із малим діаметром [19]. Також було встановлено, що шнеки з коротким кроком подають лише невеликий об'єм матеріалу за один оберт, тоді як шнеки з великим кроком мають тенденцію обертати матеріал, а не переносити його в осьовому напрямку [16]. Автори роботи [14] повідомили, що мінімальний крок в одношнекових реакторах не повинен бути меншим від радіуса гвинта, тоді як максимальний крок повинен дорівнювати приблизно одному діаметру гвинта. В роботі [17] дійшли висновку, що крок не повинен бути меншим, ніж 0.9 зовнішнього діаметра гвинта, і не повинен перевищувати його більше, ніж у 1.5 рази. Співвідношення кроку та діаметра шнека, що дорівнює одиниці (відоме як стандартний політ), також було вибрано як одне з найпростіших та оптимальних варіантів в одношнекових реакторах, тому й стало найбільш поширеним у промисловій практиці [23]. Ці погляди на проблему свідчать про те, що нагальним є розв'язування задачі оптимізації геометричних параметрів шнека з точки зору ефективності шнекової системи загалом. Тут ми лише проілюструємо, як впливає зміна кроку геліси на розподіл температури в каналі.

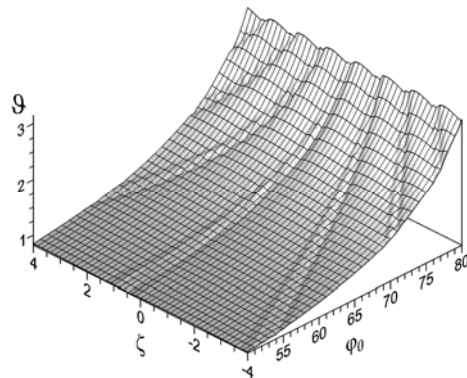


Рис. 12

На рис. 12 подано миттєву ($Fo_0 = 0.5$) залежність функції $̑$ вздовж лінії $̕ = 0.8$, $̕ = 0^\circ$, $0 \leq ̕ \leq 8$ від кута піднесення геліси $̕_0$. Очевидно, що при зростанні цього кута рівень температури підвищується внаслідок збільшення кількості витків спіралі на погонний метр каналу. При цьому збли-

ження інтерференційних смуг, яке спостерігається зі збільшенням ϕ_0 , ілюструє зменшення кроку геліси.

Висновки. Одержано точний замкнений розв'язок у рядах динамічної неосесиметричної задачі про розподіл температури в термоізованому циліндричному коаксіальному каналі безмежної довжини, заповненому рухомою субстанцією (наприклад, біологічними частинками), під впливом джерела тепла у вигляді геліси з дроту, що обертається і нагрівається індукційним струмом.

Розв'язок задачі зображено у вигляді добутку коефіцієнта, що визначається джоулевым теплом, і функції впливу в рядах Фур'є – Бесселя, яка залежить від термофізичних характеристик субстанції, швидкості її руху, діаметра і кроку геліси, а також кутової швидкості її обертання.

Із виконаного числового аналізу випливають такі висновки.

- Температурне поле в усіх точках каналу визначається джоулевым теплом, тобто, температура в каналі збільшується прямо пропорційно до часу дії джерела тепла. Перехідний процес від моменту початку дії цього джерела має квазіпараболічний характер внаслідок несиметричності геометричної будови геліси та її обертання навколо осі каналу. Але цей процес є короткотривалим і за вибраних фізичних і геометричних параметрів задачі досягає порядку $0.2Fo$.

- Температурне поле характеризується також тонкою структурою, що на тлі загального зростання температури формується безпосередньо під впливом геометрії і обертального руху геліси, а також поступального руху субстанції. Ця частина температури описується функцією впливу, що не залежить від інтенсивності джоулевого нагрівання і є квазігармонічною в часі.

- Встановлено, що функція впливу на поверхнях каналу не є монотонною щодо часу, як це має місце в класичному випадку нагрівання циліндра сталим зовнішнім потоком тепла, а змінюється осциляційно з періодом коливань, що відповідає періоду обертання геліси.

- Дослідження функції впливу на локальному рівні показало, що просторово-часовий рельєф цієї функції значною мірою віддзеркалює особливості геометрії геліси. Зокрема, часова амплітуда не є монотонно зростаючою функцією, а має ступінчастий характер. Відповідні залежності від кутової або осевої координат зображуються у вигляді періодично розміщених плато з повільно змінним рівнем. Ці плато нахилені під кутом до відповідних координатних ліній, який, у свою чергу, залежить від кута нахилу геліси відносно осі симетрії каналу. Обчислені залежності функції впливу від часу і радіальної координати показали, що розподіл температури є гладким до тих пір, поки поверхня геліси не наближається до заданої точки спостереження. При безпосередньому наближенні до цієї точки в профілі функції впливу стрибкоподібно виникає плато, на якому ця функція знову є локально гладкою.

- Встановлено, що в розглядуваній термодинамічній системі має місце співвідношення просторового синхронізму, яке пов'язує кутову швидкість обертання геліси і швидкість осевого руху субстанції в каналі. При виконанні цього співвідношення настає резонансне підсилення амплітуди функції впливу. Таким чином, виникає можливість керувати амплітудою температури за допомогою частоти обертання геліси за заданої швидкості потоку субстанції або, навпаки, за допомогою швидкості потоку за заданої частоти обертання джерела тепла.

Автори висловлюють подяку професору Станіславу Ледаковичу за обговорення теми і результатів цього дослідження.

Автори присвячують цю роботу світлій пам'яті професорів Львівського університету Дмитра Володимировича Грилицького і Яреми Григоровича Савули.

1. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике. – Москва: Наука, 1977. – 871 с.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.
3. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 487 с.
4. *Кобильська О.* Задача керування джерелом тепла // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 65–72.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. – Москва: Наука, 1973. – 831 с.
6. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – Москва: Наука, 1981. – 798 с.
8. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. II. – Москва: Наука, 1965. – 655 с.
9. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.
10. *Троцкий О. А., Стащенко В. И., Рыжков В. Г., Ляшенко В. П., Кобыльская Е. Б.* Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов // Вопросы атомн. науки и техники. Сер. Физика радиац. повреждений и радиац. материаловедение. – 2011. – № 4. – С. 111–117.
11. *Функциональный анализ* / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – Москва: Наука, 1972. – 544 с.
12. *Aramideh S., Xiong Q., Kong S. C., Brown R. C.* Numerical simulation of biomass fast pyrolysis in an auger reactor // *Fuel*. – 2015. – **156**. – P. 234–242. – <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2015.04.038>.
13. *Biogreen.* The pyrolyzer Spirajoule®; 2016. – <http://www.biogreen-energy.com/biogreen/spirajoule/>. – (Accessed 7 Febr. 2016).
14. *Bortolamasi M., Fottner J.* Design and sizing of screw feeders // Proc. Int. Congress for Particle Technology “Partec-2001” (Nuremberg, Germany, 27–29 March, 2001). – Nuremberg, 2001. – P. 27–29.
15. *Campuzano F., Brown R. C., Martínez J. D.* Auger reactors for pyrolysis of biomass and wastes // *Renew. Sustain. Energy Rev.* – 2019. – **102**. – P. 372–409. – <https://doi.org/10.1016/j.rser.2018.12.014>.
16. *Carleton A. J., Miles J. E. P., Valentin F. H. H.* A study of factors affecting the performance of screw conveyers and feeders // *Trans. ASME. J. Eng. Ind.* – 1969. – **91**, No. 2. – P. 329–333. – <https://doi.org/10.1115/1.3591565>.
17. *Evstratov V. A., Rud A. V., Belousov K. Y.* Process modelling vertical screw transport of bulk material flow // *Procedia Eng.* – 2015. – **129**. – P. 397–402. – <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.12.134>.
18. *Guda V. K., Steele P. H., Penmetsa V. K., Li Q.* Fast pyrolysis of biomass: Recent advances in fast pyrolysis technology // *Recent Advances in Thermo-Chemical Conversion of Biomass* / A. Pandey, T. Bhaskar, Stocker M., Sukumaran R. K. (eds.) – Amsterdam etc.: Elsevier, 2015. – (Chap. 7. – P. 177–211). – <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-63289-0.00007-7>.
19. *Henan Pingyuan Mining Machinery Co., Ltd.* What factors that affect the screw conveyor conveying efficiency? – 2015. – <https://www.pkmachinery.com/faq/factors--affect--screw-conveyor-conveying-efficiency.html>. – (Accessed 20 Aug. 2016).
20. *Kovacevic A., Stosic N., Smith I.* Screw compressors: Three dimensional computational fluid dynamics and solid fluid interaction. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. – xii+158 p.
21. *Ledakowicz S., Stolarek P., Malinowski A., Lepez O.* Thermochemical treatment of sewage sludge by integration of drying and pyrolysis/autogasification // *Renew. Sustain. Energy Rev.* – 2019. – **104**. – P. 319–327. – <https://doi.org/10.1016/j.rser.2019.01.018>.
22. *Lepez O., Sajet P.* Patent EP2218300, WO2009095564A2: Device for the thermal processing of divided solids EP 2218300 A2 20100818 (FR).
23. *Martelli F. G.* Twin-screw extruders: A basic understanding. – New York: Van Nostrand Reinhold Co. Inc. 1983. – xii+138 p.
24. *Martínez J. D., Murillo R., García T., Veses A.* Demonstration of the waste tire pyrolysis process on pilot scale in a continuous auger reactor // *J. Hazardous*

- Mater. – 2013. – **261**. – P. 637–645.
 – <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2013.07.077>.
25. *Nachenius R. W., Van De Wardt T. A., Ronsse F., Prins W.* Residence time distributions of coarse biomass particles in a screw conveyor reactor // *Fuel Process. Technol.* – 2015. – **130**. – P. 87–95. – <https://doi.org/10.1016/j.fuproc.2014.09.039>.
 26. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* Numerical recipes in Fortran 77: The art of scientific computing. Volume 1 of Fortran numerical recipes. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. – xxxi+973 p.
 27. *Shi X., Ronsse F., Nachenius R., Pieters J. G.* 3D Eulerian–Eulerian modeling of a screw reactor for biomass thermochemical conversion. Part 2: Slow pyrolysis for char production // *Renew. Energy.* – 2019. – **143**. – P. 1477–1487.
 – <https://doi.org/10.1016/j.renene.2019.05.088>.
 28. *Shi X., Ronsse F., Roegiers J., Pieters J. G.* 3D Eulerian–Eulerian modeling of a screw reactor for biomass thermochemical conversion. Part 1: Solids flow dynamics and backmixing // *Renew. Energy.* – 2019. – **143**. – P. 1465–1476.
 – <https://doi.org/10.1016/j.renene.2019.05.098>.
 29. *Thermal processing of powders: introducing the Spirajoule, heating screw conveyor powered by electricity, 2019.* – <https://etia-group.com/operations-for-thermal-processing>. – (Accessed 3 Febr. 2021).
 30. *Wilson E. B., Jr.* An introduction to scientific research. – New York: Dover Publications, Inc., 1990. – 375 p.
 31. *Yang H., Kudo S., Kuo H.-P., Norinaga K., Mori A., Mašek O., Hayashi J.* Estimation of enthalpy of bio-oil vapor and heat required for pyrolysis of biomass // *Energy Fuels.* – 2013. – **27**, No. 5. – P. 2675–2686.
 – <https://doi.org/10.1021/ef400199z>.

NON-STATIONARY TEMPERATURE DISTRIBUTION IN A THERMALLY INSULATED CONCENTRIC CYLINDRICAL CHANNEL WITH BIOMASS MOVING UNDER THE INFLUENCE OF ROTATION OF ELECTRICALLY HEATED HELIX

The nonstationary problem of determining of the temperature in a circular concentric cylindrical channel of infinite length with thermally insulated surfaces filled with a moving medium under the influence of induction heating of a conductor in the form of a cylindrical helical line (helix) rotating synchronously around the axis of symmetry of the channel is considered. Similar problems arise in the thermal processing of biomaterials using a pyrolysis reaction, when the helical surface of the auger moving the material mixture is heated inductively by electromagnetic field. The problem is solved using the Fourier and Laplace integral transforms over the axial coordinate and time, respectively, as well as the Fourier – Bessel expansions in the angular and radial coordinates. It is shown that the temperature in the channel is characterized mainly by a linear increase over time. Weak oscillations caused by the rotation of the heated helix are superimposed on this component. The low-amplitude temperature oscillations are described by double Fourier – Bessel series, the coefficients of which are determined by the roots of a transcendental equation containing the cross-wise products of derivatives of the Bessel and Neumann functions. These roots are determined numerically using the “regula falsi” method. Numerical analysis revealed a significant effect of radius, pitch and angular velocity of rotation of the helix, as well as the linear velocity of the medium in the channel, on the formation of spatial and temporal characteristics of the microstructure of the temperature field. In particular, the conditions under which there is a resonant amplification of the amplitude of quasi-monochromatic fluctuations of the temperature in the channel are determined.

Keywords: auger reactor, helical screw equipment, electric heating, non-stationary temperature field, mathematical modeling, numerical analysis.