

**ДОСЛІДЖЕННЯ ДВОВИМІРНИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ НАПРУЖЕНЬ  
В АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ НА ОСНОВІ  
ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ШЕРМАНА**

Побудовано регуляризовані інтегральні рівняння типу Шермана для анізотропної плоскої задачі теорії пружності. Інтегральне зображення загального розв'язку для площини з отворами записано через комплексні потенціали Лехницького з використанням теореми Коші та для півплощини – з додатковим застосуванням розв'язків Гріна. Досліджено властивості побудованих інтегральних рівнянь і визначено їх власні розв'язки. На основі підходу Шермана введено регуляризувальні складові, які дозволяють знаходити однозначний розв'язок числовими методами. З використанням розробленого підходу визначено пружні напруження біля підземних виробок у масивах гірських порід із анізотропними механічними характеристиками за врахування гравітаційних сил. Виконано дослідження напружень біля циліндричних порожнин, що мають перерізи кругової і овальної форм, для ізотропних матеріалів та масиву порід із алеволіту. Досліджено взаємовплив порожнин на розподіл напружень.

**Ключові слова:** анізотропна смуга, отвори, напружений стан, розв'язки Гріна, метод інтегральних рівнянь.

**Вступ.** Для розв'язування плоскої анізотропної задачі теорії пружності для багатозв'язних областей широко використовується метод граничних інтегральних рівнянь [7, 10, 13]. У працях [3, 11] побудовано сингулярні інтегральні рівняння на основі методу Лехницького та теореми Коші, які є ефективними при розгляді задач з ненавантаженими отворами. При розгляді складніших задач у ці рівняння входять сингулярні інтеграли, які містять прикладені до меж отворів зусилля, що ускладнює реалізацію підходу.

При дослідженні напружень в ізотропних пластинках з отворами широко використовують простіші інтегральні рівняння типу Шермана. Прикладені зусилля входять у праві частини рівнянь [6].

У розглядуваній статті побудовано такі рівняння для анізотропного середовища. Проведено регуляризацію отриманих інтегральних рівнянь шляхом додавання додаткових операторів, аналогічно, як це проведено в [6]. Записано рівняння для півплощини з отворами на основі розв'язку Гріна. Розв'язування рівнянь виконано чисельно методом механічних квадратур.

Масиви гірських порід моделюються пружними ізотропним і анізотропним півпросторами. Теоретичні та експериментальні методи визначення гравітаційних (початкових) напружень у суцільних масивах порід викладено в [1]. Широке коло досліджень напружень в ізотропних масивах виконано в роботах Савіна [5] та його учнів. У праці [8] напруження досліджувались на основі методу інтегральних рівнянь. Гірські масиви часто мають анізотропні механічні характеристики. Дослідження напружень у таких масивах проведено тільки в окремих роботах [12, 14].

У цій роботі виконано дослідження напружень біля циліндричних порожнин і їх систем з ізотропними і трансверсально-ізотропними механічними характеристиками.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо анізотропне пружне середовище, яке послаблене отворами з граничними контурами  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Прийmemo, що до меж отворів прикладено зусилля  $(X_D, Y_D)$ , середовище навантажено зосередженими силами та рівномірно навантажено на нескінченності (на нескінченності діє однорідний напружений стан). Далі позначимо:  $D$  –

✉ t\_solyar@ukr.net

область, яку займає середовище;  $D_j$  – області, які займають отвори;  $C_j$  – точки, які належать до області  $D_j$ ;  $(X_j, Y_j)$  і  $M_j$  – головний вектор і головний момент відносно точки  $C_j$  усіх сил, прикладених до межі  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Розв'язок задачі теорії пружності виразимо через потенціали Лехницького  $\Phi(z_1)$ ,  $\Psi(z_2)$ , де  $z_j = x + s_j y$ ,  $s_j$  – корені з додатною уявною частиною характеристичного рівняння [2]

$$\alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22} = 0,$$

$\alpha_{ij}$  – пружні сталі в законі Гука у випадку плоского напруженого стану. У випадку плоскої деформації ці коефіцієнти визначаються через пружні сталі за наведеними в [2] формулами.

Для визначення потенціалів необхідно задовольнити умови на межах отворів [2]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[\Phi(z_1)z_1' + \Psi(z_2)z_2'] &= Y_D, \\ 2 \operatorname{Re}[s_1\Phi(z_1)z_1' + s_2\Psi(z_2)z_2'] &= -X_D, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $z_j' = dz_j/ds$ .

Тут і далі дугова координата  $s$  зростає при русі вздовж межі отвору в напрямку, за якого область  $D$  залишається зліва та інтегрування буде проводитись у цьому ж напрямку.

При розгляді прикладених до меж отворів зусиль для ізотропних пластинок ефективними виявились інтегральні рівняння типу Шермана [6]. Побудуємо їх для анізотропних матеріалів. Для цього введемо в розгляд анізотропне середовище, яке займає область  $D_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Прийmemo, що до його межі прикладено зусилля  $-X_D(x, y)$ ,  $-Y_D(x, y)$ ,  $(x, y) \in L_j$ . Щоб при такому навантаженні існував розв'язок задачі теорії пружності для області  $D_j$ , прийmemo додатково, що у її внутрішній точці  $C_j$  діють зосереджені сила  $(X_j, Y_j)$  і головний момент  $M_j$ . Переміщення, які при цьому виникають, позначимо через  $(u^-, v^-)$ .

Розглянемо тепер нескінченну область, поклавши, що  $(u^-, v^-)$  – переміщення в областях  $D_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . На граничних кривих  $L_j$  вектор напружень буде неперервним, а переміщення мають стрибки, похідними від яких  $\epsilon U = \frac{d}{ds}(u - u^-)$ ,  $V = \frac{d}{ds}(v - v^-)$ , де  $(u, v)$  – переміщення в області  $D$ . До прикладеного до вихідної області навантаження необхідно додати зосереджені силові фактори в точках  $C_j$ . Таким чином, вихідна задача зведена до розгляду відомої задачі для нескінченної площини з тріщинами на контурах  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , до берегів яких прикладено зусилля  $(\pm X_D, \pm Y_D)$ . Тоді на основі [3, 11], аналогічно, як у [6], для потенціалів Лехницького отримаємо інтегральне подання типу Шермана у вигляді

$$\Phi(z_1) = \Phi_L(z_1) + \Phi_D(z_1), \quad \Psi(z_2) = \Psi_L(z_2) + \Psi_D(z_2), \quad (2)$$

де

$$\Phi_D(z_1) = \Phi_S(z_1) + \Phi_R(z_1), \quad \Psi_D(z_2) = \Psi_S(z_2) + \Psi_R(z_2),$$

$$\Phi_L(z_1) = \int_L [\Phi_1(z_1, T)U(s) + \Phi_2(z_1, T)V(s)] ds,$$

$$\Psi_L(z_2) = \int_L [\Psi_1(z_2, T)U(s) + \Psi_2(z_2, T)V(s)] ds, \quad (3)$$

$U, V$  – невідомі функції,  $T$  – точка  $(\xi, \eta)$ , за якою проводиться інтегрування;  $L = L_1 + \dots + L_J$ ;  $t_{1,2} = \xi + s_{1,2}\eta$ ,  $ds = \sqrt{(d\xi)^2 + (d\eta)^2}$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_R &= \sum_{j=1}^J [\Phi_3(z_1, C_j)X_j + \Phi_4(z_1, C_j)Y_j + \Phi_5(z_1, C_j)M_j], \\ \Psi_R &= \sum_{j=1}^J [\Psi_3(z_2, C_j)X_j + \Psi_4(z_2, C_j)Y_j + \Psi_5(z_2, C_j)M_j], \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_1, T) &= -\frac{A_k}{z_1 - t_1}, \quad \Psi_k(z_2, T) = -\frac{B_k}{z_2 - t_2}, \quad k = 1, \dots, 4, \\ A_1 &= -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, \quad A_3 = -\frac{ip_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_4 = -\frac{iq_1}{2\pi\Delta_1}, \\ B_1 &= -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2}, \quad B_3 = -\frac{ip_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_4 = -\frac{iq_2}{2\pi\Delta_2} \\ \Phi_5(z_1, C_j) &= \frac{A_4}{(z_1 - c_{1,j})^2}, \quad \Psi_5(z_2, C_j) = \frac{B_4}{(z_2 - c_{2,j})^2}, \\ c_{m,j} &= x_j^C + s_m y_j^C, \quad m = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

$(x_j^C, y_j^C)$  – координати точки  $C_j$ ,

$$\Delta_1 = \alpha_{11}(s_1 - s_2)(s_1 - \bar{s}_1)(s_1 - \bar{s}_2), \quad \Delta_2 = \alpha_{11}(s_2 - s_1)(s_2 - \bar{s}_1)(s_2 - \bar{s}_2).$$

Потенціали  $(\Phi_S, \Psi_S)$  – розв'язок задачі теорії пружності для суцільної площини, навантаженої зосередженими силами, прикладеними до області  $D$ , та зусиллями на нескінченності.

## 2. Властивості розв'язку (3).

I. Знайдемо головний вектор сил, прикладених до контуру  $L_j$ , які відповідають потенціалам (3). Для цього проведемо замкнений контур  $\Gamma$  в області  $D$  навколо меж  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Вектор напружень  $(X_\Gamma, Y_\Gamma)$  на цьому контурі визначається за формулами [2]

$$\begin{aligned} Y_\Gamma &= -2 \operatorname{Re} [\Phi_L(z_1)z'_1 + \Psi_L(z_2)z'_2], \\ X_\Gamma &= 2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi_L(z_1)z'_1 + s_2 \Psi_L(z_2)z'_2], \quad (x, y) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Головний вектор сил  $P_x, P_y$ , який відповідає цим силам, визначається за формулами

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \operatorname{Re} \left[ s_1 \int_\Gamma \Phi_L(z_1)z'_1 ds_\Gamma + s_2 \int_\Gamma \Psi_L(z_2)z'_2 ds_\Gamma \right], \\ P_y &= -2 \operatorname{Re} \left[ \int_\Gamma \Phi_L(z_1)z'_1 ds_\Gamma + \int_\Gamma \Psi_L(z_2)z'_2 ds_\Gamma \right]. \end{aligned}$$

На основі теореми про лишки маємо

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \Phi_L z'_1 ds_\Gamma &= \int_{L_j} \left( U \int_\Gamma \Phi_1 z'_1 ds_\Gamma + V \int_\Gamma \Phi_2 z'_1 ds_\Gamma \right) ds = -\frac{1}{\Delta_1} \int_{L_j} (s_1 U - V) ds, \\ \int_\Gamma \Psi_L z'_2 ds_\Gamma &= \int_{L_j} \left( U \int_\Gamma \Psi_1 z'_2 ds_\Gamma + V \int_\Gamma \Psi_2 z'_2 ds_\Gamma \right) ds = -\frac{1}{\Delta_2} \int_{L_j} (s_2 U - V) ds. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$P_y = \int_{L_j} (R_1 U - R_0 V) ds, \quad P_x = - \int_{L_j} (R_2 U - R_1 V) ds,$$

$$\text{де } R_m = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{s_1^m}{\Delta_1} + \frac{s_2^m}{\Delta_2} \right), \quad m = 0, 1, 2.$$

На основі [11] маємо  $R_m = 0$ ,  $m = 0, 1, 2$ . Спрямовуючи контур  $\Gamma$  до контуру  $L_j$ , встановлюємо, що тотожно виконуються умови

$$\int_{L_j} X_L ds = 0, \quad \int_{L_j} Y_L ds = 0, \quad j = 1, \dots, J, \quad (7)$$

де  $(X_L, Y_L)$  – вектор напружень на контурі  $L$ , який відповідає потенціалам (3).

Аналогічно доводимо, що

$$\int_{L_j} (yX_L - xY_L) ds = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (8)$$

Отже, головний вектор і момент сил на контурах  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , які відповідають потенціалам  $\Phi_L$ ,  $\Psi_L$ , дорівнюють нулеві при довільних функціях  $U$ ,  $V$ .

II. Похідні від переміщень на вказаному контурі  $\Gamma$  визначаються за формулами [2]

$$\frac{du}{ds} = 2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi_L(z_1) z_1' + p_2 \Psi_L(z_2) z_2'],$$

$$\frac{dv}{ds} = 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi_L(z_1) z_1' + q_2 \Psi_L(z_2) z_2'],$$

де

$$p_m = \alpha_{11} s_m^2 - \alpha_{16} s_m + \alpha_{12}, \quad q_m = \alpha_{12} s_m - \alpha_{26} + \alpha_{22} / s_m, \quad m = 1, 2.$$

Знайдемо прирости переміщень, які відповідають потенціалам (3) на вказаному контурі  $\Gamma$  при його повному обході:

$$[u] = 2 \operatorname{Re} \left[ p_1 \int_{\Gamma} \Phi(z_1) z_1' ds_{\Gamma} + p_2 \int_{\Gamma} \Psi(z_2) z_2' ds_{\Gamma} \right],$$

$$[v] = 2 \operatorname{Re} \left[ q_1 \int_{\Gamma} \Phi(z_1) z_1' ds_{\Gamma} + q_2 \int_{\Gamma} \Psi(z_2) z_2' ds_{\Gamma} \right].$$

Звідси при  $j = 1, \dots, J$  маємо

$$[u] = \int_{L_j} (P_0 U - P_1 V) ds, \quad [v] = \int_{L_j} (Q_0 U - Q_1 V) ds,$$

де

$$P_m = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{s_1^m p_1}{\Delta_1} + \frac{s_2^m p_2}{\Delta_2} \right), \quad Q_j = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{s_1^m q_1}{\Delta_1} + \frac{s_2^m q_2}{\Delta_2} \right), \quad j = 0, 1.$$

Використовуючи співвідношення, наведені в [11], маємо

$$Q_0 = -1, \quad P_1 = 1, \quad P_0 = 0, \quad Q_1 = 0.$$

Звідси впливають умови на функції  $U$ ,  $V$ , які забезпечують однозначність переміщень:

$$\int_{L_j} U ds = 0, \quad \int_{L_j} V ds = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (9)$$

III. У поданнях (3) для потенціалів  $\Phi_L, \Psi_L$  на контурах  $L_j, j = 1, \dots, J$ , покладемо  $U = \omega_j \frac{dy}{ds}, V = -\omega_j \frac{dx}{ds}$  де  $\omega_j$  – довільні дійсні сталі. На основі результатів роботи [11] встановлюємо, що потенціали (3) тоді тотожно дорівнюють нулеві при  $(x, y) \in D$ . У внутрішніх областях при  $(x, y) \in D_j$  маємо

$$\Phi_L(z_1) = \frac{\omega_j}{\Delta_1}, \quad \Psi_L(z_1) = \frac{\omega_j}{\Delta_2}.$$

Таким потенціалам відповідає поворот області  $D_j$  на кут  $\omega_j$  і напруження в цій області дорівнюють нулеві [11]. Звідси випливає, що функції  $U$  і  $V$  визначаються на граничних контурах з точністю до складових  $\omega_j \frac{dy}{ds}, -\omega_j \frac{dx}{ds}$ , які відповідають переміщенням межі, що виникають внаслідок її повороту як жорсткого цілого. Зазначимо, що ці складові виникають внаслідок того, що у побудованому розв'язку містяться переміщення у внутрішніх щодо межі отворів областях, які визначаються з точністю до повороту.

**3. Інтегральні рівняння** для знаходження функцій  $U$  і  $V$  отримуємо з умови, що вектор напружень на межах отворів дорівнює заданому [11]. Підставивши потенціали (2) у формули (1) та врахувавши формулу Сохоцького – Племелі, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\tilde{\Phi}_L(z_1)z'_1 + \tilde{\Psi}_L(z_2)z'_2] + H_1 &= -f, \\ 2 \operatorname{Re} [s_1 \tilde{\Phi}_L(z_1)z'_1 + s_2 \tilde{\Psi}_L(z_2)z'_2] + H_2 &= g, \end{aligned} \quad (x, y) \in L, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} H_1 &= (-VR_0 + UR_1)/2, & H_2 &= (-VR_1 + UR_2)/2, \\ f &= Y_D(x, y) + 2 \operatorname{Re} [\Phi_D(z_1)z'_1 + \Psi_D(z_2)z'_2], \\ g &= X_D(x, y) - 2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi_D(z_1)z'_1 + s_2 \Psi_D(z_2)z'_2]. \end{aligned}$$

$\tilde{\Phi}_L, \tilde{\Psi}_L$  – потенціали (3), у яких інтеграли розглядаються в сенсі головного значення за Коші.

Згідно з результатами [11], маємо, що  $H_1 = H_2 = 0$ .

Підставляючи потенціали (3) в умови (10), отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} \int_L [X_1^L(Z, T)U(T) + X_2^L(Z, T)V(T)] ds &= g(Z), \\ \int_L [Y_1^L(Z, T)U(T) + Y_2^L(Z, T)V(T)] ds &= f(Z). \end{aligned} \quad (11)$$

де  $(X_j^L(Z, T), Y_j^L(Z, T))$  – вектори напружень в точці  $Z$  з координатами  $(x, y)$  на кривій  $L$ , які визначаються за формулами (1) відповідно через комплексні потенціали  $(\Phi_j(z_1, t_1), \Psi_j(z_2, t_2))$ ,  $T$  – точка з координатами  $(\xi, \eta)$ , яка належить до контуру  $L$ .

На основі наведених вище властивостей вибраного загального розв'язку (2) інтегральні рівняння мають власні розв'язки з довільними сталими  $\omega_j, j = 1, \dots, J$ , та повинні виконуватись умови (9). Проведемо регуляризацію рівнянь. Для цього до наведеного розв'язку додамо регуляризувальні доданки. Їх отримуємо, замінивши у співвідношеннях (5)

$$X_j, Y_j, M_j \quad \text{на} \quad X_j + X_j^\Delta, Y_j + Y_j^\Delta, M_j + M_j^\Delta,$$

де  $X_j^\Delta, Y_j^\Delta, M_j^\Delta$  – невідомі сталі величини. Їхній взаємозв'язок із функціями  $(U, V)$  запишемо так:

$$X_j^\Delta = \int_{L_j} U ds, \quad Y_j^\Delta = \int_{L_j} V ds, \quad M_j^\Delta = \int_{L_j} \left( U \frac{dy}{ds} - V \frac{dx}{ds} \right) ds. \quad (12)$$

Можна перевірити, що, якщо знайти розв'язок змінених таким чином інтегральних рівнянь (11), то замість встановлених вище тотожностей на кожному з контурів отримаємо рівняння вигляду

$$X_j^\Delta = 0, \quad Y_j^\Delta = 0, \quad M_j^\Delta = 0, \quad j = 1, \dots, J,$$

тобто будуть задовольнятися рівняння (11) до регуляризації та умови (9). Крім того, будуть виконуватись умови

$$\int_{L_j} \left( U \frac{dy}{ds} - V \frac{dx}{ds} \right) ds = 0, \quad j = 1, \dots, J,$$

які фіксують значення довільних сталих  $\omega_j$ , з точністю до яких визначаються на кожному з контурів функції  $U, V$ . Зазначимо, що при цьому в записаних додаткових рівняннях біля невідомих  $\omega_j$  будуть відмінні від нуля величини (довжини граничних контурів).

Зауважимо, що в статті рівняння записано відносно величин, які мають фізичний зміст. Для них у теорії пружності доведено теорему існування. Тому розв'язок побудованих інтегральних рівнянь існує. Додані до загального розв'язку складові містять додаткові зосереджені сили і моменти у внутрішніх областях, які визначаються при числовому розв'язуванні інтегральних рівнянь. Ці складові коригують похибки, які виникають при цьому, і забезпечують виконання умов рівноваги у внутрішніх областях, без яких розв'язок в них не існує.

Розв'язування інтегральних рівнянь проведено методом механічних квадратур. Квадратурні формули для регулярних і сингулярних інтегралів на замкнених контурах, які входять в рівняння (11), наведено в [3, 11].

**4. Гравітаційні напруження** в однорідному тілі (вісь  $Oy$  спрямована у вертикальному напрямку) подамо у вигляді

$$\sigma_y^0 = \gamma y, \quad \sigma_x^0 = \lambda \sigma_y^0, \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (13)$$

де  $\gamma$  – питома вага тіла.

Коефіцієнт бокового тиску  $\lambda$  визначають експериментально. При використанні гіпотези Динника, згідно з якою в однорідному масиві виникають тільки вертикальні переміщення, тут для ізотропного матеріалу за плоскої деформації маємо [1]  $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$ , де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Напруження у масиві від дії власної ваги зобразимо у вигляді суми гравітаційних напружень (13) і коригувального розв'язку. Коригувальний розв'язок виразимо через потенціали Лехницького  $\Phi(z_1), \Psi(z_2)$ , які визначаються із крайових умов (1), коли до меж отворів прикладено зусилля

$$X_D = -\sigma_x^0 \frac{dy}{ds}, \quad Y_D = \sigma_y^0 \frac{dx}{ds}.$$

## 5. Результати обчислень.

**5.1.** Розглянемо випадок, коли порожнини у тілі розміщені на великій відстані від межі тіла. Тоді коригувальний розв'язок може бути знайдений на основі розгляду нескінченної площини з отворами, який записаний вище через потенціали Лехницького. Розглянуто випадок еліптичного отвору з

півосями  $a$ ,  $b$  з центром в точці  $(0, -d)$  в композитній пластинці (плоский напружений стан) із бор-епоксиду з технічними пружними сталими  $E_1 = 207$  Гпа,  $E_2 = 21$  Гпа,  $G = 7$  Гпа  $\nu_{12} = 0.0304$ ,  $\nu_{21} = 0.3$ . Приймали, що виконується гіпотеза Динника. Звідси маємо  $\lambda = -a_{12}/a_{11}$ . Обчислення виконано при  $a = R$ ,  $b = 0.5R$ ,  $d = 5R$ . На рис. 1 наведено відносні кільцеві напруження  $\sigma = \sigma_0/\gamma R$  на межі отвору для ізотропного матеріалу з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0.3$  (крива 1) та бор-епоксидної пластини при максимальному модулі пружності у вертикальному (крива 2) та горизонтальному напрямках (крива 3). При обчисленнях обмежувались 60-ма вузловими точками, за винятком бор-епоксиду з модулем пружності, максимальним у вертикальному напрямку, для якого кількість точок збільшували до 160.

Потенціали Лехницького для розглянутої задачі можуть бути визначені аналітично за наведеним у [2] методом конформного відображення і рядів у вигляді

$$\Phi = \frac{c_0 + c_1/\zeta_1 + c_2/\zeta_1^2}{i\zeta_1\omega'_1(\zeta_1)}, \quad \Psi = \frac{d_0 + d_1/\zeta_2 + d_2/\zeta_2^2}{i\zeta_2\omega'_2(\zeta_2)}, \quad (14)$$

де

$$c_0 = \frac{\gamma S_0}{2\pi} \frac{q_1}{\Delta_1}, \quad d_0 = \frac{\gamma S_0}{2\pi} \frac{q_2}{\Delta_2}, \quad S_0 = \pi ab,$$

$$c_1 = \frac{i\gamma y_c}{2} \frac{s_2 a - i\lambda b}{s_1 - s_2}, \quad d_1 = -\frac{i\gamma y_c}{2} \frac{a s_1 - i\lambda b}{s_1 - s_2},$$

$$c_2 = -\frac{\gamma b}{4} \frac{s_2 a - i\lambda b}{s_1 - s_2}, \quad d_2 = \frac{\gamma b}{4} \frac{a s_1 - i\lambda b}{s_1 - s_2}.$$

Тут змінні  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  пов'язані із координатами  $(x, y)$  співвідношеннями  $x + s_j y = \omega_j(\zeta_j)$ , де

$$\omega_j(\zeta_j) = \frac{a - i s_j b}{2} \zeta_j + \frac{a + i s_j b}{2\zeta_j}, \quad j = 1, 2.$$

На рис. 1 крапками наведено напруження, обчислені за аналітичним розв'язком.

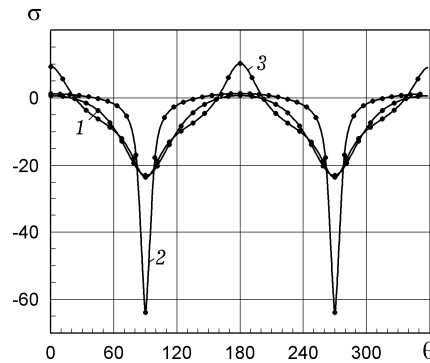


Рис. 1. Відносні кільцеві напруження на межі кругового отвору.

Бачимо, що розроблений числовий алгоритм дозволяє визначати напруження з високою точністю.

**5.2. Гравітаційні напруження у півплощині.** При розгляді порожнин, близьких до межі, середовище будемо розглядати як півплощину  $y < 0$  з вільною від навантаження межею. Запишемо інтегральні рівняння для півплощини з отворами на основі розв'язку Гріна, за якого умови на горизон-

тальній межі виконуються автоматично. Для цього справджуються наведені вище співвідношення (3), у яких покладаємо [3]

$$\begin{aligned}\Phi_j(z_1) &= -\left(\frac{A_j}{z_1 - t_1} + \alpha_1 \frac{\bar{A}_j}{z_1 - \bar{t}_1} + \beta_1 \frac{\bar{B}_j}{z_1 - \bar{t}_2}\right), \\ \Psi_j(z_2) &= -\left(\frac{B_j}{z_2 - t_2} + \alpha_2 \frac{\bar{A}_j}{z_2 - \bar{t}_1} + \beta_2 \frac{\bar{B}_j}{z_2 - \bar{t}_2}\right),\end{aligned}\quad (15)$$

де  $\alpha_1 = \frac{\bar{s}_1 - s_2}{\delta_1}$ ,  $\beta_1 = \frac{\bar{s}_2 - s_2}{\delta_1}$ ,  $\beta_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_2}{\delta_1}$ ,  $\alpha_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_1}{\delta_1}$ ,  $\delta_1 = s_2 - s_1$ .

Крім цього, у співвідношеннях (2) приймаємо, що потенціали  $\Phi_S, \Psi_S$  – розв’язки задачі теорії пружності для суцільної півплощини з вільною від навантаження межею при дії прикладених до області  $D$  зусиль.

Розрахунки виконано за плоскої деформації для ізотропного матеріалу з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0.3$  і транспортного матеріалу алевроліт. Пружні характеристики для цього матеріалу є такими [1]:

$$\begin{aligned}E_1 &= 10.7 \cdot 10^3 \text{ МПа}, & E_2 &= 5.2 \cdot 10^3 \text{ МПа}, & G_2 &= 1.2 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \\ \nu_1 &= 0.413, & \nu_2 &= 0.198.\end{aligned}$$

Напруження у півплощині обчислено для овального отвору (див. рис. 2). Цей отвір утворений із квадратного отвору з центром в точці з координатами  $(0, -H)$  і півстороною  $R$ . Верхні вершини закруглені дугами кола радіуса  $R$ , а нижні – дугами кола радіуса  $0.2R$ . Обчислені залежності відносних кільцевих напружень  $\sigma = \frac{\sigma_\theta}{\gamma R}$  від кутової координати  $\theta$  на межі порожнини

для ізотропного матеріалу при значеннях відношення  $H/R = 1.2, 2, 3, 50$  наведено на рис. 2. Кутова координата відраховується від точки з координатами  $(0, -H + R)$  за годинниковою стрілкою. Аналогічні результати для масиву із алевроліту наведено на рис. 3.

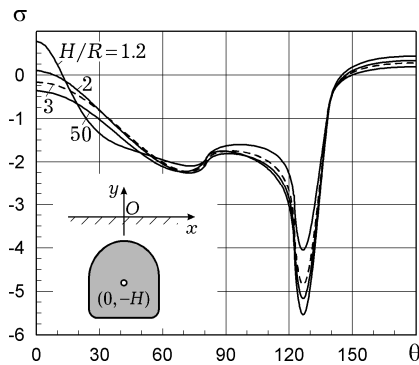


Рис. 2. Напруження біля овального отвору в ізотропному матеріалі.

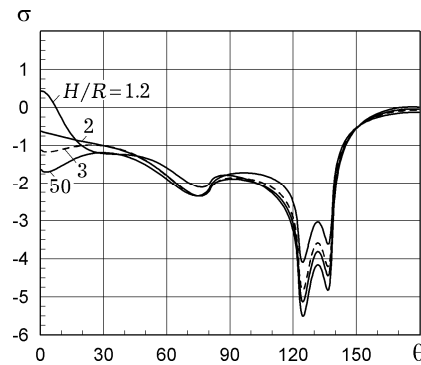


Рис. 3. Напруження біля овального отвору в масиві із алевроліту.

Для обох розглянутих матеріалів максимальними виявились напруження в околі нижніх закруглених вершин. Для ізотропного матеріалу при близьких відстанях порожнин до межі виникають розтягувальні напруження. Для алевроліту на межі порожнини виникають тільки стискувальні напруження, за винятком порожнин, близьких до межі (при  $H/R < 1.2$ ). При достатньо великих значеннях відстаней порожнин від горизонтальної межі (при  $H > 3R$ ) вплив цієї межі на концентрацію напружень незначний, тобто для заглиблених порожнин дослідження напружень можна здійснювати на основі розгляду простішого для розрахунків нескінченного простору з порожнинами, що і було реалізовано в роботах [5, 14].



Досліджено також взаємовплив порожнин на розподіл кільцевих напружень для алевроліту. Розглянуто дві кругові порожнини з центрами в точках  $(-mR, -3R)$ ,  $(mR, -3R)$ . Залежності розподілу напружень на правій порожнині від кутової координати  $\theta$  для значень параметра  $m = 1.1, 1.2, 1.5, 100$  наведено на рис. 4а. Аналогічні результати для масиву з алевроліту з порожнинами з перерізами овальної форми для значень параметра  $m = 1.2, 1.5, 100$  наведено на рис. 4б.

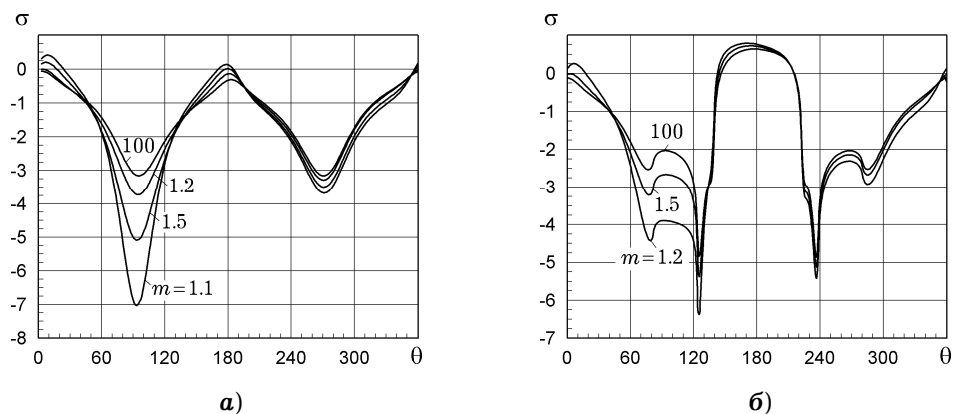


Рис. 4. Напруження біля системи порожнин у масиві з алевроліту.

На рис. 4 бачимо, що у випадку системи порожнин овальної форми на межах виникають розтягуювальні напруження.

**Висновки.** Побудовано регуляризовані сингулярні інтегральні рівняння типу Шермана для анізотропної плоскої задачі теорії пружності. Інтегральне зображення загального розв'язку для площини з отворами записано через комплексні потенціали Лехницького з використанням теореми Коші. Встановлено властивості інтегральних рівнянь і їх власні розв'язки. На основі підходу Шермана проведена регуляризація інтегральних рівнянь, що дозволяє знаходити однозначний розв'язок числовими методами.

Ядра рівнянь для півплощини записано на основі розв'язків Гріна, у зв'язку з чим граничні умови на зовнішній її межі задовольняються тотожно. Виконане тестування алгоритму вказує на його простоту та високу точність.

З використання розробленого підходу визначено пружні напруження біля підземних виробок у масивах гірських порід із анізотропними механічними характеристиками за врахування гравітаційних сил. Досліджено напруження біля порожнин, що мають перерізи кругової та овальної форми для ізотропних матеріалів та масиву порід із алевроліту. Встановлено, що для цих порід виникають стискувальні напруження на межі виробок, які є сприятливішими з точки зору міцності (для ізотропних матеріалів на межі виникають також і розтягуювальні напруження). Досліджено також взаємовплив порожнин на розподіл напружень. Розраховані напруження для алевроліту при цьому виявилися розтягуювальними в деяких областях біля отворів.

1. Буличев Н. С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – Москва: Недра, 1989. – 270 с.
2. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки. – Москва: Гостехиздат, 1957. – 464 с.  
Te same: Lekhnitskii S. G. Anisotropic plates. – New York etc.: Gordon and Breach Sci. Pub., 1968. – 534 p.  
– <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0761-6>.
3. Максимович О. В., Лавренчук С. В., Соляр Т. Я. Контактна задача для анізотропної півплощини з тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – 60, № 1. – С. 141–148.

- Те саме: *Maksymovych O. V., Lavrenchuk S. V., Solyar T. Ya.* Contact problem for an anisotropic half plane with cracks // *J. Math. Sci.* – 2019. – **240**, No. 2. – P. 173–183. – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04345-3>.
4. *Максимович О. В., Соляр Т. Я.* Метод механічних квадратур для розв'язування інтегральних рівнянь термопружності для пластинок з тепловіддачею // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 4. – С. 207–215.  
Те саме: *Maksymovych O. V., Solyar T. Ya.* Method of mechanical quadratures for solving integral equations of thermoelasticity for plates with heat exchange // *J. Math. Sci.* – 2011. – **174**, No. 3. – P. 387–399.
  5. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
  6. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1982. – 324 с.
  7. *Фильштинский Л. А.* Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1980. – № 6. – С. 72–79.
  8. *Шерман Д. И.* К вопросу о напряженном состоянии весомой полуплоскости с двумя заглубленными круговыми отверстиями // *Тр. Ин-та физики Земли АН СССР.* – 1959. – **3**.
  9. *Maazallahi V., Majdi A.* Numerical appraisal of rock mass anisotropy effect on elastic deformations of a circular tunnel // *Arab. J. Geosci.* – 2020. – **13**, No 13. – Article number: 547 (2020). – <https://doi.org/10.1007/s12517-020-05531-3>.
  10. *Maksymovych O., Jaroszewicz J.* Determination of stress state of anisotropic plates with rigid inclusions based on singular integral equations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2018. – **95**. – P. 215–221.
  11. *Maksymovych O., Podhorecki A.* Determination of stresses in anisotropic plates with elastic inclusions based on singular integral equations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2019. – **104**. – P. 364–372.  
– <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.03.039>
  12. *Shrestha P. K., Panthi K. K.* Assessment of the effect of stress anisotropy on tunnel deformation in the Kaligandaki project in the Nepal Himalaya // *Bull. Eng. Geol. Environ.* – 2015. – **74**, No. 3. – P. 815–826. – <https://doi.org/10.1007/s10064-014-0641-5>.
  13. *Tan C. L., Gao Y. L.* Boundary element analysis of plane anisotropic bodies with stress concentrations and cracks // *Compos. Struct.* – 1992. – **20**, No. 1. – P. 17–28.  
– [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(92\)90008-Z](https://doi.org/10.1016/0263-8223(92)90008-Z).
  14. *Vitali O. P. M., Celestino T. B., Bobet A.* Analytical solution for a deep circular tunnel in anisotropic ground and anisotropic geostatic stresses // *Rock Mech. Rock Eng.* – 2020. – No. 9.

#### STUDIES OF TWO-DIMENSIONAL GRAVITATIONAL STRESSES IN ANISOTROPIC MEDIA BASED ON INTEGRAL SHERMAN-TYPE EQUATIONS

*Regularized Sherman-type integral equations for the anisotropic plane problem of the theory of elasticity are constructed. The integral representation of the general solution for the plane with holes is written via Lechnitskii complex potentials using Cauchy theorem, and for a half-plane – with additional application of Green's solutions. The properties of the constructed integral equations are studied and their eigen solutions are determined. Based on Sherman's approach, regularizing components are added, which allow to find a unique solution by numerical methods. Using the developed approach the elastic stresses near underground workings in rock massifs with anisotropic mechanical characteristics taking into account the gravitational forces are determined. The investigations of stresses near the cylindrical cavities with cross-sections of circular or oval shapes for isotropic materials and for rock mass from aleurolite. The interaction of cavities on stress distribution is investigated.*

**Keywords:** *anisotropic strip, holes, stress state, Green's solutions, method of integral equations.*

<sup>1</sup> Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

<sup>2</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів