

**МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФОРМИ ЗУБНИХ ДУГ ПРИ ОРТОГНАТИЧНІЙ ОКЛЮЗІЇ**

*Проведено математичне моделювання форми зубних дуг. Зроблено припущення, що зубні дуги можуть бути змодельовані кривими другого порядку. Після аналізу даних вимірювань діагностичних моделей зубних рядів розраховано коефіцієнти квадратичної форми зазначених кривих другого порядку та інваріант цієї форми. Оскільки значення інваріанта кривої другого порядку виявилось більшим від нуля, то зроблено висновок, що форми зубних дуг описуються рівнянням еліпса. Визначено параметри канонічного рівняння еліпса, що моделює форму зубних дуг. Розроблено методикку конкретизації параметрів моделі з метою її застосування у процесах ортопедичного та ортодонтичного лікування.*

**Ключові слова:** ортогнатичний прикус, математична модель зубної дуги, інваріант квадратичної форми, канонічне рівняння еліпса.

**Вступ.** Відновлення зубних рядів і формування правильного прикусу зубів у пацієнтів є одними з основних завдань стоматології. Серед різних форм прикусу найбільш придатним з точки зору функціональності та естетичного вигляду є ортогнатичний прикус [1]. Завдання встановлення необхідного прикусу полягає в наданні зубним дугам відповідної форми та в узгодженні взаємного положення зубів нижньої і верхньої щелеп. Під поняттям форми зубних дуг будемо розуміти форму лінії перетину циліндричної поверхні, що описана навколо зубного ряду, і жувальної або оклюзійної площини. Зубні дуги набувають своєї форми під впливом генетичних особливостей пацієнта, наявності у нього шкідливих звичок та інших чинників [13, 15, 16]. Зубна дуга в ортодонтичному прикусі повинна бути симетричною і не мати точок перегину.

Під час ортопедичного та ортодонтичного лікування необхідно встановити форму, яку треба надати зубній дузі. В стоматології все більшого застосування набувають методи математичного моделювання [2–4, 11]. У роботах [9, 12] вважали, що нижня зубна дуга повинна мати форму рівностороннього трикутника з заокругленням у місці розташування шести передніх зубів. В [1, 8] було запропоновано форму зубної дуги у вигляді еліпса, в [7, 18] – параболи, а в [10, 14, 17] – кривої гіперболічного косинуса. В [6] форму зубної дуги описували за допомогою поліномів шостого порядку, проте такі поліноми мають точки перегину, яких зубна дуга в ортодонтичному прикусі мати не повинна.

Метою цієї роботи є математичне моделювання форми зубних дуг і розробка методики конкретизації параметрів цієї моделі для її застосування у процесах ортопедичного та ортодонтичного лікування. Поставлена задача вирішується на основі даних обстежень пацієнтів з ортогнатичним прикусом у постійному періоді, які були проведені в Національному медичному університеті ім. О. О. Богомольця.

**1. Результати дослідження і їхнє обговорення.** Припустимо, що крива, яка огинає зовнішні вестибулярні поверхні верхнього і нижнього зубних рядів, є кривою другого порядку. Загальне рівняння кривої другого порядку в довільній прямокутній системі координат  $xOy$  має вигляд [5]

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

де  $a_{ij}$  – постійні коефіцієнти.

✉ ayagrigorenko1991@gmail.com

Рівнянню (1) кривої другого порядку відповідає характеристична квадратична форма [5]

$$F_0(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2. \quad (2)$$

Визначник  $I$ , складений з коефіцієнтів форми (2), має вигляд

$$I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Цей визначник є інваріантом і не змінює своєї величини при повороті осей і поступальному переміщенні системи координат.

Якщо величина інваріанта  $I$  є більшою від нуля, то рівняння (1) є рівнянням еліпса, якщо меншою нуля – гіперболи, а коли вона дорівнює нулеві – параболі. Щоб визначити величину інваріанта  $I$ , необхідно знайти коефіцієнти характеристичної форми (2). Рівняння (1) кривої другого порядку, що проходить через п'ять точок  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , можна записати у такому вигляді [5]:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Якщо визначник (4) розгорнути по його першому рядку, то отримаємо рівняння (1) із коефіцієнтами  $a_{ij}$ , які визначаються за формулами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \begin{vmatrix} x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, & a_{12} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, \\ a_{22} &= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, & a_{13} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, \\ a_{33} &= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 \end{vmatrix}, & a_{23} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

За величини  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , що містяться у (4) та (5), вибрали координати точок вестибулярних (дотичних до губ чи щік) поверхонь других молярів та ікол, а також точку, яка ділить наполовину відрізок, що з'єднує середини вестибулярних поверхонь центральних різців. Якщо другі моляри відсутні, то замість них брали координати перших. Для визначення координат точок  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , вестибулярних поверхонь зубних рядів використовували гіпсові моделі зубних рядів пацієнтів з ортогнатичним прикусом. Гіпсові моделі сканували з боку оклюзійної площини, на отриманому зображенні зубного ряду позначали точки  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , та вимірювали їхні координати.

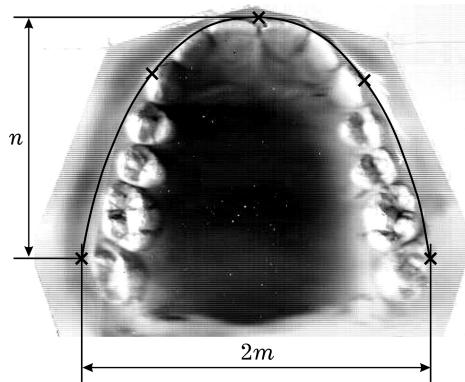


Рис. 1

На рис. 1 зображено гіпсову модель верхнього зубного ряду з точками  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , відмічені хрестиками. Було відскановано та виміряно координати точок гіпсових моделей верхньої і нижньої щелеп трьох пацієнтів. Результати цих вимірювань подано в табл. 1.

Таблиця 1

Верхня щелепа						Нижня щелепа					
Пацієнт 1		Пацієнт 2		Пацієнт 3		Пацієнт 1		Пацієнт 1		Пацієнт 1	
$x$ , мм	$y$ , мм	$x$ , мм	$y$ , мм	$x$ , мм	$y$ , мм	$x$ , мм	$y$ , мм	$x$ , мм	$y$ , мм	$x$ , мм	$y$ , мм
-29.5	3.0	-	-	-26.6	3.2	-27.4	1.8	-	-	-25.7	12.3
-27.5	13.5	-25.6	12.1	-24.6	14.1	-25.4	10.2	-22.0	6.3	-23.6	23.8
-25.0	20.6	-23.7	19.2	-24.1	21.5	-19.9	19.0	-20.6	13.1	-22.3	31.6
-23.3	28.2	-21.8	25.8	-21.7	28.0	-17.9	25.2	-18.4	20.6	-19.0	38.4
-18.7	36.3	-17.4	32.7	-17.8	35.7	-13.6	31.0	-14.1	26.8	-14.4	44.1
-12.8	42.6	-11.6	37.4	-12.3	40.1	-8.6	35.3	-8.7	30.5	-9.0	48.3
-3.9	46.4	-4.40	40.9	-4.9	43.8	-2.9	36.6	-2.7	32.5	-3.0	49.9
4.9	46.4	5.2	40.9	4.9	43.8	2.9	36.6	3.3	32.5	2.6	49.9
13.3	42.6	12.1	37.4	12.5	40.1	8.2	35.3	8.9	30.5	8.4	48.3
18.1	36.3	17.8	32.7	16.8	35.7	13.2	31.0	13.3	26.8	13.8	44.1
22.3	28.2	21.6	25.8	21.5	28	17.1	25.2	18.7	20.6	18.6	38.4
24.7	20.6	23.5	19.2	23.9	21.5	20.9	19.0	20.9	13.1	22.3	31.6
27.7	13.5	24.4	12.1	25.4	14.1	25.7	10.2	22.5	6.3	24.5	23.8
29.7	3.0			26.9	3.2	27.7	1.8	-	-	27.1	12.3

Після аналізу даних вимірювань було обчислено коефіцієнти квадратичної форми  $a_{ij}$  та її інваріант  $I$ . Інваріант  $I$  для всіх верхніх і нижніх зубних рядів мав величину більшу від нуля, звідки випливає, що рівняння

(1) для цих зубних дуг є рівнянням еліпса. Рівняння (1) можна записати в такому канонічному вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6)$$

де  $a$  та  $b$  – півосі еліпса, які визначали за формулами [5]

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 I}, \quad b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 I}. \quad (7)$$

У (7) позначено

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

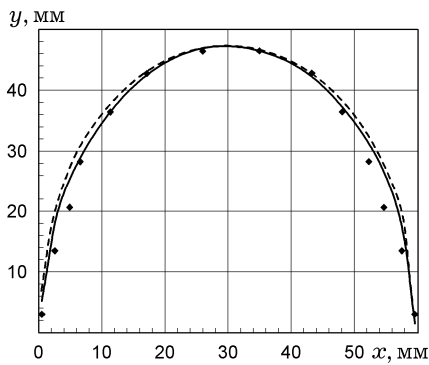
$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + 4a_{12}}}{2},$$

$\lambda_{1,2}$  – корені характеристичного рівняння  $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = 0$ .

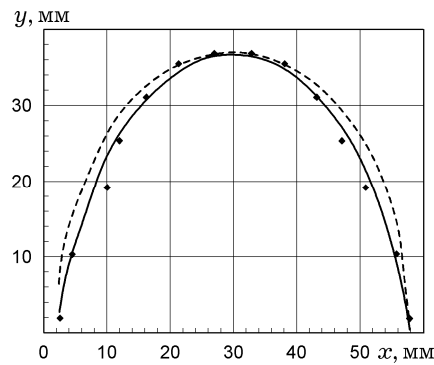
Таблиця 2

Щелепа		Пацієнт 1	Пацієнт 2	Пацієнт 3
Верхня	$a$ , мм	29.7	24.9	27.1
	$m$ , мм	29.6	25.0	26.8
	$b$ , мм	47.1	28.3	35.2
	$n$ , мм	43.4	28.8	40.6
Нижня	$a$ , мм	28.8	25.0	26.4
	$m$ , мм	27.6	24.9	26.4
	$b$ , мм	49.2	35.1	37.4
	$n$ , мм	34.8	37.9	37.7

У табл. 2 наведено величини півосей еліпса  $a$  та  $b$  для верхньої і нижньої щелеп, що були визначені за формулами (6), (7), а також піввідстані  $m$  та  $n$  між крайніми точками вестибулярних поверхонь зубів (див. рис. 1). Із табл. 2 можемо бачити, що величина малої півосі еліпса  $a$  незначно відрізняється від піввідстані між вестибулярним точками других молярів  $m$ . Величина великої півосі еліпса  $b$  на 10÷30% більша, ніж відстань  $n$  між вестибулярними точками центральних різців і других молярів.



а)



б)

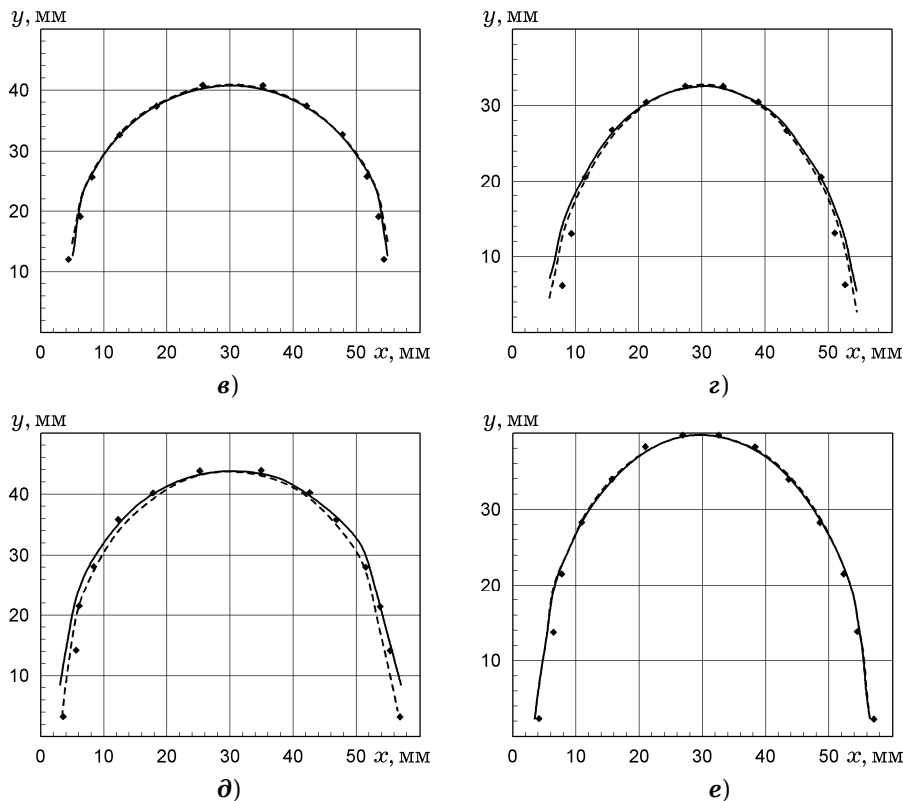


Рис. 2

На рис. 2 показано зубні дуги верхньої (рис. 2а, рис. 2в, рис. 2д) і нижньої (рис. 2б, рис. 2г, рис. 2е) щелеп пацієнта 1 (рис. 2а, рис. 2б), пацієнта 2 (рис. 2в, рис. 2г) і пацієнта 3 (рис. 2д, рис. 2е), побудовані за канонічним рівнянням еліпса (6) і даними табл. 2. Суцільними лініями показано залежність (6) для відповідних  $a$  та  $b$ . Штриховими лініями показано цю ж залежність (6), у якій значення  $a$  та  $b$  замінено, відповідно, величинами  $m$  та  $n$ . Точками на рис. 2 показано дані, отримані вимірюванням сканованих зображень гіпсових моделей. Як можна бачити з рисунка, криві, побудовані за канонічним рівнянням еліпса з величинами  $a$  та  $b$ , добре описують форму зубних рядів верхньої і нижньої щелепи. Відхилення вестибулярних точок зубів від кривих, побудованих за рівнянням (6) відповідно до запропонованої методикою з коефіцієнтами, обчисленими за формулами (4), (5), не перевищують величини 1,5 мм. Криві, побудовані за канонічним рівнянням еліпса (6), у якому значення  $a$  та  $b$  було замінено величинами  $m$  та  $n$ , відхиляються від даних вимірювань на 3 мм.

**Висновки.** Таким чином, можна зробити висновок, що серед кривих другого порядку еліпс найкраще описує форму зубних дуг верхньої і нижньої щелеп з ортодонтичним прикусом. Це дозволяє використовувати канонічне рівняння еліпса для побудови форми зубних дуг верхньої та нижньої щелеп. Отриманий профіль зубних дуг може бути застосований при проектуванні протезних та ортодонтичних пристроїв, які використовуються при формуванні у пацієнтів ортодонтичного прикусу. При побудові форми зубної дуги можна використовувати канонічне рівняння еліпса з величинами півосей  $a$  та  $b$ , які отримано згідно із запропонованою методикою за координатами п'яти точок, що розміщені на вестибулярних поверхнях центральних різців, ікол та других молярів. За перше наближення при побудові форми зубних дуг можна також використовувати канонічне рівняння еліпса, в якому замість величин півосей  $a$  та  $b$  взяти розміри  $m$  та  $n$  зубних дуг.

1. Бердин В. В., Дмитриенко С. В., Севастьянов А. В., Иванова О. П., Ярадайкина М. Н., Климова Н. Н. Варианты формы зубных дуг при оптимальной функциональной окклюзии постоянных зубов // *Фундамент. исследования.* – 2012. – № 12-2. – С. 219–222.
2. Богданов В. Л., Григоренко А. Я., Сороченко Г. В., Тормахов Н. Н. Влияние формы и геометрических параметров кламмеров на прочность и удерживающее усилие съемных ортопедических протезов // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* 2020. – **63**, № 1. – С. 173–180.
3. Григоренко А. Я., Лось В. В., Маланчук В. А., Тормахов Н. Н. Напряженное состояние резьбового соединения в системе дентальный имплантат – кость // *Прикл. механика.* – 2020. – **56**, № 1. – С. 44–51.  
То же: Grigorenko A. Ya., Los' V. V., Malanchuk V. A., Tormakhov N. N. Stress state of a threaded joint in a dental implant – bone system // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, No. 1. – P. 33–39.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00994-z>.
4. Григоренко А. Я., Плиски Е. Н., Сороченко Г. В., Тормахов Н. Н. Применение методов численного анализа для изучения механических процессов в биомеханике // *Прикл. механика.* – 2018. – **54**, № 3. – С. 136–144.  
Те саме: Grigorenko A. Ya., Pliska E. N., Sorochenko G. V., Tormakhov N. N. Application of methods of numerical analysis for studying mechanical processes in biomechanics // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, No. 3. – P. 366–372.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0888-9>.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1974. – 831 с.  
Те саме: Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review.* – New York: Dover Publ. Inc., 2000. – 1151 p.
6. Aljayousi M., Al-Khateeb S., Badran S., Abu Alhaija E. S. Maxillary and mandibular dental arch forms in a Jordanian population with normal occlusion // *BMC Oral Health.* – 2021. – **21**. – Article No. 105.  
– <https://doi.org/10.1186/s12903-021-01461-y>.
7. Angle E. H. *Treatment of malocclusion of the teeth: Angle's system.* – Philadelphia: S.S. White Dental Manufacturing Co., 1907. – xv+628 p.
8. Black G. V. *Descriptive anatomy of the human teeth.* – Philadelphia: S.S. White Dental Manufacturing Co.; 1902. – xvii+169 p.
9. Bonwill W. G. A. *Geometrical and mechanical laws of articulation: Anatomical articulation* // *Trans. Odont. Soc. Penns.* – 1885. – P. 119–133.
10. Burdi A. R., Lillie J. H. A catenary analysis of the maxillary dental arch during human embryogenesis // *Anat. Rec.* – 1966. – **154**, No. 1. – P. 13–20.
11. Felton J. M., Sinclair P. M., Jones D. L., Alexander R. G. A computerized analysis of the shape and stability of mandibular arch form // *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.* – 1987. – **92**, No. 6. – P. 478–483.  
– [https://doi.org/10.1016/0889-5406\(87\)90229-0](https://doi.org/10.1016/0889-5406(87)90229-0).
12. Hawley C. A. Determination of the normal arch and its application to orthodontia // *Dent. Cosm.* – 1905. – **47**, No. 5. – P. 541–552.
13. Linder-Aronson S. Adenoids: Their effect on mode of breathing and nasal airflow and their relationship to characteristics of the facial skeleton and dentition: A biometric, rhino-manometric and cephalometro-radiographic study on children with and without adenoids // *Acta Otolaryngol.* – 1970. – Suppl. **265**. – 132 p.
14. MacConaill M. A., Scher E. A. The ideal form of the human dental arcade, with some prosthetic application // *Dent. Rec. (London).* – 1949. – **69**, No. 11. – P. 285–302.
15. Omar H., Alhajrasi M., Felemban N. H., Hassan A. H. Dental arch dimensions, form and tooth size ratio among a Saudi sample // *Saudi Med. J.* – 2018. – **39**, No. 1. – P. 86–91. – <https://doi.org/10.15537/smj.2018.1.21035>.
16. Proffit W. R., Fields H. W., Nixon W. L. Occlusal forces in normal- and long- face adults // *J. Dent. Res.* – 1983. – **62**, No. 5. – P. 566–571.  
– <https://doi.org/10.1177/00220345830620051201>.
17. Scott J. H. The shape of the dental arches // *J. Dent. Res.* – 1957. – **36**, No. 6. – P. 996–1003. – <https://doi.org/10.1177/00220345570360062901>.
18. Sicher H. *Oral anatomy.* – St. Louis: The C. V. Mosby Co., 1952.

## MECHANICAL-MATHEMATICAL MODELING OF THE SHAPE OF DENTAL ARCHES IN ORTHOGNATHIC OCCLUSION

*Mathematical modeling of the shape of dental arches is performed. It is assumed that dental arches can be modeled by the second-order curves. After processing the measurement data of diagnostic models of dentitions, the coefficients of the quadratic form of the curves of the second order and its invariant were calculated. Since the value of the invariant of the second-order curves was greater than zero, it was concluded that the shapes of the dental arches are described by the equation of an ellipse. The parameters of the canonical equation of an ellipse modeling the shape of dental arches are determined. The technique of concretization of parameters of the model for the purpose of its application in processes of orthopedic and orthodontic treatment is developed.*

**Key words:** orthognathic occlusion, mathematical model of dental arch, invariant of the quadratic form, canonical equation of the ellipse.

<sup>1</sup> Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,

<sup>2</sup> Нац. мед. ун-т ім. О. О. Богомольця, Київ

Одержано

15.01.21