

О. В. Уляничук-Мартинюк✉

**МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ КОНЦЕНТРАЦІЇ РОЗЧИНУ НА ЗНАЧЕННЯ СТРИБКІВ ВОЛОГОСТІ В ТОНКОМУ ГЕОХІМІЧНОМУ БАР'ЄРІ**

*Розглянуто процес поширення вологи в масиві ґрунту з тонкими неоднорідними включеннями, які є частковим випадком геохімічних бар'єрів. Ураховано залежності параметрів вологоперенесення тонкого включення від вологості та концентрації розчину шляхом модифікації умов спряження. Побудовано відповідну нелінійну математичну модель, на основі якої сформульовано крайову задачу для системи параболічних рівнянь у класі розривних розв'язків. Наближений розв'язок задачі побудовано за допомогою методу скінченних елементів. У результаті числових експериментів показано відмінності у величинах стрибків вологості при переході через тонкі геохімічні бар'єри при використанні класичних і модифікованих умов спряження.*

**Ключові слова:** концентрація розчину, стрибок вологості, геохімічний бар'єр, умова спряження.

**Вступ.** Ґрунтові масиви здебільшого містять тонкі включення з різнотипних ґрунтів, формування яких спричинене природними чинниками, або ж є наслідком людської діяльності. Часто штучні тонкі включення застосовують у конструкціях сховищ промислових та побутових відходів як бар'єри для обмеження поширення шкідливих речовин. Основним їх матеріалом є глини, в тому числі з домішками [14, 29], та геотекстиль [20, 28]. Такі включення є одним із видів геохімічних бар'єрів у сенсі визначення, вперше запропонованого Перельманом [26]. В [27] простежено хронологію використання штучних геосинтетичних бентонітових геобар'єрів у сховищах відходів. Здебільшого такі геобар'єри виготовляють у вигляді панелей шириною 4.2–5.3 м, довжиною 30–61 м та товщиною 15–30 мм.

Процеси вологосолеперенесення в геобар'єрах ефективно досліджують з використанням математичного моделювання. Передумовою для таких досліджень є натурні експерименти, за допомогою яких визначають вплив характеристик базового ґрунту і включень. У [15] встановлено залежність фільтраційних характеристик геотекстильних глинистих включень від концентрації розчиненої речовини. Величина коефіцієнта фільтрації геотекстильних включень, яку потрібно враховувати при проектуванні сховищ відходів, є предметом експериментальних досліджень. У [12] досліджено залежності гідропровідності геосинтетичних глинистих включень від домішок продуктів згорання вугілля та прикладеного навантаження.

З математичної точки зору, побудова моделей геоміграційних процесів у ґрунтових середовищах із тонкими геобар'єрами має свої особливості. Зокрема, якщо товщина геобар'єра є нехтовно малою порівняно з розмірами масиву ґрунту, то на таких включеннях задають умови спряження для визначальних функцій процесу (вологість, напір, концентрація розчину) [8]. У цій роботі при виведенні умов спряження в задачі перенесення вологи та міграції речовин коефіцієнт вологоперенесення матеріалу включення приймали сталим і не залежним від вологості та концентрації розчину. Існування узагальнених розв'язків відповідних крайових задач досліджено в [6, 7, 24, 25].

Розвиваються методи розв'язування крайових задач з умовами спряження (див. [2]). Для таких задач у [8] застосовано метод скінченних елементів. У роботі [1] теоретично обґрунтовано та програмно реалізовано авторські чисельно-аналітичні алгоритми апроксимації розв'язків таких задач із застосуванням лінійних поліноміальних операторів. Процеси дифузії

✉ o.v.ulianchukmartyniuk@nuwm.edu.ua

домішок у двофазній шаруватій смузі випадково неоднорідної структури з урахуванням стрибків функції концентрації та її похідної на межі контакту фаз досліджено в [10] і в наведених там бібліографічних джерелах.

У цій статті розглянуто процес поширення вологи в масиві ґрунту з тонким неоднорідним включенням (геохімічним бар'єром) з урахуванням залежності параметрів вологоперенесення включення від вологості та концентрації розчинів шляхом модифікації умов спряження.

**1. Нелінійні залежності фільтраційних та дифузійних параметрів в ґрунтах.** Розглянемо в одновимірному випадку процес зміни вологості шару ґрунту товщини  $\ell$ , що містить тонке включення (рис. 1). Матеріал включення відрізняється фізико-хімічними та гідрологічними характеристиками від ґрунту в областях  $\Omega_1 = (0, \xi)$  та  $\Omega_2 = (\xi + d, \ell)$ . Для існування принаймні слабких розв'язків крайових задач, якими описуються процеси фільтрації, вологості та теплосолеперенесення для визначальних функцій процесів (вологість, напір, температура, концентрація розчину) та їхніх потоків при переході через включення, повинні виконуватись умови спряження. Умову спряження в задачі фільтрації виведено [8] у припущенні, що напір  $h$  лінійно змінюється від  $h^-$  до  $h^+$  уздовж вектора нормалі до поперечного перерізу тонкого включення  $\gamma$  товщини  $d$ :

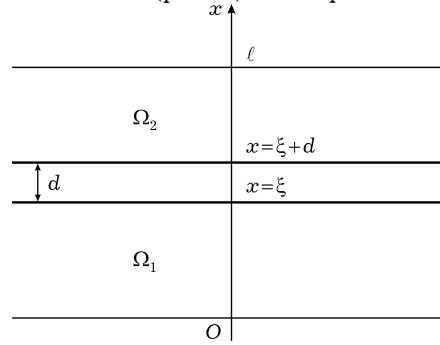


Рис. 1. Шар ґрунту з тонким включенням товщини  $d \ll \ell$ .

$$h(\zeta, t) = \frac{h^+ - h^-}{d} \zeta + h^-, \quad \frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{h^+ - h^-}{d}, \quad 0 \leq \zeta \leq d.$$

Тут  $h^+$  та  $h^-$  – значення напорів на включенні при  $\zeta = d$  та  $\zeta = 0$  відповідно, а систему координат  $O\zeta$  пов'язано з перерізом включення. Тоді умова неідеального контакту на межі включення ( $\gamma$ ) набуде вигляду [8]

$$u^\pm \Big|_\gamma = -k_0 \frac{dh}{d\zeta}$$

або

$$u^\pm \Big|_\gamma = -\frac{k_0}{d} (h^+ - h^-).$$

Тут  $u$  – швидкість фільтрації або вологоперенесення, а  $k_0$  – сталий коефіцієнт фільтрації тонкого включення.

Відомо, що коефіцієнт вологоперенесення, який у випадку повного насичення є коефіцієнтом фільтрації, суттєво залежить від вологості  $\theta$ , а отже – від напорів  $h$  [17]. Згідно з моделлю ван Генухтена [17],

$$\theta(h) = \theta_{\min} + \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{(1 + (-\alpha h)^n)^m}, \quad k(h) = k_0 \sqrt{s} (1 - (1 - \sqrt[m]{s})^m)^2,$$

де  $\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ ,  $\theta_{\min} > 0$ ,  $\theta_{\max} \in (\theta_{\min}, 1]$ ,  $n > 1$ ,  $m = 1 - 1/n$ ,  $s = (\theta - \theta_{\min}) / (\theta_{\max} - \theta_{\min})$  – відносна вологість. Значення  $\theta_{\min}$ ,  $\theta_{\max}$ ,  $\alpha$ ,  $n$  залежать від типу ґрунту і визначаються експериментально. Коефіцієнт фільтрації  $k_0$  залежить від концентрації розчинів [5, 9, 21].

У [16] вивчено залежність коефіцієнта дифузії домішок  $D$  від вологості ґрунту і її вплив на поширення речовин через геобар'єр під звалищем відходів. Зокрема, узагальнюючи натурні експерименти, автори запропонували залежність

$$D(\theta) = \begin{cases} \alpha + \beta\theta, & \theta > \theta_1, \\ 0, & \theta \leq \theta_1, \end{cases}$$

де константи  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta_1$  визначаються типом ґрунту.

Аналіз літературних джерел стосовно залежностей від вологості коефіцієнта дифузії розчинів у ненасичених ґрунтах наведено в [18]. Зокрема, зазначено, що такі залежності є здебільшого нелінійними.

З аналізу літератури можна зробити висновок, що залишається недостатньо вивченим вплив нелінійних залежностей коефіцієнтів вологоперенесення і дифузії від вологості та концентрації розчинів на зміну стрибків відповідних функцій при переході через тонкі включення. Такі дослідження передбачають модифікацію умов спряження, побудову та модельний аналіз наближених розв'язків сформульованих крайових задач.

**2. Модифіковані умови спряження.** Припустимо, що внаслідок тонкості включення процеси вологосолеперенесення у поперечному перерізі включення є стаціонарними [13, 22]. Тоді для включення розглянемо таку задачу поширення вологи та розчину солей:

$$\frac{d}{d\zeta} \left( -k^\gamma(h, c) \frac{dh}{d\zeta} + k^\gamma(h, c) \right) = 0, \quad 0 < \zeta < d, \quad (1)$$

$$h(0) = h^-, \quad h(d) = h^+, \quad (2)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left( -D^\gamma(h, c) \frac{dc}{d\zeta} \right) = 0, \quad 0 < \zeta < d, \quad (3)$$

$$c(0) = c^-, \quad c(d) = c^+. \quad (4)$$

Тут  $k^\gamma(h, c)$ ,  $D^\gamma(h, c)$  – коефіцієнти вологоперенесення і дифузії речовини для тонкого включення, які нелінійно залежать від напорів  $h$  і концентрації розчину солей  $c$ .

На основі (1), (2) отримуємо [22] рівність

$$h(\zeta) = \zeta + \int_0^\zeta \frac{dx}{k^\gamma(h, c)} \left( \frac{[h]}{\int_0^d \frac{dx}{k^\gamma(h, c)}} - \frac{d}{\int_0^d \frac{dx}{k^\gamma(h, c)}} \right) + h^-,$$

де  $[h] = h^+ - h^-$  – стрибок напорів при переході через тонке включення.

З отриманої рівності випливає

$$\frac{dh(\zeta)}{d\zeta} = 1 + \frac{[h]}{k^\gamma(h, c) \int_0^d \frac{dx}{k^\gamma(h, c)}} - \frac{d}{k^\gamma(h, c) \int_0^d \frac{dx}{k^\gamma(h, c)}}, \quad (5)$$

а в роботі [8] отримано умову для швидкості вологоперенесення

$$u^\pm \Big|_{x=\zeta} = -k^\gamma(h, c) \frac{dh(\zeta)}{d\zeta} + k^\gamma(h, c). \quad (6)$$

Із використанням (5), (6) виводимо модифіковану умову неідеального контакту для напорів на межі включення, коефіцієнт вологоперенесення якого залежить від напорів і концентрації розчину:

$$u^\pm|_{x=\xi} = -\frac{[h]}{\int_0^d \frac{dx}{k^\gamma(h,c)}} + \frac{d}{\int_0^d \frac{dx}{k^\gamma(h,c)}}.$$

Аналогічно [8, 13] на основі (3), (4) отримаємо

$$\left(-D(h,c)\frac{\partial c}{\partial x}\right)^\pm|_{x=\xi} = -\frac{[c]}{\int_0^d \frac{dx}{D^\gamma(h,c)}},$$

де  $[c] = c^+ - c^-$  – стрибок концентрації розчину при переході через тонке включення.

**3. Математична модель задачі вологосолеперенесення в шарі ґрунту з тонким включенням.** Процес зміни напорів і концентрації розчинів у неповністю насиченому вологою неоднорідному масиві ґрунту в одновимірному випадку опишемо такою крайовою задачею:

$$\beta(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(h,c)\frac{\partial h}{\partial x} - k(h,c)\right), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$h(x,t)|_{x=\ell} = h_\ell(t), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$u(x,t)|_{x=0} = \left(-k(h,c)\frac{\partial h}{\partial x} + k(h,c)\right)|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

$$h(x,0) = h_0(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (10)$$

$$\theta(h)\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(h,c)\frac{\partial c}{\partial x}\right) - u\frac{\partial c}{\partial x}, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$c(x,t)|_{x=\ell} = c_\ell(t), \quad t \geq 0, \quad (12)$$

$$q_c(x,t)|_{x=0} = -D(h,c)\frac{\partial c}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

$$c(x,0) = c_0(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (14)$$

$$u^\pm|_{x=\xi} = -\frac{[h]}{\int_0^d \frac{dx}{k^\gamma(h,c)}} + \frac{d}{\int_0^d \frac{dx}{k^\gamma(h,c)}}, \quad (15)$$

$$\left(-D(h,c)\frac{\partial c}{\partial x}\right)^\pm|_{x=\xi} = -\frac{[c]}{\int_0^d \frac{dx}{D^\gamma(h,c)}}. \quad (16)$$

Тут, згідно з моделлю ван Генухтена [17],

$$\beta(h) = \frac{d\theta}{dh} = \alpha n m (\theta_{\max} - \theta_{\min}) (1 + (-\alpha h)^n)^{-m-1} (-\alpha h)^{n-1}.$$

У рівняннях (7), (11) знехтувано внутрішніми джерелами (стоками) води та речовини, у тому числі процесами масообміну. Тут  $c_\ell(t)$ ,  $h_\ell(t)$ ,  $h_0(x)$ ,  $c_0(x)$  – задані функції;  $q_c$  – величина потоку розчину. Функції  $h_0(x)$ ,  $c_0(x)$  повинні бути неперервними на кожному з відрізків  $[0, \xi]$ ,  $[\xi + d, \ell]$ .

**4. Розв'язання задачі в області з включенням методом скінченних елементів.** Нехай [8]  $H_0$  – простір вектор-функцій  $\{s_1(x), s_2(x)\}$ , кожна з

компонент яких на кожному з інтервалів  $(0, \xi)$ ,  $(\xi + d, \ell)$  належить до простору Соболева  $W_2^1(\Omega)$  і набуває нульових значень на кінцях відрізка  $[0, \ell]$ , де для функцій  $h(x, t)$  та  $c(x, t)$  задано крайові умови першого роду. Нехай  $H$  – простір функцій  $\{v_1(x, t), v_2(x, t)\}$ , кожна з компонент яких є інтегрованою з квадратом разом з першими похідними  $\partial v_i / \partial t$ ,  $\partial v_i / \partial x$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\forall t \in (0, T]$ ,  $T > 0$ , на інтервалах  $(0, \xi)$ ,  $(\xi + d, \ell)$  і задовольняє крайові умови першого роду, як і функції  $h(x, t)$ ,  $c(x, t)$  відповідно.

Нехай  $\{s_1(x), s_2(x)\} \in H_0$ . Помноживши рівняння (7) і початкову умову (10) на  $s_1(x)$  та проінтегрувавши по відрізку  $[0, \ell]$  з урахуванням умови спряження (15), отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \beta(h) \frac{\partial h}{\partial t} s_1(x) dx + \int_0^\ell k(h, c) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{ds_1(x)}{dx} dx + \frac{[h][s_1]}{\int_0^d \frac{dx}{k^\gamma(h, c)}} = \\ & = \int_0^\ell k(h, c) \frac{ds_1(x)}{dx} dx + \frac{d[s_1]}{\int_0^d \frac{dx}{k^\gamma(h, c)}}, \quad t \in (0, T], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\int_0^\ell h(x, 0) s_1(x) dx = \int_0^\ell h_0(x) s_1(x) dx, \quad t \in (0, T]. \quad (18)$$

Аналогічно, з (11) та (14) маємо

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \theta(h) \frac{\partial c}{\partial t} s_2(x) dx + \int_0^\ell D(h, c) \frac{\partial c}{\partial x} \frac{ds_2(x)}{dx} dx + \\ & + \int_0^\ell u \frac{\partial c}{\partial x} s_2(x) dx + \frac{[c][s_2]}{\int_0^d \frac{dx}{D^\gamma(h, c)}} = 0, \quad t \in (0, T], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\int_0^\ell c(x, 0) s_2(x) dx = \int_0^\ell c_0(x) s_2(x) dx, \quad t \in (0, T]. \quad (20)$$

**Означення 1.** Функцію  $\{h(x, t), c(x, t)\} \in H$ , яка задовольняє інтегральні співвідношення (17)–(20)  $\forall t \in (0, T]$  та  $\forall \{s_1(x), s_2(x)\} \in H_0$ , назовемо *узгалньеним розв'язком* крайової задачі (7)–(16).

Розв'язок крайової задачі (7)–(16) шукатимемо у вигляді [8]

$$h(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \varphi_{i1}(x), \quad c(x, t) = \sum_{i=1}^N b_i(t) \varphi_{i2}(x), \quad (21)$$

де  $\{\varphi_{i1}(x), \varphi_{i2}(x)\}$  – розривні в точці  $x = \xi$  базисні вектор-функції скінченновимірного підпростору  $M_0 \subset H_0$ ,  $i = 2, \dots, N$  [8];  $N$  – наперед задана кількість таких функцій, пов'язана з кількістю скінченних елементів; функції  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{12}$  використовуються для апроксимації неоднорідних крайових умов першого роду (8) та (12).

Нехай сукупність вектор-функцій, компоненти яких можна подати у вигляді (21), породжує множину  $M \subset H$ .

**Означення 2.** *Наближеним узгалньеним розв'язком* крайової задачі (7)–(16) назовемо вектор-функцію  $\{h(x, t), c(x, t)\} \in M$ , яка  $\forall t \in (0, T]$  та  $\forall \{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\} \in M_0$  задовольняє інтегральні співвідношення

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell \beta(h) \frac{\partial h}{\partial t} \Phi_1(x) dx + \int_0^\ell k(h, c) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{d\Phi_1(x)}{dx} dx + \frac{[h][\Phi_1]}{\int_0^\ell \frac{dx}{k^\gamma(h, c)}} = \\
& = \int_0^\ell k(h, c) \frac{d\Phi_1(x)}{dx} dx + \frac{d[\Phi_1]}{\int_0^\ell \frac{dx}{k^\gamma(h, c)}}, \quad t \in (0, T], \\
& \int_0^\ell h(x, 0) \Phi_1(x) dx = \int_0^\ell h_0(x) \Phi_1(x) dx, \quad t \in (0, T], \\
& \int_0^\ell \theta(h) \frac{\partial c}{\partial t} \Phi_2(x) dx + \int_0^\ell D(h, c) \frac{\partial c}{\partial x} \frac{d\Phi_2(x)}{dx} dx + \\
& + \int_0^\ell u \frac{\partial c}{\partial x} \Phi_2(x) dx + \frac{[c][\Phi_2]}{\int_0^\ell \frac{dx}{D^\gamma(h, c)}} = 0, \quad t \in (0, T], \\
& \int_0^\ell c(x, 0) \Phi_2(x) dx = \int_0^\ell c_0(x) \Phi_2(x) dx, \quad t \in (0, T].
\end{aligned}$$

Зі слабкого формулювання (17)–(20) задачі (7)–(16), враховуючи (21), отримаємо задачу Коші

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}(t) &= \mathbf{F}_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \quad \tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}_1 \leq, \\
\mathbf{M}_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}(t) &= \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{M}}_2 \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}_2,
\end{aligned} \tag{22}$$

де  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  – вектор-стовпці невідомих коефіцієнтів;  $\mathbf{F}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_k$  – вектор-стовпці;  $\mathbf{M}_k$ ,  $\mathbf{L}_k$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_k$ ,  $k = 1, 2$ , – матриці:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \{a_i(t)\}_{i=1}^N, \quad \mathbf{B} = \{b_i(t)\}_{i=1}^N, \quad \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}(t)|_{t=0}, \quad \mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}(t)|_{t=0}, \\
\mathbf{M}_k &= \{m_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{L}_k = \{\ell_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^N, \quad \tilde{\mathbf{F}}_k = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^N, \\
\tilde{\mathbf{M}}_k &= \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{F}_1 = \{f_i^{(1)}\}_{i=1}^N, \quad k = 1, 2, \\
\tilde{m}_{ij}^{(1)} &= \int_0^\ell \varphi_{i1} \varphi_{j1} dx, \quad \tilde{f}_i^{(1)} = \int_0^\ell h_0 \varphi_{i1} dx, \quad m_{ij}^{(1)} = \int_0^\ell \beta(h) \varphi_{i1} \varphi_{j1} dx, \\
f_i^{(1)} &= \int_0^\ell k(h, c) \frac{d\varphi_{i1}(x)}{dx} dx + \frac{d[\varphi_{i1}]}{\int_0^\ell \frac{dx}{k^\gamma(h, c)}}, \quad \tilde{f}_i^{(2)} = \int_0^\ell c_0 \varphi_{i2} dx, \\
m_{ij}^{(2)} &= \int_0^\ell \theta(h) \varphi_{i2} \varphi_{j2} dx, \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \int_0^\ell \varphi_{i2} \varphi_{j2} dx, \\
\ell_{ij}^{(1)} &= \int_0^\ell k(h, c) \frac{d\varphi_{i1}}{dx} \frac{d\varphi_{j1}}{dx} dx + \frac{[\varphi_{i1}][\varphi_{j1}]}{\int_0^\ell \frac{dx}{k^\gamma(h, c)}},
\end{aligned}$$

$$I_{ij}^{(2)} = \int_0^{\ell} D(h, c) \frac{d\varphi_{j2}}{dx} \frac{d\varphi_{i2}}{dx} dx + \int_0^{\ell} u \frac{d\varphi_{j2}}{dx} \varphi_{i2} dx + \frac{[\varphi_{i2} \Pi \varphi_{j2}]}{d} \int_0^{\ell} \frac{dx}{D^{\gamma}(h, c)}.$$

Після дискретизації за часом з використанням цілком неявної лінеаризованої різницевої схеми [3] із системи (22), наприклад, отримаємо

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{A}^{(p)}, \mathbf{B}^{(p)}) \cdot \frac{\mathbf{A}^{(p+1)} - \mathbf{A}^{(p)}}{\tau} + \mathbf{L}_1(\mathbf{A}^{(p)}, \mathbf{B}^{(p)}) \cdot \mathbf{A}^{(p+1)} = \mathbf{F}_1(\mathbf{A}^{(p)}, \mathbf{B}^{(p)}),$$

де  $\tau$  – крок за часом,  $\mathbf{A}^{(p)} = \mathbf{A}(t_p)$ ,  $\mathbf{B}^{(p)} = \mathbf{B}(t_p)$ ,  $t_p = p\tau$ ,  $p = 1, 2, \dots$ .

**5. Результати числових експериментів.** Виконано числові експерименти, аналогічні до наведених у [22], та додаткові дослідження залежності коефіцієнта вологоперенесення від напорів і концентрації речовин [5, 9, 21]. Параметри ґрунтів для числових експериментів вибрано з безкоштовної програми Hydrus-1D [19]. Основним ґрунтом є суглинок ( $k_0 = 0.028$  м/добу,  $\theta_{\min} = 0.1$ ,  $\theta_{\max} = 0.38$ ,  $n = 1.23$ ,  $\alpha = 2.7$  л/доба<sup>-1</sup>), а ґрунтом тонкого включення є глина ( $k_0^{\gamma} = 0.0048$  м/добу,  $\theta_{\min} = 0.07$ ,  $\theta_{\max} = 0.36$ ,  $n = 1.09$ ,  $\alpha = 0.5$  доба<sup>-1</sup>).

Для модельної задачі розглянуто шар ґрунту товщини  $\ell = 3$  м. Глибина залягання включення  $\xi = 1.5$  м, а його товщина  $d = 0.3$  м. Крок дискретизації за змінною  $x$  становить 0.005 м, а за часом –  $\tau = 1$  доба. Початковий розподіл напорів  $h_0(x) = -10$  м. На верхній межі ґрунту для концентрації солей задано умову (12), де  $c_{\ell}(t) = 160$  кг/м<sup>3</sup>. У початковий момент часу поровою рідиною є чиста вода. На нижній межі ґрунту задано крайову умову симетрії для обох функцій. Коефіцієнт дифузії солей вибрано у вигляді [11]  $D = D_1 |u| + \theta D_2 \tau$ , де  $D_1$  – коефіцієнт гідродинамічної дисперсії,  $D_2$  – коефіцієнт молекулярної дифузії, а  $\tau = \theta^{7/3} / \theta_{\max}^2$  [19, 23]. За дифундуючу речовину вибрано NaCl з  $D_2 = 1.728 \times 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/добу [4]. Коефіцієнт гідродинамічної дисперсії дорівнює коефіцієнту молекулярної дифузії.

Таблиця 1. Значення вологості та її стрибків при наявності гравітаційної складової руху вологи.

Момент часу	I			II			III		
	$\theta^-$	$\theta^+$	$[\theta]$	$\theta^-$	$\theta^+$	$[\theta]$	$\theta^-$	$\theta^+$	$[\theta]$
$t = 180$ діб	0.38	0.38	0.00	0.38	0.27	0.114 (+92%)	0.38	0.32	0.06
$t = 360$ діб	0.38	0.38	0.00	0.38	0.30	0.082 (+119%)	0.38	0.34	0.04
$t = 720$ діб	0.38	0.38	0.00	0.38	0.32	0.06 (+94%)	0.38	0.35	0.03
$t = 1080$ діб	0.38	0.38	0.00	0.38	0.33	0.0527	0.38	0.38	0.00

Таблиця 2. Значення концентрації розчину солі та її стрибків при наявності гравітаційної складової руху вологи.

Момент часу	I			II			III		
	$c^-$	$c^+$	$[c]$	$c^-$	$c^+$	$[c]$	$c^-$	$c^+$	$[c]$
$t = 180$ діб	160.0	159.0	1.0	157.2	92.4	64.8	160.0	54.6	105.4
$t = 360$ діб	160.0	160.0	0.0	160.0	136.7	23.3	160.0	114.1	45.9
$t = 720$ діб	160.0	160.0	0.0	160.0	155.4	4.6	160.0	147.8	12.2
$t = 1080$ діб	160.0	160.0	0.0	160.0	158.8	1.2	160.0	160.0	0.0

У табл. 1 – табл. 4 випадок I відповідає результатам обчислень при  $k^{\gamma} = k^{\gamma}(h^+, c^+)$ , II – при  $k^{\gamma} = k^{\gamma}(h^-, c^-)$ , III – при  $k^{\gamma} = k^{\gamma}(h, c)$ . Випадки I та

II стосуються використання класичної умови спряження, а III – модифікованої. В дужках у табл. 1 та табл. 3 наведено відносне збільшення (+) або зменшення (-) у відсотках стрибка вологості при використанні класичної умови спряження та модифікованої умови спряження. В табл. 1 відносні зміни не опускаються нижче 92%, а в табл. 3 вони є в межах від -31% до 84%. Показано, що амплітуда різниць стрибків функцій залежить від товщини включення: при збільшенні товщини амплітуда зростає і навпаки.

Таблиця 3. Значення вологості та її стрибків при нехтуванні гравітаційною складовою руху вологи.

Момент часу	I			II			III		
	$\theta^-$	$\theta^+$	$[\theta]$	$\theta^-$	$\theta^+$	$[\theta]$	$\theta^-$	$\theta^+$	$[\theta]$
$t = 360$ діб	0.35	0.32	0.031 (-36%)	0.37	0.29	0.087 (+84%)	0.36	0.31	0.05
$t = 720$ діб	0.37	0.35	0.019 (-31%)	0.38	0.33	0.047 (+70%)	0.37	0.35	0.03
$t = 1080$ діб	0.37	0.36	0.011 (-39%)	0.38	0.34	0.033 (+84%)	0.37	0.36	0.02

Таблиця 4. Значення концентрації розчину солі та її стрибків при нехтуванні гравітаційною складовою руху вологи.

Момент часу	I			II			III		
	$c^-$	$c^+$	$[c]$	$c^-$	$c^+$	$[c]$	$c^-$	$c^+$	$[c]$
$t = 360$ діб	8.0	8.0	0.0	8.0	8.0	0.0	8.0	8.0	0.0
$t = 720$ діб	160.0	8.7	0.9	8.1	8.0	0.1	8.9	8.1	0.7
$t = 1080$ діб	41.9	28.9	13.0	13.4	10.9	2.5	30.8	13.8	17.0

Результати розв'язання модельних задач показують, що в певних випадках залежністю коефіцієнта вологоперенесення тонких слабопроникних включень від напорів і концентрації розчинів солей нехтувати не можна. Зважаючи на результати праці [21], де коефіцієнт фільтрації геосинтетичного включення зростає в 1.65 разів при зростанні концентрації КСІ від 0 до 50 мМ, такі випадки можуть стосуватись і розчинів малої концентрації. Тому для оцінки засобами математичного та комп'ютерного моделювання в реальних геологічних формаціях при будівництві сховищ відходів мають бути відомими всі параметри ґрунту в підобластях, а також у включеннях.

**Висновки.** У статті чисельно досліджено процес поширення речовин у ґрунті, який містить тонке включення, на випадок неповного насичення. Розривні наближені узагальнені розв'язки відповідної нелінійної крайової задачі знайдено методом скінченних елементів та виконано числові експерименти. Показано, що відносна зміна стрибків вологості при використанні модифікованих умов спряження може сягати понад 90%. Такі зміни пов'язані з нелінійними залежностями фільтраційних характеристик матеріалу тонких включень від самої вологості та концентрації розчину речовин у поровій рідині.

1. Біленко В. І., Божонюк К. В., Дзядик С. Ю., Стеля О. Б. Кусково-поліноміальні алгоритми аналізу процесів у неоднорідних середовищах // Кибернетика і системний аналіз. – 2018. – 54, № 4. – С. 135–141.  
Te same: *Bilenko V. I., Bozhonok K. V., Dzyadyk S. Yu., Stelya O. B.* Piecewise polynomial algorithms for the analysis of processes in inhomogeneous media // *Cybern. Syst. Anal.* – 2018. – 54, No. 4. – P. 636–642.  
– <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0064-6>.
2. Гачкевич О. Р., Кушнір Р. М. Вибрані проблеми механіки зв'язаних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 1. – С. 7–24.  
Te same: *Hachkevych O. R., Kushnir R. M.* Selected problems of the mechanics of coupled fields // *J. Math. Sci.* – 2018. – 229, No. 2. – P. 115–132.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3666-7>.



3. Герус В. А., Иванчук Н. В., Мартынюк П. Н. Системный подход к математическому и компьютерному моделированию геомиграционных процессов с использованием пакета FreeFem++ и распараллеливания вычислений // Кибернетика и системный анализ. – 2018. – **54**, № 2. – С. 123–133.  
Te same: Herus V. A., Ivanchuk N. V., Martyniuk P. M. A system approach to mathematical and computer modeling of geomigration processes using Freefem++ and parallelization of computations // Cybern. Syst. Anal. – 2018. – **54**, No. 2. – P. 284–294. – <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0030-3>.
4. Зайцев И. Д., Асеев Г. Г. Физико-химические свойства бинарных и многокомпонентных растворов неорганических веществ: справ. изд. – Москва: Химия, 1988. – 416 с.
5. Кузло М. Т., Жукowska Н. А., Бойко М. В., Петрович В. В. Експериментальні дослідження фільтрації сольових розчинів у залежності від їх концентрації і температури // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 2020. – Вип. 107. – С. 57–62.
6. Ляшко С. И., Номировский Д. А. Обобщенная разрешимость и оптимизация параболических систем в областях с тонкими слабопроницаемыми включениями // Кибернетика и систем. анализ. – 2003. – **39**, № 5. – С. 131–142.  
Te same: Lyashko S. I., Nomirovskii D. A. The generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin low-permeable inclusions // Cybern. Syst. Anal. – 2003. – **39**, No. 5. – P. 737–745. – <https://doi.org/10.1023/B:CASA.0000012094.62199.de>.
7. Номировский Д. А., Востриков А. И. Обобщенные постановки и свойства моделей процессов переноса в областях с разрезами // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – **52**, № 6. – С. 114–126.  
Te same: Nomirovskii D. A., Vostrikov O. I. Generalized statements and properties of models of transport processes in domains with cuts // Cybern. Syst. Anal. – 2016. – **52**, No. 6. – P. 931–942. – <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9895-1>.
8. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
9. Фиалко А. И., Руденко Ф. А. Исследование влияния степени минерализации водных растворов на фильтрационные свойства горных пород // Материалы по геологии, гидрогеологии и геохимии Украины, РСФСР и Молдавии. – 1978. – Вып. 14. – С. 63–68.
10. Чернуха О. Ю., Билущак Ю. I. Математичне моделювання усередненого поля концентрації у випадкових шаруватих структурах з урахуванням стрибків шуканої функції на міжфазних границях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 1. – С. 62–74.  
Te same: Chernukha O. Yu., Bilushchak Yu. I. Mathematical modeling of the mean concentration field in random stratified structures with regard for the jumps of sought function on the interfaces // J. Math. Sci. – 2019. – **240**, No. 1. – P. 70–85. – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04336-4>.
11. Bear J. Dynamics of fluid in porous media. – New York: Elsevier, 1972. – 764 p.
12. Chen J. N., Benson C. H., Edil T. B. Hydraulic conductivity of geosynthetic clay liners with sodium bentonite to coal combustion product leachates // J. Geotech. Geoenviron. Eng. – 2018. – **144**, No. 3. – 04018008 – 12 p. – [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0001844](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0001844).
13. Chui Y. V., Moshynskiy V. S., Martyniuk P. M., Stepanchenko O. M. On conjugation conditions in the filtration problems upon existence of semipermeable inclusions // JP J. Heat Mass Transfer. – 2018. – **15**, No. 3. – P. 609–619. – <https://doi.org/10.17654/HM015030609>.
14. Di Emidio G., Verastegui-Flores R. D., Mazzieri F., Dominijanni A. Modified clays for barriers: a review // Innov. Infrastruct. Solut. – 2017. – **2**, No. 1. – Article 47. – <https://doi.org/10.1007/s41062-017-0073-8>.
15. Fehervari A., Gates W. P., Patti A. F., Turney T. W., Bouazza A., Rowe R. K. Potential hydraulic barrier performance of cyclic organic carbonate modified bentonite complexes against hyper-salinity // Geotextiles and Geomembranes. – 2016. – **44**, No. 5. – P. 748–760. – <https://doi.org/10.1016/j.geotexmem.2016.06.002>.
16. Fityus S. G., Smith D. W., Booker J. R. Contaminant transport through an unsaturated soil liner beneath a landfill // Can. Geotech. J. – 1999. – **36**. – P. 330–354. – <https://doi.org/10.1139/t98-112>.

17. *van Genuchten M. Th.* A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // *Soil Sci. Soc. Am. J.* – 1980. – **44**, No. 5. – P. 892–898. – <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x>.
18. *Hu Q., Wang J. S. Y.* Aqueous-phase diffusion in unsaturated geologic media: A review // *Crit. Rev. Environ. Sci. Technol.* – 2003. – **33**, No. 3. – P. 275–297. – <https://doi.org/10.1080/10643380390814488>.
19. *Jacques D., Šimůnek J., Mallants D., van Genuchten M. Th.* The HPx software for multicomponent reactive transport during variably-saturated flow: Recent developments and applications // *J. Hydrol. Hydromech.* – 2018. – **66**, No. 2. – P. 211–226. – <https://doi.org/10.1515/johh-2017-0049>.
20. *Kong D.-J., Wu H.-N., Chai J.-C., Arulrajah A.* State-of-the-art review of geosynthetic clay liners // *Sustainability.* – 2017. – **9**, No. 11. – P. 1–18. – <https://doi.org/10.3390/su9112110>.
21. *Malusis M. A., Shackelford C. D.* Chemico-osmotic efficiency of a geosynthetic clay liner // *J. Geotech. Geoenviron. Eng.* – 2002. – **128**, No. 2. – P. 97–106. – [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2002\)128:2\(97\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2002)128:2(97)).
22. *Martyniuk P. M., Michuta O. R., Ulianchuk-Martyniuk O. V., Kuzlo M. T.* Numerical investigation of pressure head jump values on a thin inclusion in one-dimensional non-linear soil moisture transport problem // *Int. J. Appl. Math.* – 2018. – **31**, No. 4. – P. 649–660. – <https://doi.org/10.12732/ijam.v31i4.10>.
23. *Millington R. J., Quirk J. P.* Permeability of porous solids // *Trans. Faraday Soc.* – 1961. – **57**. – P. 1200–1207. – <https://doi.org/10.1039/TF9615701200>.
24. *Nomirovskii D. A.* Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution // *J. Differ. Equat.* – 2007. – **233**, No. 1. – P. 1–21. – <https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.09.025>.
25. *Nomirovskii D. A.* Generalized solvability of parabolic systems with nonhomogeneous transmission conditions of nonideal contact type // *Differ. Equat.* – 2004. – **40**, No. 10. – P. 1467–1477. – <https://doi.org/10.1007/s10625-004-0013-1>.
26. *Perel'man A. I.* Geochemical barriers: theory and practical applications // *Appl. Geochem.* – 1986. – **1**, No. 6. – P. 669–680. – [https://doi.org/10.1016/0883-2927\(86\)90088-0](https://doi.org/10.1016/0883-2927(86)90088-0).
27. *Scalia J., Bareither C. A., Shackelford C. D.* Advancing the use of geosynthetic clay liners as barriers // *Geotech. Eng. J. SEAGS & AGSSEA.* – 2018. – **49**, No. 4. – P. 100–114.
28. *Thyagaraj T., Soujanya D.* Polypropylene fiber reinforced bentonite for waste containment barriers // *Appl. Clay Sci.* – 2017. – **142**, No. 15. – P. 153–162. – <https://doi.org/10.1016/j.clay.2017.02.009>.
29. *Zhao Q., Choo H., Bhatt A., Burns S. E., Bate B.* Review of the fundamental geochemical and physical behaviors of organoclays in barrier applications // *Appl. Clay Sci.* – 2017. – **142**, No. 15. – P. 2–20. – <https://doi.org/10.1016/j.clay.2016.11.024>.

#### MODELING THE EFFECT OF SOLUTION STRENGTH ON THE MOISTURE JUMPS IN A THIN GEOCHEMICAL BARRIER

*The moisture propagation process is considered in a soil deposit with thin inhomogeneous inclusions, which can be regarded as a partial case of geochemical barrier. The dependences of the moisture transfer parameters of the thin inclusion on the humidity and the solution strength are taken into consideration by the modified interface conditions. A corresponding nonlinear mathematical model is presented. On its basis, the boundary value problem is formulated for a system of parabolic equations in the class of discontinuous solutions. An approximate solution to the problem is constructed by using the finite element method. Basing on the numerical evidence, the difference in the jumps of moisture on thin geochemical barriers is shown when using the classical and modified interface conditions.*

**Key words:** *solution strength, moisture jump, geochemical barrier, interface condition.*

Нац. ун-т водн. госп-ва  
та природокористування, Рівне

Одержано  
02.06.19