УДК 512.552.13

О. М. Романів[✉] , А. В. Саган

ω-ЕВКЛІДОВІ ОБЛАСТІ І КІЛЬЦЯ КОСИХ ФОРМАЛЬНИХ РЯДІВ ЛОРАНА

Доведено, що якщо R є правою ω-евклідовою областю, тоді кільце косих формальних степеневих рядів Лорана є правою ω-евклідовою областю. Показано, що якщо R є правою ω-евклідовою область з мультиплікативною нормою, тоді кільце косих формальних степеневих рядів Лорана є правою областю головних ідеалів. Доведено, що якщо R є некомутативною ω-евклідовою областю з мультиплікативною нормою, тоді кільце косих формальних степеневих рядів Лорана є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Ключові слова: *ω-евклідові області, кільця косих формальних рядів Лорана, область головних ідеалів, кільця з елементарною редукцією матриць.*

У цій статті під R розуміємо асоціативне кільце без дільників нуля з відмінною від нуля одиницею 1_R; $U(R)$ – групу оборотних елементів кільця R; σ – автоморфізм R.

Нехай $\varphi : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ – відображення таке, що $\varphi(0) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $a = 0$; $\varphi(a) > 0$ для довільного $a \neq 0$, $a \in R$, і $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$ для будь-яких $a, b \in R$. Це відображення називатимемо *нормою* області R.

Область R називається *правою евклідовою областю*, якщо для довільних $a, b \in R$, $b \neq 0$, існують такі $q, r \in R$, що $a = bq + r$ і $\varphi(r) < \varphi(b)$.

Під *правим k-членним ланцюгом подільності* [1] для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, розумітимемо послідовність рівностей

$$a = bq_1 + r_1, \qquad b = r_1 q_2 + r_2, \qquad \ldots, \qquad r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k,$$

де $k \in \mathbb{N}$.

Область R називають *правою ω-евклідовою* [1] відносно норми φ, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує такий правий k-членний ланцюг подільності для деякого k, що $\varphi(r_k) < \varphi(b)$.

Очевидно, що права евклідова область є правою ω-евклідовою.

Кільце R називають *кільцем з елементарною редукцією матриць* [1], якщо для довільної матриці A над кільцем R існують елементарні над R матриці $P_1, \ldots, P_t, Q_1, \ldots, Q_s$, $t, s \in \mathbb{N}$, відповідних розмірів такі, що

$$P_1 \ldots P_t A Q_1 \ldots Q_s = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0),$$

де $r \in \mathbb{N}$, $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq R\varepsilon_i \cap \varepsilon_i R$ для усіх $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Нехай $R_x = R[[x, x^{-1}; \sigma]]$ – *кільце формальних степеневих рядів Лорана*, кожен елемент якого зображується вигляді

$$\sum_{i=h}^{\infty} a_i x^i,$$

де $h \in \mathbb{Z}$, $a_i \in R$ і $x^i \cdot a = \sigma^i(a) \cdot x^i$.

P. Samuel у [9] показав, що кільце формальних рядів Лорана над евклідовою областю є евклідовою областю. K. Amano і T. Kuzumaki у [3] довели, що праве кільце косих формальних рядів Лорана над правою евклідовою областю є правою евклідовою областю. О. Романів і А. Саган у [8] показали, що кільце формальних рядів Лорана над комутативною ω-евклідовою об-

[✉]oleh.romaniv@lnu.edu.ua

ластю є ω-евклідовою областю. З деякими з останніх досліджень кілець формальних степеневих рядів можна ознайомитися у [6, 7, 10].

У цій роботі узагальнюються результати [9] і [5] для кілець косих формальних рядів Лорана. Крім цього, досліджується елементарна редукція матриць над кільцями косих формальних рядів Лорана.

Зауважимо, що якщо $\sigma = 1_R$, то кільце косих формальних рядів Лорана є кільцем формальних рядів Лорана.

Нехай R − область із нормою $\varphi : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для кожного елемента

$$f = \sum_{i \ge h} a_i x^i \in R_x, \qquad a_i \in R, \qquad a_h \neq 0,$$

означимо $\psi(f) = a_h$ і $\psi(0) = 0$. Отже, ψ є відображенням R_x в R.

Для довільних елементів $a, b \in R$ запис $b \mid a$ означає, що $a \equiv 0 \pmod{b}$, в іншому випадку записуємо $b \nmid a$.

Твердження 1. *Для довільних елементів* $f, g \in R_x$, $g \neq 0$, *справджуються такі рівності*: $f = gu$ *або* $f = gu + v$, *де* $\psi(g) \nmid \psi(v)$.

Д о в е д е н н я. Нехай h − найнижчий степінь многочлена f, а k − найнижчий степінь многочлена g. Запишемо $\psi(f) = \psi(g)q + r$, де $q, r \in R$.

Оскільки σ − автоморфізм на кільці R, то існує деякий елемент $c \in R$, що $\sigma^k(c) = q$. У цьому випадку покладемо $v = f - gcx^{h-k}$. Тоді

$$v = (\psi(f) - \psi(g)q)x^h + \quad \text{степені вищих порядків} \quad =$$

$$= rx^h + \quad \text{степені вищих порядків},$$

де $r \in R$.

Якщо $\psi(g) \nmid r$, тоді отримаємо необхідний результат $\psi(g) \nmid r = \psi(v)$ і зупиняємо процес.

Якщо $\psi(g) \mid r$, тоді покладемо $\psi(v) = \psi(g)q_1$ і $\sigma^k(c_1) = q_1$ для деякого $c_1 \in R$. Запишемо

$$v_1 = v - gc_1 x^{\ell_1 - k},$$

де ℓ_1 є найвищим степенем v.

Тоді знову розглядаємо два випадки: $\psi(g) \nmid \psi(v_1)$ або $\psi(g) \mid \psi(v_1)$. Якщо цей процес скінченний, то отримаємо

$$f = g\left(cx^{h-k} + c_1 x^{\ell_1 - k} + \ldots + c_n x^{\ell_n - k}\right) + v_n,$$

де $\psi(g) \nmid \psi(v_n)$.

Якщо ж процес не закінчується за скінченне число кроків, тоді маємо $f = gu$, де

$$u = x^{h-k} + c_1 x^{\ell_1 - k} + \ldots + c_n x^{\ell_n - k} + \ldots.$$

Твердження доведено. ♦

Означимо відображення $\varphi_x : R_x \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ за правилом $\varphi_x(f) = \varphi(\psi(f))$. Тоді отримаємо такі результати.

Теорема 1. *Нехай* R − *права* ω-*евклідова область відносно норми* φ, *тоді* R_X *є правою* ω-*евклідовою областю відносно норми* φ_x.

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільні два елементи $f, g \in R_x$, де $g \neq 0$,

$f = \psi(f)x^h$ + степені вищих порядків,

$g = \psi(g)x^k$ + степені вищих порядків.

Тоді, за твердженням 1, маємо $f = gu$ або $f = gu + v$, де $\psi(g) \nmid \psi(v)$.

Очевидно, що, коли $f = gu$, то R_x є правою евклідовою областю і, отже, R_X є правою ω-евклідовою областю.

Якщо ж $f = gu + v$, де $\psi(g) \nmid \psi(v)$, то можливі два випадки.

i) $\varphi_x(v) < \varphi_x(g)$. За означенням, R_x є правою евклідовою областю і, отже, R_x є правою ω-евклідовою областю.

ii) $\varphi_x(v) \geq \varphi_x(g)$. Тоді існує правий k-членний ланцюг подільності

$$\psi(v) = \psi(g)q_1 + r_1, \quad \psi(g) = r_1q_2 + r_2, \quad \ldots, \quad r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k,$$

де $\varphi(r_k) < \varphi(\psi(g))$ (оскільки R є правою ω-евклідовою областю).

Тоді існує деякий елемент $c_1 \in R$, такий що $\sigma^k(c_1) = q_1$, де $q_1 \in R$. Запишемо

$$v - gc_1x^{\ell_1 - k} = v_1,$$

де ℓ_1 – порядок v. Отже, маємо $f = g(u - c_1x^{\ell_1 - k}) + v_1$ і $\psi(v_1) = r_1$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо, що існує деякий елемент $c_2 \in R$ такий, що $\sigma^{\ell_2}(c_2) = q_2$, де $q_2 \in R$. Запишемо

$$g - v_1c_2x^{k-\ell_2} = v_2,$$

де ℓ_2 – порядок v_1. Отже, маємо $g = v_1c_2x^{k-\ell_2} + v_2$ і $\psi(v_2) = r_2$.

Цей процес триватиме до деякого $k \in \mathbb{N}$, для якого існує елемент $c_k \in R$ такий, що $\sigma^{\ell_k}(c_k) = q_k$, де $q_k \in R$. Запишемо

$$v_{k-2} - v_{k-1}c_kx^{\ell_{k-1} - \ell_k} = v_k,$$

де ℓ_k – порядок v_{k-1}. Звідси $v_{k-2} = v_{k-1}c_kx^{\ell_{k-1} - \ell_k} + v_k$ і $\psi(v_k) = r_k$.

Підсумовуючи, отримаємо правий k-членний ланцюг подільності

$$f = g(u - q_1x^{\ell_1 - k}) + v_1, \qquad g = v_1c_2x^{k-\ell_2} + v_2,$$
$$\ldots, \qquad v_{k-2} = v_{k-1}c_kx^{\ell_{k-1} - \ell_k} + v_k.$$

Якщо $r_k \neq 0$, тоді

$$\varphi_x(g) = \varphi(\psi(g)) > \varphi(r_k) = \varphi_x(v_k),$$

і отже, R_x є правою ω-евклідовою областю.

Якщо $r_k = 0$, тоді

$$\varphi_x(g) = \varphi(\psi(g)) > \varphi(r_k) = \varphi_x(v_k) = 0.$$

Зауважимо, що, згідно з властивостями норми, маємо $v_k = 0$ і тому отриманий вище ланцюг є скінченним, а отже, за твердженням 1 з [5], R_x є правою ω-евклідовою областю. Теорему доведено. ♦

Очевидно, що у випадку лівої ω-евклідової області справджується лівостороння інтерпретація твердження 1.

Теорема 2. *Нехай R – ліва область головних ідеалів і права ω-евклідова область. Тоді*

1°) R *є кільцем з елементарною редукцією матриць*;

2°) R_x *є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Д о в е д е н н я. Твердження ***1°*** випливає безпосередньо з твердження 4 з [5] і теореми 3.6 з [4].

Доведемо ***2°***. За теоремою 6.3 з [2] і теоремою 1, маємо, що R_x є лівою областю головних ідеалів і правою ω-евклідовою областю. Тоді, згідно з твердженням пункту ***1°*** теореми, отримуємо, що R_x є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Теорему доведено. ♦

Норма φ над R називається мультиплікативною, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ виконується

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

У випадку мультиплікативної норми маємо $\varphi(u) = 1$ для довільного елемента $u \in U(R)$.

Теорема 3. *Нехай R – права ω-евклідова область з мультиплікативною нормою φ. Тоді*

1°) R *є правою областю головних ідеалів*;

2°) R_x *є правою областю головних ідеалів.*

Д о в е д е н н я. ***1°***. Нехай I – правий ідеал області R. Випадок $I = \{0\}$ є тривіальним. Тому нехай I містить хоча б один ненульовий елемент. Серед усіх ненульових елементів I виберемо елемент з найменшою нормою, нехай це $b \in I$. Тепер розглянемо довільний ненульовий елемент $a \in I$, відмінний від $b \in I$ (випадок, коли $a = b$, очевидний). Оскільки R є правою ω-евклідовою областю, то для елементів a і b існує правий k-членний ланцюг подільності

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \ldots, \quad r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k,$$

де $\varphi(r_k) < \varphi(b)$. Зрозуміло, що $r_1, r_2, \ldots, r_k \in I$.

Оскільки елемент b має найменшу норму, то нерівність $\varphi(r_k) < \varphi(b)$ виконується при умові, що $r_k = 0$. Отже, елементи a і b мають найбільший спільний дільник r_{k-1}, тому $a = r_{k-1} a_0$ і $b = r_{k-1} b_0$.

Однак, оскільки норма φ є мультиплікативною, то можна записати $\varphi(b) = \varphi(r_{k-1}) \cdot \varphi(b_0)$. З того, що елемент b має найменшу норму, випливає $\varphi(r_{k-1}) = 1$ або $\varphi(b_0) = 1$. Випадок, коли $\varphi(r_{k-1}) = 1$, є тривіальним. Тому нехай $\varphi(b_0) = 1$, отже, $b_0 \in U(R)$. Тоді $r_{k-1} = bb_0^{-1}$, звідки $a = bb_0^{-1} a_0$. Тому $I \subset aR$. З іншого боку, оскільки $b \in I$, то маємо $I \supset aR$. Отже, $I = aR$, що означає, що R є правою областю головних ідеалів.

Для доведення пункту ***2°*** скористаємося теоремою 1 і доведенням твердження пункту ***1°*** теореми. Для цього покажемо, що з мультиплікативності норми φ випливає мультиплікативність норми φ_x. Маємо $\psi(fg) = \psi(f)\sigma^h(\psi(g))$, де h – степінь f. Тоді

$$\varphi_x(fg) = \varphi(\psi(fg)) = \varphi(\psi(f)\sigma^h(\psi(g))) = \varphi(\psi(f))\varphi(\sigma^h(\psi(g))) =$$

$$= \varphi(\psi(f))\varphi(\psi(g)) = \varphi_x(f) \cdot \varphi_x(g).$$

Отже, φ_x є мультиплікативною нормою. Зауважимо, що $\varphi(a) = \varphi(\sigma(a))$.

Теорему доведено. ♦

Теорема 4. *Нехай* R *− некомутативна* ω*-евклідова область з мультиплікативною нормою* φ. *Тоді*

1°) R *є кільцем з елементарною редукцією матриць;*

2°) R_x *є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Д о в е д е н н я. За теоремою 3, R і R_x є правими областями головних ідеалів, тому з теореми 2 отримуємо твердження теореми.

Теорему доведено. ♦

1. *Забавський Б. В., Романів О. М.* Некомутативні кільця з елементарною редукцією матриць // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. − 1998. − Вип. 49. − P. 16−20.
2. *Туганбаев Д. А.* Лорановские кольца // Фундам. и прикл. математика. − 2006. − **12**, № 3. − С. 151−224.
   Те саме: *Tuganbaev D. A.* Laurent rings // J. Math. Sci. − 2008. −**149**, No. 3. − P. 1286−1337. − https://doi.org/10.1007/s10958-008-0066-4.
3. *Amano K., Kuzumaki T.* On Euclidean algorithm and skew Laurent power series rings // Bull. Fac. Gen. Ed. Gifu Univ. − 1995. − **38.** − P. 233−237.
4. *Cohn P. M.* Right principal Bezout domains // J. London Math. Soc. − 1987. − **s2-35**, No. 2. − P. 251−262. − https://doi.org/10.1112/jlms/s2-35.2.251.432_an,Ser.
5. *Cooke G. E.* A weakening of the euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory. I // Journal für die Reine und angewandte Math. − 1976. − **282.** − P. 133−156. − https://doi.org/10.1515/crll.1976.282.133.
6. *Mazurek R., Paykan K.* Simplicity of skew generalized power series rings // New York J. Math. − 2017. − **23**. − P. 1273−1293.
7. *Paykan K., Moussavi A.* Some results on skew generalized power series rings // Taiwanese J. Math. − 2017. − **21**, No. 1. − P. 11−26.
   − https://doi.org/10.11650/tjm.21.2017.7327.
8. *Romaniv O. M., Sagan A. V.* ω-Euclidean domain and Laurent series // Карпат. мат. публікації. − 2016. − **8**, No. 1. − P. 158−162.
   − https://doi.org/10.15330/cmp.8.1.158-162.
9. *Samuel P.* About Euclidean rings // J. Algebra. − 1971. − **19**, No. 2. − P. 282−301.
   − https://doi.org/10.1016/0021-8693(71)90110-4.
10. *Tuganbaev A. A.* Right serial skew Laurent series rings // J. Algebra Appl. − 2021. − **20**, No. 03. − Art. 2150035. − https://doi.org/10.1142/S0219498821500353.

ω-EUCLIDEAN DOMAIN AND SKEW LAURENT SERIES RINGS

It is proved, that if R *is a right* ω*-Euclidean domain, then skew Laurent formal series ring is a right* ω*-Euclidean domain. It is shown, that if* R *is a right* ω*-Euclidean domain with multiplicative norm, then skew Laurent formal series ring is a right principal ideal domain. It is also proven, that if* R *is a noncommutative* ω*-Euclidean domain with a multiplicative norm, then skew Laurent formal series ring is a ring with elementary reduction of matrices.*

***Key words*:** ω*-Euclidean domain, skew Laurent formal series ring, principal ideal domain, ring with elementary reduction of matrices.*

Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів

Одержано
26.02.21