

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН БІЛЯ ТРІЩИН, ЩО ВІДХОДЯТЬ
ВІД КРАЇВ ТОНКОГО ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ, СПРИЧИНЕНИЙ
ДІЄЮ ХВИЛЬ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ**

Досліджується концентрація напружень навколо тріщин, що під довільним кутом відходять від країв тонкого жорсткого включення, при дії гармонічних хвиль поздовжнього зсуву. Вихідна задача зводиться до системи двох сингулярних інтегрально-диференціальних і одного інтегрального рівняння, ядра яких містять нерухомі особливості. Ці рівняння розв'язуються числовим методом, у якому враховується асимптотика невідомих функцій і використовуються спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

Ключові слова: коефіцієнт інтенсивності напружень, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння, гармонічні коливання, нерухома особливість, включення, тріщина.

Вступ. Сучасні технології машинобудування і будівництва передбачають широке використання композитних матеріалів. Армівні елементи таких матеріалів мають велику жорсткість і можуть розглядатися як тонкі абсолютно жорсткі включення. З одного боку, такі армівні елементи підвищують загальну міцність матеріалу, а з іншого – тонкі жорсткі включення викликають значну концентрацію напружень в оточуючому середовищі [11], яка може призвести до утворення тріщин. Оскільки найбільша інтенсивність концентрації напружень [11] спостерігається навколо країв включень, що призводить до утворення тріщин, які відходять від них під деяким кутом. Зазначимо, що динамічне, зокрема хвильове, навантаження може значно посилювати концентрацію напружень навколо подібних дефектів. Однак задачі про визначення напружень в околах тонких включень, від країв яких відходять тріщини, в умовах динамічного навантаження практично не розглядалися.

Що стосується подібних задач у статичній постановці, то в роботах [1, 3–5] визначено коефіцієнти концентрації напружень (КІН) для тріщин на продовженні включення, які розміщуються на одній лінії з включенням. Незначну кількість робіт у цьому напрямку можна пояснити тим, що при застосуванні методу інтегральних рівнянь вихідні задачі зводяться до сингулярних рівнянь із нерухомими особливостями. Такі рівняння потребують створення спеціальних числових методів для їхнього розв'язання. Числове розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь із нерухомими особливостями, пов'язані з динамічними задачами для пружних тіл із тріщинами, запропоновано у статтях [12–15]. Однак у цих працях не досліджено поведінку розв'язків в околах особливих точок, а для обчислення сингулярних інтегралів використано звичайні квадратурні формули. Це зумовлює достатньо повільну збіжність використаних методів розв'язання. У роботі [8] розв'язано задачу про визначення напруженого стану навколо тріщини та включення, що виходять із однієї точки, а у [9] – в околі включення, від країв якого під довільним кутом відходять дві тріщини. Включення вважається зчепленим із зовнішнім пружним середовищем і перебуває під дією зсувної сили, яка гармонічно змінюється в часі. У цих статтях для розв'язання отриманих систем сингулярних інтегро-диференціальних та інтегральних рівнянь запропоновано числовий метод, у якому враховується асимптотика розв'язків в околах особливих точок, а для обчислення сингулярних інтегралів використовуються спеціальні квадратурні формули. Встановлено швидку практичну збіжність такого методу.

✉ as.mishandr@gmail.com

У цій статті згаданий вище метод застосуємо для розв'язання іншої задачі про визначення поля напружень при дії хвилі поздовжнього зсуву на включення, від країв якого відходять дві тріщини.

1. Постановка задачі. Розглянемо пружне ізотропне тіло з густиною ρ і модулем зсуву G , яке перебуває в умовах антиплоскої деформації. У площині Oxy на осі Ox міститься наскрізний дефект у вигляді тонкого абсолютно жорсткого смугового включення, $x \in [-d, d]$, від країв якого виходять тріщини, що займають відрізки $x_\ell \in [-d_\ell, d_\ell]$, $\ell = 1, 2$, і утворюють з віссю Ox кути α_ℓ , $\ell = 1, 2$ (див. рис. 1).

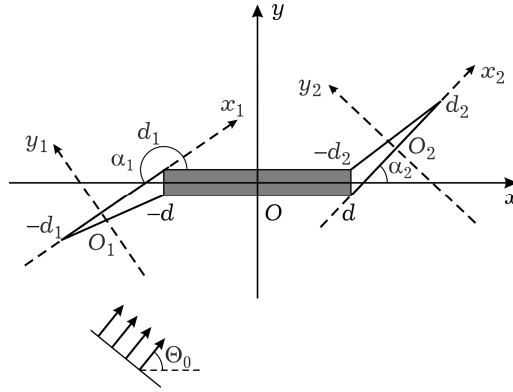


Рис. 1

З дефектом взаємодіє плоска гармонічна хвиля поздовжнього зсуву, яка викликає переміщення

$$w_0(x, y) = A e^{i\alpha_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}, \quad \alpha_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad (1)$$

де ω – частота коливань, тіла. Множник $e^{-i\omega t}$, яким визначається залежність від часу, тут і надалі опускаємо. За таких умов єдина відмінна від нуля z -компонента вектора переміщень задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta w + \alpha_2^2 w = 0, \quad (2)$$

де Δ – оператор Лапласа в системі координат Oxy .

Для формулювання крайових умов на дефекті пов'яжемо з кожною тріщиною локальну систему координат $O_\ell x_\ell y_\ell$, $\ell = 1, 2$, центр якої збігається з серединою відповідної тріщини (рис. 1). Зв'язок між системами координат задається формулами:

$$\begin{aligned} x_\ell &= (x - (-1)^\ell d) \cos \beta_\ell + y \sin \beta_\ell - (-1)^\ell d_\ell, \\ y_\ell &= (x - (-1)^\ell d) \sin \beta_\ell + y \cos \beta_\ell, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= (x_\ell + (-1)^\ell d_\ell) \cos \beta_\ell - y_\ell \sin \beta_\ell + (-1)^\ell d, \\ y &= (x_\ell + (-1)^\ell d_\ell) \sin \beta_\ell + y_\ell \cos \beta_\ell, \end{aligned}$$

де β_ℓ , $\ell = 1, 2$, – кути між осями Ox і $O_\ell x_\ell$.

Нехай $w_\ell(x_\ell, y_\ell)$, $\ell = 1, 2$, – переміщення в системі координат, пов'язаній з ℓ -тріщиною. Тоді за відсутності на берегах тріщин навантаження повинні виконуватися такі рівності:

$$\tau_{y_\ell z}(x_\ell, 0) = 0, \quad x_\ell \in [-d_\ell, d_\ell], \quad \ell = 1, 2. \quad (3)$$

На поверхнях тріщин переміщення $w_\ell(x_\ell, y_\ell)$, $\ell = 1, 2$, мають розриви з

невідомими стрибками, для яких вводимо позначення χ_ℓ :

$$w_\ell(x_\ell, +0) - w_\ell(x_\ell, -0) = \chi_\ell(x_\ell), \quad x_\ell \in [-d_\ell, d_\ell], \quad \ell = 1, 2. \quad (4)$$

Граничні умови на включенні сформулюємо з умов ідеального зчеплення:

$$w(x, 0) = a, \quad x \in [-d, d], \quad (5)$$

де a – невідома амплітуда поздовжніх (вздовж осі Oz) коливань включення, яку визначаємо з рівняння

$$-m\omega^2 a = \int_{-d}^d \chi(\eta) d\eta,$$

де $m = 2d\rho_v h$.

На поверхні включення напруження $\tau_{yz}(x, y)$ мають розрив із невідомим стрибком, для якого вводимо позначення χ :

$$\tau_{yz}(x, +0) - \tau_{yz}(x, -0) = \chi(x), \quad x \in [-d, d]. \quad (6)$$

2. Розв’язання задачі. Для розв’язання сформульованої задачі, як і в [9], використовуємо розривні розв’язки рівняння (2) зі стрибками (4), (6), побудовані у системах координат, пов’язаних із дефектами:

$$w^d(x, y) = \int_{-d}^d \frac{\chi(\eta)}{G} r_2(\eta - x, y) d\eta,$$

$$w_\ell^d(x_\ell, y_\ell) = \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_\ell(\eta) \frac{\partial}{\partial y_\ell} r_2(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta, \quad (7)$$

де $r_2(\eta - x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(x_2 \sqrt{(\eta - x)^2 + y^2}\right)$, $H_0^{(1)}$ – функція Ганкеля.

Переміщення подаємо у вигляді суперпозиції:

$$w(x, y) = w^d(x, y) + w_1^g(x, y) + w_2^g(x, y) + w_0(x, y), \quad (8)$$

де $w_\ell^g(x, y)$, $\ell = 1, 2$, знаходимо за формулами (7₂) після переходу в них до координат Oxy , а $w_0(x, y)$ – за формулою (1). Щоб остаточно визначити переміщення хвильового поля, необхідно відшукати невідомі стрибки (4), (6). Для цього використаємо умови (3) і (5). При цьому рівність (5) замінимо двома еквівалентними рівностями:

$$\frac{\partial w^d(x, 0)}{\partial x} = -\frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial x}, \quad w^d(d, 0) = a - w_0(d, 0). \quad (9)$$

Після підстановки (8) у граничні умови (3) і (9) отримуємо систему двох інтегро-диференціальних і одного інтегрального рівнянь відносно невідомих стрибків. Векторно-матричний запис цієї системи після відокремлення сингулярних складових ядер і переходу до проміжку $[-1, 1]$ має вигляд

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{\mathbf{Q}(\tau, \zeta)}{\tau - \zeta} + \mathbf{G}(\tau, \zeta) + \mathbf{R}(\tau, \zeta) \right) \mathbf{F}(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (x_0^2 \mathbf{D} \ln |\tau - \zeta| + \mathbf{R}_0(\tau, \zeta)) \mathbf{\Phi}(\tau) d\tau = \mathbf{Z}(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_0(\tau) [\gamma \ln |1 + \tau| + \mathbf{R}_1(\tau)] d\tau -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \mathbf{R}_2(\tau) d\tau = -A_0 e^{-ix_0 \gamma \cos \theta_0}. \quad (10)$$

У (10) позначено

$$\mathbf{F}(\tau) = (\varphi_0(\tau), \varphi_1'(\tau), \varphi_2'(\tau))^T = (f_0(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau))^T,$$

$$\Phi(\tau) = (0, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))^T;$$

$\mathbf{G}(\tau, \zeta) = \{g_{\ell j}(\tau, \zeta)\}_{\ell, j=0,1,2}$ – матриця, ненульові елементи якої є такими:

$$\begin{aligned} g_{10}(\tau, \zeta) &= \frac{\gamma \sin \beta_1 \tau^+}{p_1(\tau^+, \zeta^-)}, & g_{20}(\tau, \zeta) &= \frac{\gamma \sin \beta_2 \tau^-}{p_2(\tau^-, \zeta^+)}, \\ g_{01}(\tau, \zeta) &= \frac{-\tau^-}{p_1(\zeta^+, \tau^-)}, & g_{02}(\tau, \zeta) &= \frac{\tau^+}{p_2(\zeta^-, \tau^+)}, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$p_j(x, y) = \gamma^2 x^2 + 2\gamma \gamma_j xy \cos \beta_j + \gamma_j^2 y^2, \quad j = 1, 2,$$

$$\tau^\pm = 1 \pm \tau, \quad \zeta^\pm = 1 \pm \zeta;$$

$\mathbf{Q}(\tau, \zeta) = \{q_{\ell j}(\tau, \zeta)\}_{\ell, j=0,1,2}$ – діагональна матриця з елементами $q_0(\tau, \zeta) \equiv -1$,

$$q_\ell(\tau, \zeta) = \frac{1 + (-1)^\ell \tau}{1 + (-1)^\ell \zeta}, \quad \ell = 1, 2, \text{ на діагоналі};$$

$\mathbf{D}(\tau)$ – діагональна матриця з елементами $0, \gamma_\ell^2, \ell = 1, 2$, на діагоналі;

$$f_\ell(\tau) = \chi_\ell(\eta) d_\ell^{-1}, \quad x_\ell = d_\ell \zeta, \quad \eta_\ell = d_\ell \tau, \quad \gamma_\ell = d_\ell b^{-1},$$

$$f_0(\tau) = \chi(\eta) G, \quad \eta = d\tau, \quad \gamma = db^{-1}, \quad b = \max(d, d_\ell).$$

Як видно з (11), функції $g_{\ell 0}(\tau, \zeta)$ і $g_{0\ell}(\tau, \zeta)$, $\ell = 1, 2$, мають особливості при $\tau = \pm 1$ та $\zeta = \pm 1$. Матриці $\mathbf{R}(\tau, \zeta)$ і $\mathbf{R}_0(\tau, \zeta)$ складаються з функцій, що визначають регулярні інтеграли.

3. Наближений розв'язок системи інтегро-диференціальних та інтегральних рівнянь. Наявність у сингулярних складових рівнянь системи (10) нерухомих особливостей впливає на поведінку її розв'язків в околі точок $\zeta = \pm 1$ [6]. Асимптотику розв'язків в околах цих точок визначаємо так само, як і у [8, 9]. Тому невідомі функції розшукуємо у вигляді

$$(f_\ell(\tau))' = (1 + (-1)^\ell \tau)^{\delta_\ell} (1 - (-1)^\ell \tau)^{-1/2} \psi_\ell(\tau), \quad \ell = 1, 2,$$

$$f_0(\tau) = (1 + \tau)^{\delta_1} (1 - \tau)^{\delta_2} \psi_0(\tau), \quad (12)$$

де функції $\psi_\ell(\tau)$, $\ell = 0, 1, 2$, вважаємо такими, що задовольняють умову Гельдера на проміжку $[-1, 1]$, а степеневі показники δ_ℓ є такими:

$$\delta_\ell = -\frac{\pi + 2\beta_\ell}{2(\pi + \beta_\ell)}, \quad 0 < \beta_\ell < \pi, \quad \ell = 1, 2, \quad \beta_1 = \alpha_1 - \pi, \quad \beta_2 = \alpha_2.$$

При цьому для того, щоб функції з такими особливостями були розв'язками системи (10), повинні виконуватися рівності

$$\psi_1(1) = (\gamma_1/\gamma)^{\delta_1} \psi_0(-1), \quad \psi_2(-1) = (\gamma_2/\gamma)^{\delta_2} \psi_0(1).$$

Далі шукані функції наближаємо інтерполяційними многочленами:

$$\Psi_\ell(\tau) = \sum_{m=1}^n \Psi_{\ell m} \frac{P_{\ell n}(\tau)}{(\tau - \tau_{\ell m})[P_{\ell n}(\tau_{\ell m})]'}, \quad \ell = 0, 1, 2, \quad (13)$$

де $\Psi_{\ell m} = \Psi_\ell(\tau_{\ell m})$, $P_{0n}(\tau) = P_n^{\delta_2, \delta_1}(\tau)$, $P_{1n}(\tau) = P_n^{-\delta, -1/2}(\tau)$, $P_{2n}(\tau) = P_n^{-1/2, -\delta}(\tau)$ – многочлени Якобі, а $\tau_{\ell m}$ – корені цих многочленів.

Як і в [9], значення невідомих функцій у вузлах інтерполяції знаходимо методом колокації, використовуючи нулі функцій Якобі $J_n^{\delta_2, \delta_1}(\tau)$, $J_n^{\delta_1, -1/2}(\tau)$, $J_n^{-1/2, \delta_2}(\tau)$ як точки колокації $\zeta = \zeta_{jk}$, $k = 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, 2$. Для цього до інтегралів з ядром Коші застосуємо такі квадратурні формули [2]:

$$\int_{-1}^1 \frac{q_\ell(\tau, \zeta_{\ell k}) f_\ell(\tau)}{\tau - \zeta_{\ell k}} d\tau = \sum_{m=1}^n \frac{A_{\ell m} q_\ell(\tau_{\ell m}, \zeta_{\ell k}) \Psi_{\ell m}}{\tau_{\ell m} - \zeta_{\ell k}}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad \ell = 0, 1, 2, \quad (14)$$

де $\zeta_{\ell k}$ – нулі відповідних функцій Якобі другого роду, а $A_{\ell m}$ – коефіцієнти відповідних квадратурних формул Гаусса – Якобі [7].

Для інтегралів з нерухомими особливостями

$$E_{\ell j} = \int_{-1}^1 f_\ell(\tau) g_{\ell j}(\tau, \zeta) d\tau, \quad \ell = 0, 1, 2, \quad (15)$$

при $1 \pm \zeta > \varepsilon > 0$ можемо застосувати відповідні квадратурні формули Гаусса – Якобі [7]. При $1 \pm \zeta \rightarrow 0$ інтеграли (15) знаходимо за формулами [9]:

$$E_{\ell j} = (-1)^\ell \sum_{m=1}^n \Psi_{\ell m} S_{mk}^{\ell j}, \quad \ell = 0, 1, 2, \quad (16)$$

де

$$S_{mk}^{\ell j} = \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^3 B_p^{\ell j}(\tau_{\ell m}, \zeta_{jk}) h_p^{\ell j}(r_{\ell j}^k), \quad 0 < r_{\ell j}^k < \varepsilon,$$

$$r_{0j}^k = \frac{\gamma_j(1 + (-1)^j \zeta_{jk})}{2\gamma}, \quad r_{\ell 0}^k = \frac{\gamma(1 + (-1)^\ell \zeta_{\ell k})}{2\gamma_\ell},$$

$$B_1^{0j}(x, y) = A_{0j}^m z_{0j}(x, y) n!,$$

$$B_1^{\ell 0}(x, y) = \frac{A_{\ell 0}^m \gamma_\ell^2 (1 + (-1)^\ell x) \cos \beta_\ell n!}{p_\ell(x, y)},$$

$$B_p^{0j}(x, y) = \frac{z_{0j}(x, y) [(1 + (-1)^j x)^{3-p} \gamma_j^2 y^2 - x^{3-p} p_j(x, y)]}{x^{3-p} (1+x) [P_n^{\delta_{3-j}, \delta_j}(x)]'}$$

$$B_p^{\ell 0}(x, y) = \frac{[(1 + (-1)^\ell x)^{3-p} \gamma_\ell^2 y^2 + ((-1)^\ell p_\ell(x, y))^{3-p}] \cos \beta_\ell}{x p_\ell(x, y) [P_n^{\delta_{3-\ell}, \delta_\ell}(x)]'}$$

$$z_{0j}(x, y) = \frac{\gamma(1 + (-1)^j x) + \gamma_j(1 + (-1)^j y) \cos \beta_\ell}{p_\ell(x, y)}, \quad h_1^{\ell j}(y) \equiv 1,$$

$$h_p^{0j}(y) = \frac{2^{\delta_j + \delta_{3-j}} \Gamma(\delta_{3-j} + n + 1)}{\gamma^2 \sin(\beta_j) \sin(\pi \delta_j)} \left(\sin(\pi \delta_{3-j}) \sum_{s=0}^{\infty} c_{sp}^{0j} y^{s + \delta_j} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\sin(\pi(\delta_j + \delta_{3-j})) \sum_{s=0}^{\infty} d_{sp}^{0j} y^s \Big), \\
h_p^{\ell 0}(y) &= \frac{-2^{\delta_\ell - 1/2} \Gamma(n + 1/2)}{\gamma_\ell^2 \sin(\beta_\ell)} \left(\frac{\pi}{\sin(\pi\delta_\ell)} \sum_{s=0}^{\infty} c_{sp}^{\ell 0} y^{s+\delta_\ell} - \sum_{s=0}^{\infty} d_{sp}^{\ell 0} y^s \right), \\
& \ell, j = 1, 2, \quad p = 2, 3, \\
c_{sp}^{0j} &= (-1)^{s+1} \Gamma(s - \delta_j - n) b_{sp}^j, \\
c_{sp}^{\ell 0} &= \frac{b_{sp}^\ell}{\Gamma(n - s + 1/2)}, \\
b_{sp}^i &= \frac{\Gamma(\delta_i + s + n + 1) \sin(\beta_i(\delta_i + s + p - 2))}{s! \Gamma(s + \delta_i + 1)}, \\
d_{sp}^{0j} &= u_{sp}^j \Gamma(s - \delta_j - \delta_{3-j} - n + p - 2)(n + s + p - 2)! \frac{\Gamma(s - \delta_{3-j} - n)}{\Gamma(s - \delta_j + 1)}, \\
d_{sp}^{\ell 0} &= u_{sp}^\ell \frac{\Gamma(\delta_\ell + s + p - 2)}{\Gamma(\delta_\ell - s + n + 1/2)}, \\
u_{sp}^i &= (-1)^{s+1} \frac{\sin(\beta_i(s + 1))}{(s + p - 2)!}.
\end{aligned}$$

Таким чином, при $1 - (-1)^\ell \zeta_{\ell k} \rightarrow 0$, $\ell = 1, 2$, і $1 \pm \zeta_{0k} \rightarrow 0$ інтеграли (15) подаються швидко збіжними степеневими рядами.

Для обчислення інтегралів, що безпосередньо містять невідомі функції $\varphi_\ell(\tau)$, $\ell = 1, 2$, отримуємо, як і у [9], їхні наближені значення:

$$\begin{aligned}
\varphi_\ell(\tau) &= (-1)^{\ell+1} (1 - (-1)^\ell \tau)^{1/2} \times \\
& \times \sum_{m=1}^n A_{\ell m} \Psi_{\ell m} \left(\frac{2^{1+\delta_\ell} F\left(\frac{1}{2}; -\delta_\ell; \frac{3}{2}; \frac{1 - (-1)^\ell \tau}{2}\right)}{\sigma_0^2} + \right. \\
& \left. + \frac{(-1)^\ell (1 + (-1)^\ell \tau)^{1+\delta_\ell}}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{P_{\ell j}(\tau_{\ell m}) P_{\ell, j-1}(\tau)}{j \sigma_j^2} \right), \quad (17)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
P_{1j}(\tau_{1m}) &= P_j^{\delta_\ell - 1/2}(\tau_{1m}), & P_{2j}(\tau_{2m}) &= P_j^{-1/2, \delta_2}(\tau_{2m}), \\
P_{1, j-1}(\tau) &= P_{j-1}^{\delta_\ell + 1, 1/2}(\tau), & P_{2, j-1}(\tau) &= P_{j-1}^{1/2, \delta_2 + 1}(\tau).
\end{aligned}$$

Подання (17) є основою для таких квадратурних формул для інтегралів з невідомими функціями $\varphi_\ell(\tau)$:

$$\int_{-1}^1 \varphi_\ell(x) \mathbf{R}_0(\tau, \zeta_{jk}) dx = \sum_{m=1}^n A_{\ell m} \Psi_{\ell m} U_{mi}^\ell(\tau_{\ell i}) \mathbf{R}(\tau_{\ell m}, \zeta_{jk}), \quad (18)$$

де

$$U_{mi}^\ell(\tau_{\ell i}) = -\sum_{i=1}^n A_{\ell i} Q_{km}^\ell(\tau_{\ell i}), \quad A_{\ell i} = \frac{2\sqrt{2}}{(1 - \tau_{\ell i}^2)(P_{\ell n}(\tau_{\ell i}))'^2}, \quad j, \ell = 1, 2,$$

$P_{1n}(\tau) = P_n^{0,1/2}(\tau)$, $P_{2n}(\tau) = P_n^{1/2,0}(\tau)$ – многочлени Якобі, а $\tau_{\ell i}$ – їхні корені.

Для інтегралів, що містять логарифмічну функцію, після інтегрування частинами та використання подання похідних (12), отримуємо такі квадратурні формули:

$$\int_{-1}^1 \varphi_\ell(\tau) \ln|\tau - \zeta_{\ell k}| d\tau = \sum_{m=1}^n A_{\ell m} \psi_{\ell m} B_{km}^\ell, \quad (19)$$

де

$$B_{km}^\ell = -(1 + \zeta_{\ell k})(\ln|1 + \zeta_{\ell k}| - 1) - (\tau_{\ell m} - \zeta_{\ell k})(\ln|\tau_{\ell m} + \zeta_{\ell k}| - 1),$$

$$\ell = 1, 2.$$

Застосування квадратурних формул (14), (16), (18), (19), а також формул Гаусса – Якобі приводить до заміни системи інтегро-диференціальних рівнянь (10) системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функцій ψ_ℓ , $\ell = 0, 1, 2$, у вузлах інтерполяції.

Для механіки руйнування найбільш важливими є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН)

$$K_1 = \lim_{x_1 \rightarrow -d_1 - 0} \sqrt{-x_1 - d_1} \cdot \tau_{y_1 z}^d(x_1, 0),$$

$$K_2 = \lim_{x_2 \rightarrow d_2 + 0} \sqrt{x_2 - d_2} \cdot \tau_{y_2 z}^d(x_2, 0).$$

Наближені значення КІН виражаємо через розв'язок отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$K_\ell = -G\sqrt{d_\ell} 2^{\delta_\ell - 1} \sum_{m=1}^n \frac{\psi_{\ell m} P_{\ell n}((-1)^\ell)}{(1 - (-1)^\ell \tau_{\ell m}) [P_{\ell n}(\tau_{\ell m})]'^r}, \quad \ell = 1, 2.$$

4. Аналіз числових результатів і висновки. Числові розрахунки за розробленим підходом виконано для випадку дефекту, зображеного на рис. 2.

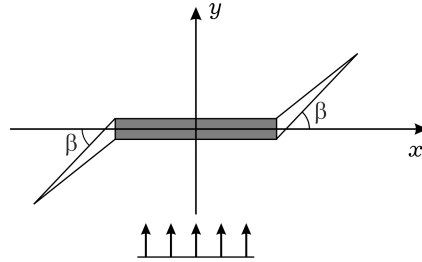


Рис. 2

Досліджено вплив кута нахилу β на залежність безрозмірних значень КІН $k_\ell = K_\ell G^{-1} / \sqrt{d_\ell}$, $\ell = 1, 2$, від безрозмірного хвильового числа $\alpha_0 = \alpha_2 b$, $b = \max(d, d_1, d_2)$, при дії хвилі поздовжнього зсуву. Результати обчислень наведено на рис. 3 (для $\beta = 5^\circ, 30^\circ, 60^\circ$) і рис. 4 (для $\beta = 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 175^\circ$). У випадку гострих кутів спостерігаємо зменшення значень КІН при збільшенні кута β , а у випадку тупих кутів – збільшення значень КІН при збільшенні кута β . Значення КІН є мінімальними у випадку, коли тріщини перпендикулярні до включення з фронтом, паралельним до осі Ox .

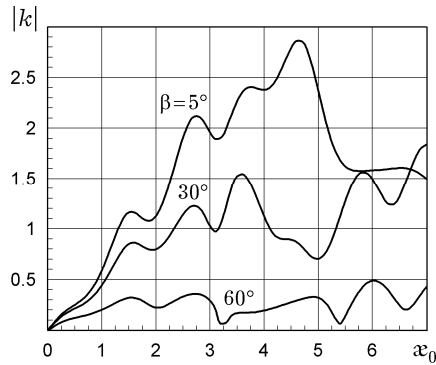


Рис. 3

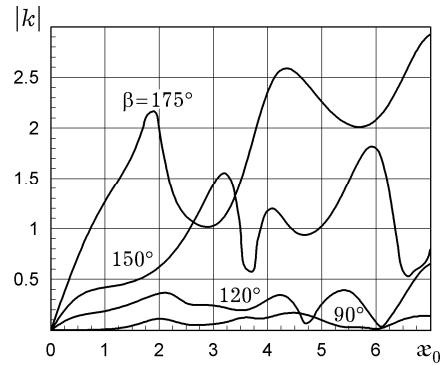


Рис. 4

Внаслідок складності хвильового поля, створеного відбиттям хвиль від дефекту, залежність КІН від частоти має істотні максимуми, на величину і положення яких впливає конфігурація дефекту.

1. Акоюян В. Н., Амирджанян А. А. Напряженное состояние полуплоскости с выходящим на границу абсолютно жестким включением и трещиной // Изв. НАН Армении. Механика. – 2015. – **68**, № 1. – С. 25–36.
2. Андреев А. Р. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 126–146.
Te same: Andreev A. V. Direct numerical method for solving singular integral equations of the first kind with generalized kernels // Mech. Solids. – 2005. – **40**, No. 1. – P. 104–119.
3. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стацук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. – Киев: Наук. думка, 1983. – 288 с.
4. Бережницкий Л. Т., Стацук Н. Г. Коэффициенты интенсивности напряжений около трещины на продолжении линейного жесткого включения // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 11. – С. 30–46.
5. Бережницкий Л. Т., Стацук Н. Г., Громяк Р. С. К определению критического размера макротрещины, возникающей на продолжении линейного жесткого включения // Проблемы прочности. – 1989. – № 2. – С. 68–71.
Te same: Berezhnitskii L. T., Stashchuk N. G., Gromyak R. S. Determination of the critical dimension of macrocracks originating at the continuation of a linear rigid inclusion // Strength Mater. – 1989. – **21**, No. 2. – P. 217–220. – <https://doi.org/10.1007/BF01529640>.
6. Дудучава Р. В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбилисск. мат. ин-та им. А. М. Размадзе АН ГССР. – 1979. – **60**. – 135 с.
7. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
8. Мішарін А. С., Попов В. Г. Дослідження напруженого стану біля тріщини і включення, що виходять з однієї точки, при дії силою поздовжнього зсуву // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – Вип. 3. – С. 147–150.
9. Мішарін А. С., Попов В. Г. Напружений стан біля довільно орієнтованих тріщин на продовженні жорсткого включення за дії зсувної гармонійної сили // Проблеми обчислюв. механіки і міцності конструкцій. – 2018. – Вип. 28. – С. 120–132.
10. Попов В. Г. Тріщина у вигляді триланкової ламаної під дією хвилі поздовжнього зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 1. – С. 112–120.
Te same: Popov V. G. A crack in the form of a three-link broken line under the action of longitudinal shear waves // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 2. – P. 143–154. – <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3288-5>.
11. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.

12. *Fan S. W., Guo J. H., Yu J.* Anti-plane problem of four edge cracks emanating from a square hole in piezoelectric solids // Chinese J. Aeronaut. – 2017. – **30**, No. 1. – P. 461–468. – <https://doi.org/10.1016/j.cja.2016.08.018>.
13. *Kang S., Ham S., Kim K.-J.* An analytical, numerical, and experimental study of Rayleigh wave scattering for internal vertical crack evaluation // Constr. Build. Mater. – 2021. – **306**. – Art. 124838. – <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.124838>.
14. *Shi P.* Singular integral equation method for 2d fracture analysis of orthotropic solids containing doubly periodic strip-like cracks on rectangular lattice arrays under longitudinal shear loading // Appl. Math. Model. – 2020. – **77**, Part 2. – P. 1460–1473. – <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.09.026>.
15. *Wang C., Balogun O., Achenbach J. D.* Scattering of a Rayleigh wave by a near surface crack which is normal to the free surface // Int. J. Eng. Sci. – 2019. – **145**. – Art. 103162. – <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103162>.

STRESS STATE NEAR THE CRACKS COMING OUT FROM THE ENDS OF A THIN RIGID INCLUSION THAT IS CAUSED BY THE ACTION OF LONGITUDINAL SHEAR WAVES

The concentration of stresses near cracks coming out at an arbitrary angle from edges of thin rigid inclusion under the action of harmonic waves of longitudinal shear is investigated. The original problem is reduced to a system of two singular integral-differential and one integral equations, the kernels of which contain fixed singularities. These equations are solved by numerical method which takes into account the asymptotics of unknown functions and uses special quadrature formulas for singular integrals.

Key words: *stress intensity factors, singular integro-differential equations, harmonic oscillations, non-movable singularity, inclusion, cracks.*

Нац. ун-т «Одеська морська акад.», Одеса

Одержано
04.03.21