УДК 517.983.54

І. П. Лусте, І. Д. Пукальський ✉

# КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕРІВНОМІРНО ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

*За допомогою апріорних оцінок і теореми Рісса досліджено крайову задачу для нерівномірно* $2b$*-еліптичних рівнянь з довільними степеневими особливостями на деякій множині точок у коефіцієнтах рівняння і крайових умов. Встановлено існування та інтегральне зображення єдиного розв'язку сформульованої крайової задачі у гельдерових просторах зі степеневою вагою, порядок якої визначається через величини порядків особливостей у коефіцієнтах рівняння і крайових умов.*

***Ключові слова:*** *крайова задача, степеневі особливості, інтерполяційні нерівності, гельдерові простори, теорема Арцела, теорема Рісса, борелівська міра.*

**Вступ.** У сучасних прикладних дослідженнях дуже часто зустрічаються задачі з різними виродженнями. Так, задача про вивчення стану квантомеханічної системи вимагає дослідження рівняння Шредінгера, коефіцієнти якого визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості [3].

У монографії [4] вивчаються диференціальні властивості еліптичних потенціалів і спеціальних об'ємних інтегралів з ядрами із класу Діні, які використовуються для побудови функціональної матриці розв'язків еліптичних систем. За допомогою матриці Ґріна еліптичних задач встановлено теореми про коректність еліптичних задач із великим параметром.

Дослідженню крайових задач для еліптичних рівнянь, які не задовольняють умову рівномірної еліптичності та мають степеневі особливості в коефіцієнтах, присвячено праці [2, 5, 6, 8–10].

У цій статті розглядається загальна крайова задача для еліптичного рівняння порядку $2b$, $b > 1$, з параметром, зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння і крайових умов довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і теореми Арцела доведено існування єдиного розв'язку сформульованої задачі та встановлено оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається через величини порядків степеневих особливостей і вироджень коефіцієнтів рівняння і крайових умов.

**1. Постановка задачі і основний результат.** Нехай $\mathcal{D}$ – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\mathcal{D}$, $\dim \mathcal{D} = n$, $\Omega$ – деяка обмежена область, $\bar{\Omega} \subset \mathcal{D}$, $\dim \Omega \le n-1$.

Розглянемо в області $\mathcal{D}$ задачу про знаходження функції $u(x)$, яка задовольняє при $x \in \mathcal{D} \setminus \bar{\Omega}$ рівняння

$$\sum_{|k|=2b} A_k(x) D_x^k u + \sum_{|p|\le 2b-1} A_p(x) D_x^p u + \lambda u(x) = f_0(x), \tag{1}$$

та крайові умови на межі області $\partial\mathcal{D}$:

$$\lim_{x\to z\in\partial\mathcal{D}} \left[ \sum_{|k|=r_i} B_k^{(i)}(x) D_x^k u + \sum_{|p|\le r_i-1} B_p^{(i)}(x) D_x^p u - f_i(x) \right] = 0, \quad i \in \{1,\dots,b\}. \tag{2}$$

Тут $D_x^k = D_{x_1}^{k_1} \dots D_{x_n}^{k_n}$; $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$; $\lambda$ – параметр.

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) і крайових умов (2) у

✉i.pukalsky@chnu.edu.ua

точці $P(x) \in \mathcal{D} \setminus \bar{\Omega}$ характеризуватимуть функції

$$s(\beta_j, x) = \begin{cases} \rho^{\beta_j}(x), & \rho(x) \le 1, \\ 1, & \rho(x) > 1, \end{cases}$$

де $\rho(x) = \inf\limits_{z \in \bar{\Omega}} |x - z|$, $\beta_j \in (-\infty, \infty)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Введемо позначення: $\ell$, $q$, $\alpha$, $\gamma$, $\mu_{k_j}$, $\delta_{k_j}$, $\mu_0$, $\delta_0^{(i)}$ – дійсні додатні числа, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $[\ell]$ – ціла частина числа $\ell$, $\{\ell\} = \ell - [\ell]$; $\alpha \in (0,1)$; $P(x)$, $P_1(x^{(1)})$, $H_r(x^{(2)})$ – довільні точки з $\bar{\mathcal{D}}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{r-1}^{(1)}, x_r^{(2)}, x_{r+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1), (2).

$C^{\ell}(\gamma; \beta; q; \mathcal{D})$ – множина функцій $u(x) \in \bar{\mathcal{D}}$, які мають неперервні частинні похідні в області $\mathcal{D} \setminus \bar{\Omega}$ вигляду $D_x^k$, $|k| \le [\ell]$, і для яких є скінченною норма

$$\| u; \gamma; \beta; q; \mathcal{D} \|_{\ell} = \sum_{|k| \le [\ell]} \| u; \gamma; \beta; q; \mathcal{D} \|_{|k|} + \langle u; \gamma; \beta; q; \mathcal{D} \rangle_{\ell},$$

де

$$\| u; \gamma; \beta; 0; \mathcal{D} \|_0 = \sup_{P \in \bar{\mathcal{D}}} |u(P)| \equiv \| u; \mathcal{D} \|_0,$$

$$\| u; \gamma; \beta; q; \mathcal{D} \|_{|k|} = \sup_{P \in \bar{\mathcal{D}}} s(q + |k|\gamma, x) \left| D_x^k u(P) \right| \prod_{j=1}^{n} s(-k_j \beta_j, x),$$

$$\langle u; \gamma; \beta; q; \mathcal{D} \rangle_{\ell} = \sum_{|k| = [\ell]} \Bigg[ \sum_{r=1}^{n} \sup_{(P_1, H_r) \subset \bar{\mathcal{D}}} s(q + [\ell]\gamma, \tilde{x}) s(\{\ell\}(\gamma - \beta_2), \tilde{x}) \times$$

$$\times \left| x_r^{(1)} - x_r^{(2)} \right|^{-\{\ell\}} \left| D_x^k u(P_1) - D_x^k u(H_r) \right| \prod_{j=1}^{n} s(-k_j \beta_j, \tilde{x}) \Bigg],$$

$$s(a, \tilde{x}) = \min\{ s(a, x^{(1)}), s(a, x^{(2)}) \}.$$

Нехай для задачі (1), (2) виконуються такі умови:

***1°***) для коефіцієнтів рівняння (1):

$$A_k(x) \prod_{j=1}^{n} s(k_j \beta_j, x) \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D}),$$

$$A_p(x) \prod_{j=1}^{n} s(k_j \mu_{k_j}, x) \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D}), \qquad 1 \le |p| \le 2b - 1,$$

$$A_0(x) s(\mu_0, x) \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D}), \qquad A_0(x) < \lambda, \qquad 0 < \lambda < \infty,$$

оператор $\sum\limits_{|k|=2b} \prod\limits_{j=1}^{n} s(k_j \beta_j, x) A_k(x) D_x^k$ – рівномірно еліптичний [1, с. 10];

***2°***) для коефіцієнтів крайових умов (2):

$$B_k^{(j)}(x) \prod_{j=1}^{n} s(k_j \beta_j, x) \in C^{2b - r_i + \alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D}),$$

$$B_p^{(i)}(x) \prod_{j=1}^{n} s(k_j \delta_{k_j}, x) \in C^{2b - r_i + \alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D}),$$

$$B_0^{(i)}(x) s(\delta_0^{(i)}, x) \in C^{2b - r_i + \alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D}),$$

для операторів $\sum_{|k|=r_i}\prod_{j=1}^{n} s(k_j\beta_j, x) B_k^{(i)}(x) D_x^k$ виконуються умови доповняльності [1, с. 22], $r_i \le 2b-1$, $i \in \{1,\dots,b\}$;

***3°***) функції $f_0(x) \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b;\mathcal{D})$, $f_i(x) \in C^{2b-r_i+\alpha}(\gamma;\beta;r_i;\mathcal{D})$, $\partial\mathcal{D} \in C^{2b+\alpha}$,

$$\gamma = \max\left\{\max_j \beta_j,\ \max_{j,k_j}\frac{k_j(\mu_{k_j}-\beta_j)}{2b-|k|},\ \max_{j,i,k_j}\frac{k_j(\delta_{k_j}-\beta_j)}{r_i-|k|},\ \frac{\mu_0}{2b}\max_i\frac{\delta_0^{(i)}}{r_i}\right\}.$$

Правильною є така

**Теорема 1.** *Нехай для задачі* (1), (2) *виконуються умови* ***1°–3°***. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\mathcal{D})$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\|_{2b+\alpha} \le C\left(\|f;\gamma;\beta;2b;\mathcal{D}\|_{\alpha} + \sum_{i=1}^{b}\|f_i;\gamma;\beta;r_i;\mathcal{D}\|_{2b-r_i+\alpha}\right). \tag{3}$$

*Якщо, крім того,* $f_0 \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\mathcal{D})$, $f_i \in C^{2b-r_i+\alpha}(\gamma;\beta;0;\mathcal{D})$ *і для задачі* (1), (2) *виконуються умови* ***1°–3°***, *то єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *визначається інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою*

$$u(x) = \int_D Z(x,\xi,d\xi) f_0(\xi) + \sum_{i=1}^{b}\int_{\partial\mathcal{D}} Z_i(x,\xi;d_\xi s) f_i(\xi). \tag{4}$$

Для д о в е д е н н я теореми 1 встановимо спочатку розв'язність допоміжних крайових задач із гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничним значенням якої є розв'язок задачі (1), (2).

**2. Оцінка розв'язків допоміжних задач.** Нехай $\mathcal{D}_m = \mathcal{D} \cap \{x \in \mathcal{D} \mid s(1,x) \ge m^{-1}\}$, $m \ge 1$, – послідовності областей, які при $m \to \infty$ збігаються до $\mathcal{D}$. Розглянемо в області $\mathcal{D}$ задачу знаходження функцій $u_m(x)$, які задовольняють рівняння

$$\sum_{|k|=2b} a_k(x) D_x^k u_m(x) + \sum_{|p|\le 2b-1} a_p(x) D_x^p u_m + \lambda u_m(x) = F_m(x), \tag{5}$$

а на межі області $\partial\mathcal{D}$ – крайові умови

$$\lim_{k\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|=r_i} b_k^{(i)}(x) D_x^k u_m + \sum_{|p|\le r_i-1} b_p^{(i)}(x) D_x^p u_m - \varphi_m^{(i)}(x)\right] = 0,$$

$$i \in \{1,\dots,b\}. \tag{6}$$

Тут коефіцієнти $a_k$, $a_p$, $b_k^{(i)}$, $b_p^{(i)}$ та функції $F_m$, $\varphi_m^{(i)}$ в областях $\mathcal{D}_m$ співпадають із $A_k$, $A_p$, $B_k^{(i)}$, $B_p^{(i)}$, $f_0$, $f_i$, відповідно, а в областях $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_m$ є неперервними продовженнями коефіцієнтів $A_k$, $A_p$, $B_k^{(i)}$, $B_p^{(i)}$ та функцій $f_0$, $f_i$, $i \in \{1,\dots,b\}$, з областей $\mathcal{D}_m$ в області $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_m$ зі збереженням гладкості та норм [11, с. 82].

Позначимо через $H^{\ell}(\gamma;\beta;q;\mathcal{D})$ сукупність функцій $u_m(x)$ з простору $C^{\ell}(\mathcal{D})$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;\mathcal{D}\|_{\ell}$, еквівалентною при кожному $m$ гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і норма $\|u;\gamma;\beta;q;D\|_{\ell}$, тільки замість функцій $s(a,x)$ беремо

$$d(a,x)=\begin{cases}\max\{s(a,x),m^{-a}\}, & a\ge 0,\\ \min\{s(a,x),m^{-a}\}, & a<0.\end{cases}$$

Встановимо інтерполяційні нерівності для норм $\|u_m;\gamma;\beta;q;\mathcal{D}\|_\ell$.

**Лема 1.** *Нехай* $u_m\in H^\ell(\gamma;\beta;q;\mathcal{D})$. *Тоді для довільного* $0<\varepsilon<1$ *існує стала* $C(\varepsilon)$ *така, що виконуються нерівності*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\|_{2b}\le\varepsilon^\alpha\langle u_m;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\rangle_{2b+\alpha}+C(\varepsilon)\|u_m;\mathcal{D}\|_0,$$

$$\|u_m;\gamma;\beta;q;\mathcal{D}\|_{|k|}\le\varepsilon\|u_m;\gamma;\beta;q;\mathcal{D}\|_{|k|+1}+\frac{C}{\varepsilon}\|u_m;\gamma;\beta;q;\mathcal{D}\|_{|k|},$$

$$|k|<2b,\qquad\alpha\in(0,1). \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Нерівності (7) одержуємо за схемою доведення леми 1 з [7]. ♦

При виконанні умов *1°–3°* існує єдиний розв'язок задачі (5), (6) у просторі $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\mathcal{D})$ [4, теорема 1.20, с. 230]. Встановимо оцінку норми $\|u_m;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\|_{2b+\alpha}$.

Є правильною така

**Теорема 2.** *Якщо виконуються умови* ***1°–3°****, то для розв'язку задачі* (5), (6) *справджується оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\|_{2b+\alpha}\le C\Big(\|F_m;\gamma;\beta;2b;\mathcal{D}\|_\alpha+$$

$$+\|u_m;\mathcal{D}\|_0+\sum_{i=1}^{b}\|\varphi_m^{(i)};\gamma;\beta;r_i;\mathcal{D}\|_{2b-r_i+\alpha}\Big). \tag{8}$$

*Стала* $C$ *не залежить від* $m$.

Д о в е д е н н я. Використовуючи інтерполяційні нерівності (7), маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\|_{2b+\alpha}\le(1+\varepsilon^\alpha)\langle u_m;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\rangle_{2b+\alpha}+C(\varepsilon)\|u_m;\mathcal{D}\|_0.$$

Тому достатньо оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\rangle_{2b+\alpha}$. З означення півнорми випливає існування в $\bar{\mathcal{D}}$ точок $P_1(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $H_r(x_1^{(1)},\dots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)},x_{r+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, для яких виконується нерівність

$$\frac{1}{2}\|u_m;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\|_{2b+\alpha}\le E, \tag{9}$$

де

$$E=\sum_{|k|=2b}\Big[\sum_{r=1}^{n}\sup_{(P_1,H_r)\subset\bar{\mathcal{D}}}d(2b\gamma,\tilde{x})\,d(\alpha(\gamma-\beta),\tilde{x})\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\alpha}\times$$

$$\times\left|D_x^k u_m(P_1)-D_x^k u_m(H_r)\right|\prod_{j=1}^{n}d(-k_j\beta_j,\tilde{x})\Big].$$

Якщо $\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|\ge\frac{\varepsilon_1}{4}n^{-1}d(\gamma-\beta_r,\tilde{x})\equiv N$, а $\varepsilon$ – довільне дійсне число, $\varepsilon\in(0,1)$, то

$$E\ge\frac{2}{\varepsilon_1^\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\|_{2b+\alpha}. \tag{10}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності (7) до (10), знаходимо

$$E \le \varepsilon^{\alpha} \|u_m;\gamma;\beta;0;\mathcal{D}\|_{2b+\alpha} + C(\varepsilon)\|u_m;\mathcal{D}\|_0 . \tag{11}$$

Нехай $\left|x_r^{(1)} - x_r^{(2)}\right| \le N$. Будемо вважати, що $d(\gamma,\tilde{x}) \equiv d(\gamma, x^{(1)})$. Нехай $|x_n - \xi_n| \le 2N$, $\xi_n \in \partial\mathcal{D}$, або $|x-\xi| \le 2Nn$. Розглянемо кулю $\mathcal{K}(a,P)$ радіуса $a$, $a > 4Nn$, що містить точки $P_1$, $H_r$, із центром у деякій точці $P \in \partial\mathcal{D}$. Використовуючи обмеження на гладкість межі $\partial\mathcal{D}$, можемо розпрямити $\partial\mathcal{D} \bigcap \mathcal{K}(a,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$ [11, с. 155], в результаті якого область $\Pi = \mathcal{D} \bigcap \mathcal{K}(a,P)$ перейде в область $\Pi_1$, для точок якої $y_n \ge 0$.

Покладемо $u_m(x) = v_m(y)$. Вважатимемо, що $P_1$, $H_r$, $E$, $d(\gamma, x^{(1)})$ переходять при цьому перетворенні в $R_1$, $M_r$, $E_1$, $d_1(\gamma, y^{(1)})$. Позначимо коефіцієнти рівняння (5) і крайових умов (6) в області $\Pi_1$ через $t_k$, $t_p$, $\ell_k^{(i)}$, $\ell_p^{(i)}$. Тоді $v_m(y)$ буде розв'язком задачі

$$\sum_{|k|=2b} t_k(y^{(1)}) D_y^k v_m =$$

$$= \sum_{|k|=2b} \left[ t_k(y^{(1)}) - t_k(y) \right] D_y^k v_m - \sum_{|p| \le 2b-k} t_p(y) D_y^p v_m -$$

$$- \lambda v_m(y) + F_m(\psi(y)) \equiv F_m^{(0)}(y, v_m) , \tag{12}$$

$$\sum_{|k|=r_i} \ell_k^{(i)}(y^{(1)}) D_y^k v_m \Big|_{y_n=0} =$$

$$= \left\{ \sum_{|k|=r_i} \left[ \ell_k^{(i)}(y^{(1)}) - \ell_k^{(i)}(y) \right] D_y^k v_m - \sum_{|p| \le r_i - 1} \ell_p^{(i)}(y) D_y^p v_m + \right.$$

$$\left. + \varphi_m^{(1)}(\psi(y)) \right\} \Big|_{y_n=0} \equiv \Psi_m^{(i)}(y, v_m) \Big|_{y_n=0} , \quad i \in \{1, \ldots, b\} . \tag{13}$$

У задачі (12), (13) зробимо заміну $v_m(y) = \omega_m(z)$, де $z_i = d_1(\beta_i, y^{(1)}) y_i$. Позначимо через $\Pi_2$ область визначення функцій $\omega_m(z)$. Тоді $\omega_m(z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\sum_{|k|=2b} t_k(y^{(1)}) \prod_{j=1}^{n} d_1(k_j \beta_j, y^{(1)}) D_z^k \omega_m = F_m^{(1)}(\tilde{z}, \omega_m) , \tag{14}$$

$$\sum_{|k|=r_i} \ell_k^{(i)}(y^{(1)}) \prod_{j=1}^{n} d_1(k_j \beta_j, y^{(1)}) D_z^k \omega_m \Bigg|_{z_{n=0}} = \Psi_m^{(i)}(\tilde{z}, \omega_m) \Big|_{z_{n=0}} ,$$

$$i \in \{1, \ldots, b\} , \tag{15}$$

де $\tilde{z} = (d_1^{-1}(\beta_1, y^{(1)}) z_1, d_1^{-1}(\beta_2, y^{(1)}) z_2, \ldots, d_1^{-1}(\beta_n, y^{(1)}) z_n)$.

Позначимо $z_i^{(1)} = d_1(\beta_i, y^{(1)}) y_i^{(1)}$, $K_\delta = \{z \in \Pi_2, \left|z_j - z_j^{(1)}\right| \le 4\delta n^{-1} d_1(\gamma, y^{(1)})$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Виберемо функцію $\eta(z)$, яка має неперервні частинні похідні порядку $2b+1$ за змінними $z_j$ і задовольняє умови

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & z \in K_{1/2}, \quad 0 \le \eta(z) \le 1, \\ 0, & z \notin K_{3/4}, \quad \left|D_z^k \eta\right| \le C_k d^{-1}(|k|\gamma; y^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $V_m(z) = \omega_m(z)\eta(z)$ буде розв'язком задачі

$$\sum_{|k|=2b} t_k(y^{(1)}) \prod_{j=1}^{n} d_1(k_j\beta_j, y^{(1)}) D_z^k V_m(z) =$$

$$= \sum_{|k|=2b} t_k(y^{(1)}) \prod_{j=1}^{n} d_1(k_j\beta_j, y^{(1)}) \left( \sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|} D_z^{k-p} \omega_m D_z^p \eta \right) +$$

$$+ \eta F_m^{(0)}(\tilde{z}, \omega_m) \equiv F_m^{(1)}(z, \eta, \omega_m), \qquad (16)$$

$$\sum_{|k|=r_i} \ell_k^{(i)}(y^{(1)}) \prod_{j=1}^{n} d_1(k_j\beta_j, y^{(1)}) D_z^k V_m(z) \Big|_{z_n=0} =$$

$$= \left\{ \sum_{|k|=r_i} \ell_k^{(i)}(y^{(1)}) \prod_{j=1}^{n} d_1(k_j\beta_j, y^{(1)}) \times \right.$$

$$\left. \times \left( \sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|} D_z^{k-p} \omega_m D_z^p \eta \right) + \eta \Psi_m^{(i)}(\tilde{z}, \omega_m) \right\} \Bigg|_{z_n=0} \equiv$$

$$\equiv G_m^{(i)}(z, \eta, \omega_m) \Big|_{z_n=0}, \qquad i \in \{1, \ldots, b\}. \qquad (17)$$

Зазначимо, що коефіцієнти рівняння (16) і крайових умов (17) обмежені сталими, незалежними від точки $R_1(y^{(1)})$. Тому, згідно з теоремою 7.3 (див. [1, с. 77]), для довільних точок $M_1(\xi^{(1)}) \in K_{1/2}$, $M_2(\xi^{(2)}) \in K_{1/2}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2) \left| D_z^k \omega_m(M_1) - D_z^k \omega_m(M_2) \right| \le$$

$$\le C \left( \left\| F_m^{(1)} \right\|_{C^\alpha(K_{3/4})} \sum_{i=1}^{b} \left\| G_m^{(i)} \right\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(K_{3/4})} + \left\| \omega_m; K_{3/4} \right\|_0 \right), \qquad (18)$$

$$d(M_1, M_2) = \left[ \sum_{j=1}^{n} \left| \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \right|^2 \right]^{1/2}, \qquad |k| = 2b.$$

Враховуючи властивості функції $\eta(z)$ і нерівності (7), одержимо

$$\left\| F_m^{(1)} \right\|_{C^\alpha(K_{3/4})} \le C d_1^{-1}((2b+\alpha)\gamma, y^{(1)}) \times$$

$$\times \left[ \left\| \omega_m; \gamma; 0; 0; K_{3/4} \right\|_{2b} + \left\| \omega_m; K_{3/4} \right\|_0 + \right.$$

$$\left. + \left\| F_m^{(0)}; \gamma; 0; 2b; K_{3/4} \right\|_\alpha \right], \qquad (19)$$

$$\left\| G_m^{(i)} \right\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(K_{3/4})} \le C d_1^{-1}((2b+\alpha)\gamma, y^{(1)}) \times$$

$$\times \left[ \left\| \omega_m; \gamma; 0; 0; K_{3/4} \right\|_{2b} + \left\| \omega_m; K_{3/4} \right\|_0 + \right.$$

$$\left. + \left\| \Psi_m^{(i)}; \gamma; 0; r_i; K_{3/4} \right\|_{2b-r_i+\alpha} \right]. \qquad (20)$$

З означення простору $H^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; q; \mathcal{D})$ випливає правильність нерівностей

$$c_1\left\|\omega_m;\gamma;0;0;K_{3/4}\right\|_\ell \le \left\|u_m;\gamma;\beta;0;T_{3/4}\right\|_\ell \le c_2\left\|\omega_m;\gamma;0;0;K_{3/4}\right\|_\ell ,$$

де

$$T_\delta = \{x\in\Pi, \left|x_j - x_j^{(1)}\right| \le 4\delta n^{-1} d(\gamma-\beta_j, x^{(1)}),\ j=1,2,\dots,n\}.$$

Підставляючи (19), (20) у (18) і повертаючись до змінних $x$, знаходимо

$$E \le C\Big(\left\|F_m^{(0)};\gamma;\beta;2b;T_{3/4}\right\|_\alpha + \left\|\Psi_m^{(i)};\gamma;\beta;r_i;T_{3/4}\right\|_{2b-r_i+\alpha} +$$

$$+\left\|u_m;\gamma;\beta;0;T_{3/4}\right\|_{2b} + \left\|u_m;T_{3/4}\right\|_0\Big). \quad (21)$$

Для знаходження норм $\left\|F_m^{(0)};\gamma;\beta;2b;T_{3/4}\right\|_\alpha$ і $\left\|\Psi_m^{(i)};\gamma;\beta;r_i;T_{3/4}\right\|_{2b-r_i+\alpha}$ достатньо оцінити півнорми кожного доданка виразів $F_m^{(0)}$, $\Psi_m^{(i)}$. Скориставшись нерівностями (7), одержимо

$$\left\|F_m^{(0)};\gamma;\beta;2b;T_{3/4}\right\|_\alpha \le C_3\left(\left\|F_m;\gamma;\beta;2b;T_{3/4}\right\|_\alpha + \left\|u_m;T_{3/4}\right\|_0\right) +$$

$$+\varepsilon_2\left\|u_m;\gamma;\beta;0;T_{3/4}\right\|_{2b+\alpha}, \quad (22)$$

$$\left\|\Psi_m^{(i)};\gamma;\beta;r_i;T_{3/4}\right\|_{2b-r_i+\alpha} \le C_4^{(i)}\left(\left\|\varphi_m^{(i)};\gamma;\beta;r_i;T_{3/4}\right\|_{2b-r_i+\alpha} + \left\|u_m;T_{3/4}\right\|_0\right) +$$

$$+\varepsilon_3\left\|u_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\right\|_{2b+\alpha}, \qquad i\in\{1,\dots,b\}. \quad (23)$$

Підставляючи (22), (23) у (21), знаходимо

$$E \le C_5\left(\left\|F_m;\gamma;\beta;2b;T_{3/4}\right\|_\alpha + \sum_{i=1}^{b}\left\|\varphi_m^{(i)};\gamma;\beta;r_i;T_{3/4}\right\|_{2b-r_i+\alpha} + \left\|u_m;T_{3/4}\right\|_0\right) +$$

$$+\varepsilon_4\left\|u_m;\gamma;\beta;0;T_{3/4}\right\|_{2b+\alpha}. \quad (24)$$

Розглянемо випадок, коли $|x_n-\xi_n|\ge 2N$ або $|x-\xi|\ge 2Nn$, $\xi\in\partial\mathcal{D}$. Нехай $T_\delta^{(1)} = \{x\in\mathcal{D}, \left|x_j - x_j^{(1)}\right|\le 4\delta N\}$. У задачі (5), (6) зробимо заміну $u_m(x) = v_m(z)$, $z_j = d(\beta_j, x^{(1)})x_j$, $j\in\{1,2,\dots,n\}$. Тоді функція $W_m(z) = v_m(z)\eta_1(z)$ буде розв'язком задачі

$$\sum_{|k|=2b} a_k(x^{(1)})\prod_{j=1}^{n} d(k_j\beta_j, x^{(1)})D_z^k W_m = \sum_{|k|=2b} a_k(x^{(1)})\prod_{j=1}^{n} d(k_j\beta_j, x^{(1)})\times$$

$$\times\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|} D_z^{k-p} v_m D_z^p \eta_1\right) + \eta_1 F_m^{(2)}(\tilde z) \equiv F_m^{(3)}(z,\eta_1,v_m), \quad (25)$$

$$\sum_{|k|=r_i} b_k^{(i)}(x^{(1)})\prod_{j=1}^{n} d(k_j\beta_j, x^{(1)})D_z^k W_m\Big|_{\partial\mathcal{D}} = \Bigg\{\sum_{|k|=r_i} b_k^{(i)}(x^{(1)})\prod_{j=1}^{n} d(k_j\beta_j, x^{(1)})\times$$

$$\times\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|} D_z^{k-p} v_m D_z^p \eta_1\right) + \eta_1 g_m^{(i)}(\tilde z)\Bigg\}\Bigg|_{\partial\mathcal{D}} \equiv$$

$$\equiv \Phi_m^{(i)}(z,\eta_1,v_m), \qquad i\in\{1,\dots,b\}, \quad (26)$$

де

$$F_m^{(2)}(x) = \sum_{|k|=2b} \left[ a_k(x^{(1)}) - a_k(x) \right] D_x^k u_m -$$

$$- \sum_{|p|\le 2b-1} a_p(x) D_x^p u_m + \lambda u_m + F_m(x),$$

$$g_m^{(i)}(x) = \sum_{|k|=r_i} \left[ b_k^{(i)}(x^{(1)}) - b_k^{(i)}(x) \right] D_x^k u_m - \sum_{|p|\le r_i-1} b_p^{(i)}(x) D_x^p u_m + \varphi_m^{(i)}(x),$$

$$i \in \{1, \dots, b\},$$

$$\eta_1(z) = \begin{cases} 1, & z \in H_{1/2}^{(1)}, \quad 0 \le \eta_1(z) \le 1, \\ 0, & z \notin H_{3/4}^{(1)}, \quad \left| D_z^k \eta_1 \right| \le C_k d^{-1}(|k|\gamma; x^{(1)}), \end{cases}$$

$$H_\delta^{(1)} = \{z, \left| z_j - z_j^{(1)} \right| \le 4\delta n^{-1} d(\gamma\beta_j, x^{(1)}),\ j \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

$$z_j^{(1)} = d(\beta_j, x^{(1)}) x_j^{(1)}.$$

Коефіцієнти рівняння (25) і крайових умов (26) обмежені сталими, не залежними від $P_1(x^{(1)})$. Тому. з огляду на теорему 7.3 з [1, с. 77] та оцінку (7.8) з [1, с. 77], для довільних точок $M_1(\xi^{(1)})$ і $M_2(\xi^{(2)}) \in H_{1/2}^{(1)}$ справджується нерівність

$$\left| \xi^{(1)} - \xi^{(2)} \right|^{-\alpha} \left| D_z^k v_m(M_1) - D_z^k v_m(M_2) \right| \le$$

$$\le C_5 \left( \left\| F_m^{(3)} \right\|_{C^\alpha(H_{3/4})} + \sum_{i=1}^{b} \left\| \Phi_m^{(i)} \right\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(H_{3/4})} + \left\| v_m; H_{3/4} \right\|_0 \right),$$

$$|k| = 2b. \tag{27}$$

Враховуючи властивості функції $\eta_1(z)$ та означення простору $H^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; q; \mathcal{D})$ і повторюючи міркування дослідження задачі (16), (17), знаходимо

$$E \le C_6 \left( \left\| F_m; \gamma; \beta; 2b; T_{3/4}^{(1)} \right\|_\alpha + \sum_{i=1}^{b} \left\| \varphi_m^{(i)}; \gamma; \beta; r_i; T_{3/4}^{(1)} \right\|_{2b-r_i+\alpha} + \left\| u_m; T_{3/4}^{(1)} \right\|_0 \right) +$$

$$+ \varepsilon_5 \left\| u_m; \gamma; \beta; 0; T_{3/4}^{(1)} \right\|_{2b+\alpha}. \tag{28}$$

Враховуючи нерівності (9), (11), (24), (28) і вибираючи $\varepsilon$, $\varepsilon_4$, $\varepsilon_5$ достатньо малими, одержимо оцінку (8). Теорему доведено. ♦

Знайдемо оцінку норми $\left\| u_m; \mathcal{D} \right\|_0$.

**Теорема 3.** *Якщо* $u_m(x)$ *− єдиний класичний розв'язок задачі* (5), (6) *і виконуються умови* ***1°−3°****, то для* $u_m(x)$ *виконується нерівність*

$$\left\| u_m; \mathcal{D} \right\|_0 \le C \left( \left\| F_m; \gamma; \beta; 2b; \mathcal{D} \right\|_\alpha + \sum_{i=1}^{b} \left\| \varphi_m^{(i)}; \gamma; \beta; r_i; \mathcal{D} \right\|_{2b-r_i+\alpha} \right), \tag{29}$$

*де стала* $C$ *не залежить від* $m$.

*Д о в е д е н н я.* За умов, накладених на гладкість коефіцієнтів задачі (5), (6) і функцій $F_m$, $\varphi_m^{(i)}$, існує єдиний розв'язок задачі (5), (6), який належить до простору $H^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D})$ і має при кожному фіксованому $m$ скінченну норму (див. теорему 1.20 з [4, с. 230]).

Скориставшись методикою доведення зауваження 2 [1, с. 79], встановлюємо нерівність (29). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Оскільки

$$\|F_m; \gamma; \beta; 2b; \mathcal{D}\|_\alpha \le C \|f_0; \gamma; \beta; 2b; \mathcal{D}\|_\alpha,$$

$$\left\|\varphi_m^{(i)}; \gamma; \beta; r_i; \mathcal{D}\right\|_{2b-r_i+\alpha} \le C \|f_i; \gamma; \beta; r_i; \mathcal{D}\|_{2b-r_i+\alpha}, \quad i \in \{1, \ldots, b\},$$

то, використовуючи нерівності (8), (29), одержимо

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; \mathcal{D}\|_{2b+\alpha} \le C\left( \|f_0; \gamma; \beta; 2b; \mathcal{D}\|_\alpha + \sum_{i=1}^{b} \|f_i; \gamma; \beta; r_i; \mathcal{D}\|_{2b-r_i+\alpha} \right). \quad (30)$$

Права частина нерівності (30) не залежить від $m$, а послідовності $\{\Gamma_m^{(k)}\} = \left\{ d(|k|\gamma, x) \prod_{i=1}^{n} d(-k_i\beta_i, x) \left| D_x^k u_m \right| \right\}$, $|k| \le 2b$, рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні в $\bar{D}$. За теоремою Арцела, існують підпослідовності $\{\Gamma_{m(j)}^{(k)}\}$, рівномірно збіжні при $m(j) \to \infty$ до $\Gamma^k$. Переходячи у задачі (5), (6) до границі при $m(j) \to \infty$, одержимо, що $u = \Gamma^{(0)}$ − єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u \in C^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D})$ і справджується оцінка (3).

Оскільки

$$C^\alpha(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D}) \subset C^\alpha(\gamma; \beta; 2b; \mathcal{D}), \quad C^{2b-r_i+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D}) \subset C^{2b-r_i+\alpha}(\gamma; \beta; r_i; \mathcal{D}),$$

то для функцій $f \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D})$ і $f_i \in C^{2b-r_i+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D})$ виконуються нерівності

$$\|f_0; \gamma; \beta; 2b; \mathcal{D}\|_\alpha \le C \|f_0; \gamma; \beta; 0; D\|_\alpha,$$

$$\|f_i; \gamma; \beta; r_i; \mathcal{D}\|_{2b-r_i+\alpha} \le C \|f_i; \gamma; \beta; 0; \mathcal{D}\|_{2b-r_i+\alpha} \qquad i \in \{1, \ldots, b\}.$$

Із нерівності (3) для розв'язку задачі (1), (2) випливає оцінка

$$\|u; \gamma; \beta; 0; \mathcal{D}\|_{2b+\alpha} \le C\left( \|f_0; \gamma; \beta; 0; \mathcal{D}\|_\alpha + \sum_{i=1}^{b} \|f_i; \gamma; \beta; 0; \mathcal{D}\|_{2b-r_i+\alpha} \right). \quad (31)$$

Будемо розглядати $u(x)$ при фіксованих $x$ як лінійний неперервний функціонал $F(f_0, f_1, \ldots, f_b)$ на нормованому просторі $C_\alpha = C^\alpha(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D}) \times \times C^{2b-r_1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D}) \times \ldots \times C^{2b-r_b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \mathcal{D})$ з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (31). Беручи до уваги включення $C_\alpha \subset C(\mathcal{D})$, на підставі теореми Рісса можемо вважати, що $u(x)$ породжує борелівську міру $Z(x, G)$, яка визначена на $\sigma$-алгебрі підмножин $G$ області $\bar{\mathcal{D}}$, включаючи $\mathcal{D}$ і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціонала визначається формулою (4). Теорему 1 доведено. ♦

***Зауваження 1.*** Теорема 1 правильна при $\lambda = 0$, якщо область $\mathcal{D}$ є достатньо малою за діаметром.


1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. − Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. − 208 с.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. − Москва: Наука, 1981. − 448 с.
3. *Зейтц Ф.* Современная теория твердого тела. − Москва−Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1949. − 736 с.
4. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. − Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010. − 248 с.
5. *Пукальський І. Д.* Еліптичні крайові задачі із особливостями // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математика. − 2012. − **2**, № 1. − С. 90−97.

6. *Пукальський І. Д.* Задача Діріхле для сингулярних еліптичних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 2. –С. 42–48.
7. *Пукальський І. Д.* Задача Коші для нерівномірно параболічних рівнянь з виродженням // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 11. – С. 1520–1529.
   Те саме: *Pukal's'kyi I. D.* Cauchy problem for nonuniformly parabolic equations with degeneracy // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 11. – P. 1828–1840. – https://doi.org/10.1023/B:UKMA.0000027045.65544.d0.
8. *Пукальський І. Д.* Крайова задача з нерівностями для еліптичних рівнянь з виродженням // Буков. мат. журн. – 2013. – **1**, № 3-4. – С. 125–130.
9. *Пукальський І. Д.* Одностороння крайова задача для сингулярних еліптичних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2004. – Вып. 14.– С. 152–160.
10. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Об общих эллиптических задачах с сильным вырождением // Докл. АН СССР. – 1980. – **254**, № 6. – С. 1336–1342.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 427 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv+347 p.

**BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NON-UNIFORMLY ELLIPTIC EQUATIONS WITH POWER SINGULARITIES**

*Using a priori estimates and the Riesz theorem, a boundary value problem for non-uniformly* $2b$ *-elliptic equations with arbitrary singularities on a certain set of points in the equation coefficients and boundary conditions is studied. The existence and integral representation of a unique solution of the formulated boundary value problem in Hölder spaces with a power weight, the order of which is determined via the magnitudes of the orders of singularities in the coefficients of the equation and boundary conditions is established.*

***Key words*****:** *boundary value problem, power singularities, interpolation inequalities, Hölder spaces, Arzelà's theorem, Riesz's theorem, Borel measure.*

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
15.08.21