УДК 536.12: 620.198

В. А. Шевчук[✉]

МЕТОДОЛОГІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТІЛ ІЗ ТОНКИМИ БАГАТОШАРОВИМИ ПОКРИТТЯМИ

Представлено методологію ефективного розрахунку та дослідження термонапруженого стану тіл із тонкими багатошаровими покриттями, яка ґрунтується на моделюванні таких покрить оболонками з відповідними геометричними, теплофізичними та термомеханічними властивостями покриття. При такому підході вплив покрить на термопружний стан усієї системи тіло – покриття описується спеціальними узагальненими граничними умовами. Ефективність підходу показано на тестових задачах. Наведено приклади розв'язаних нових некласичних лінійних і нелінійних крайових задач термопружності для тіл із багатошаровими тонкими покриттями при тепловому навантаженні.

***Ключові слова**: теплопровідність, термопружність, тонкі покриття, багатошарові покриття, керамічні покриття, узагальнені граничні умови, променево-конвективний теплообмін..*

Вступ. Для захисту елементів конструкцій від агресивного впливу середовища (такого як корозійний, абразивний, тепловий, механічний та ін.) використовують спеціальні покриття. Такі покриття можуть мати неоднорідні властивості (що зумовлено умовами їх виготовлення або функціональними вимогами) – зокрема, багатошарові покриття.

Визначення термомеханічного стану тіл із нанесеними покриттями пов'язано з формулюванням і розв'язуванням відповідних задач для неоднорідних тіл. Точні розв'язки таких задач є громіздкими та неефективними для практичних цілей і звичайно використовуються як еталонні при розробці наближених методів. Тому важливо створювати наближені підходи, достатньо точні для практичних потреб.

Суттєве спрощення розв'язування задач про визначення теплового поля і напруженого стану конструкцій з тонкими покриттями досягається, якщо врахувати їхню специфічну особливість – *малість товщини покриття порівняно з товщиною підкладки* – і моделювати захисні покриття тонкостінними оболонками з відповідними геометричними і механічними властивостями покриття. Такий підхід дає змогу зводити розв'язування крайової задачі математичної фізики для неоднорідного тіла до відповідної задачі для однорідного тіла, але з узагальненою границею, уздовж якої параметри вже однорідного тіла повинні задовольняти деякі ускладнені граничні умови, які відображають вплив тонких покрить на термомеханічні процеси в тілі.

Ці узагальнені граничні умови (УГУ) на термомеханічні параметри дозволяють (на основі рівнянь дифузійного типу і рівнянь рівноваги) формулювати і розв'язувати некласичні крайові задачі термопружності для визначення термомеханічного стану тіл із тонкими покриттями в умовах нестаціонарних теплових і механічних навантажень. Вони можуть використовуватися як для аналітичного розв'язування, так і для числового.

На відміну від класичних, ці граничні умови, додатково до значень параметрів, їхніх нормальних похідних і стрибків цих величин при переході через покриття, можуть містити похідні за часом вздовж покриття, і тому дають змогу враховувати дивергенцію теплових потоків уздовж покриття у співвідношеннях балансового типу.

Для виведення УГУ можна застосувати різні методи та підходи:

i) операторний метод, який дозволяє не приймати жодних попередніх

✉ shevchuk@iapmm.lviv.ua

гіпотез щодо поперечного розподілу шуканих функцій у покритті [6, 7, 12, 13, 16–23, 31, 44, 45, 51, 56, 62, 63, 69];

ii) підхід, у якому використовуються апріорні припущення про поперечний розподіл шуканих функцій у покритті, який звичайно приймається постійним [1, 4, 46] або лінійним [8, 10, 14];

iii) дискретний підхід, заснований на відповідних різницевих апроксимаціях похідних по нормалі шуканих функцій у покритті [24, 54, 70];

iv) асимптотичний підхід, що базується на методі малого параметра [11, 47, 57, 59].

Зрозуміло, що кожний з цих підходів має свої переваги та недоліки. Зокрема, традиційний операторний метод доцільно застосовувати для плоских або дуже тонких неплоских покрить, оскільки його точність обмежується точністю використовуваних рівнянь теплопровідності [27, 63].

У цій роботі для виведення УГУ променево-конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття представлено підхід, який ґрунтується на використанні точного рівняння теплопровідності в покритті, розвиненні функції температури вздовж товщини покриття у степеневий ряд і застосуванні методу матриць переносу. Для побудови УГУ механічного спряження з урахуванням теплових деформацій використано рівняння теорії термопружності тонких оболонок для випадку багатошарових покрить. Подано формули відновлення для розподілу температури та напружень за товщиною покриття. Наведено огляд застосування підходу до розв'язання нових некласичних задач теплопровідності та термопружності для тіл із багатошаровими покриттями.

1. Визначення теплового стану в тілах із тонкими багатошаровими покриттями. Досліджуваним об'єктом є тіло з багатошаровим покриттям товщини $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$, шари якого виготовлені з різних ізотропних матеріалів. Таке n-шарове покриття розглядаємо як тонку оболонку, віднесену до триортогональної змішаної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, які є, відповідно, лініями головних кривин поверхні поділу тіло – покриття і нормаллю до неї (рис. 1).

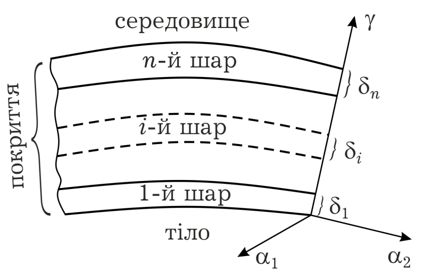

Рис. 1

У випадку дуже тонких неплоских і плоских покрить загальне рівняння тривимірної теорії теплопровідності може бути записано у наближеному вигляді [20, 56]

$$\Delta_i t_i + 2k_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 t_i}{\partial \gamma^2} = \frac{1}{a_i}\frac{\partial t_i}{\partial \tau}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

де

$$\Delta_i = \frac{1}{A_{1i}A_{2i}}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\right)\right]. \tag{2}$$

Тут t_i – температура i-го шару покриття; τ – час; $k_i = (k_{1i} + k_{2i})/2$; A_{1i}, A_{2i} – коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні поділу i-го та

($i-1$)-го шарів ($i=2,\dots,n$) та поверхні поділу тіло − покриття ($i=1$); k_{1i}, k_{2i} − головні кривини координатних ліній, a_i − коефіцієнти температуропровідності i-го шару.

На основі використання наближеного рівняння теплопровідності (1) за допомогою операторного методу [18, 20, 56] отримано наближені УГУ для одношарового [6, 12, 13, 19, 21−23, 45] і багатошарового [7, 16, 31, 44, 51, 62] покрить із точністю до доданків, які включають лише лінійні члени за товщиною покриття.

У випадку неплоских покрить довільної товщини, коли наближене рівняння теплопровідності (1) є недостатньо точним, необхідно користуватись точним рівнянням теплопровідності для i-го шару [27, 36]

$$\frac{1}{A_{1i}A_{2i}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}}\frac{1+k_{2i}(\gamma-\gamma_{i-1})}{1+k_{1i}(\gamma-\gamma_{i-1})}\frac{\partial t_i}{\partial\alpha_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}}\frac{1+k_{1i}(\gamma-\gamma_{i-1})}{1+k_{2i}(\gamma-\gamma_{i-1})}\frac{\partial t_i}{\partial\alpha_2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\left(1+k_{1i}(\gamma-\gamma_{i-1})\right)\left(1+k_{2i}(\gamma-\gamma_{i-1})\right)\frac{\partial t_i}{\partial\gamma}\right]=$$
$$=\frac{\left(1+k_{1i}(\gamma-\gamma_{i-1})\right)\left(1+k_{2i}(\gamma-\gamma_{i-1})\right)}{a_i}\frac{\partial t_i}{\partial\tau}, \qquad (3)$$

де $\gamma_0=0$ при $i=1$ та $\gamma_{i-1}=\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j$ при $i=2,\dots,n$.

З іншого боку, для вирішення проблеми побудови УГУ для багатошарового покриття виникає необхідність подання граничних значень температури та її похідної на межі покриття − зовнішнє середовище через відповідні граничні значення температури та її похідної на межі поділу тіло − покриття. Ефективним інструментом побудови таких співвідношень є метод матриць переносу (метод трансляційних матриць, transfer matrix method), який використовується у випадках, коли загальна система може бути розбита на послідовність підсистем, які взаємодіють тільки з сусідніми підсистемами. Зокрема, цей метод застосовується в теорії пружності [3, 48, 52, 72], термопружності [49, 71] та теплопровідності [15, 55, 58] шаруватих структур.

Згідно із підходом за методом матриць переносу за допомогою використання розвинення температури у степеневий ряд у кожному окремому шарі покриття, задовольнивши рівняння теплопровідності, умови теплового спряження на поверхнях поділу сусідніх шарів і граничну умову променево-конвективного теплообміну на зовнішній поверхні покриття, отримаємо [36] на поверхні поділу основа − покриття співвідношення, яке пов'язує граничні значення температури $t_{\mathbf{I}}$ та її похідної $\partial t_{\mathbf{I}}/\partial\gamma$ у тілі зі значенням температури $t_{\mathbf{II}}$ в середовищі і яке трактуємо як *узагальнену граничну умову* для визначення температури в тілі, яка враховує вплив багатошарового покриття на перебіг теплоперенесення в тілі. Одержаний вираз слугує загальним вихідним співвідношенням для виведення розрахункових варіантів УГУ з різною точністю. Для тонких покрить цю точну умову променево-конвективного теплообміну підкладки із середовищем можна спростити, розкладаючи в ряд за степенями малих товщин шарів δ_i відповідні доданки та нехтуючи членами вищого порядку малості. Таким чином можемо отримати розрахункові варіанти УГУ з різною точністю [36]. Зокрема, використовується такий варіант:

$$\tilde{\Delta} t_{\mathbf{I}} - \lambda_{\mathbf{I}} (1 - 2K + \mu H^{-1}) \frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial \gamma} + \mu (t_{\mathbf{II}} - t_{\mathbf{I}}) +$$

$$+ \sigma_0 \varepsilon \left[t_{\mathbf{II}}^4 - \sum_{j=0}^{4} C_4^j (\lambda_{\mathbf{I}} H^{-1})^j t_{\mathbf{I}}^{4-j} \left(\frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial \gamma} \right)^j \right] = \Omega \frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial \tau},$$

$$t_{\mathbf{I}} \big|_{\tau=0} = \tilde{t}_0 , \tag{4}$$

де $\tilde{\Delta} = \Lambda \Delta$, $\Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right]$. Тут середні кривини і коефіцієнти першої квадратичної форми поверхонь поділу шарів наближено прийнято рівними відповідним величинам поверхні поділу тіло – покриття ($k_i = k^*$, $A_{1i} = A_1$, $A_{2i} = A_2$, $i = 1, \ldots, n$); $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i$, $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \delta_i$, $\frac{1}{H} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$, $K = k^* \delta$ – зведені теплопровідність, теплоємність, термічний опір і кривина всього покриття; λ_i, ω_i – коефіцієнти теплопровідності та теплоємність i-го шару; μ – коефіцієнт теплообміну між поверхнею покриття і навколишнім середовищем; σ_0 – стала Стефана – Больцмана; ε – ступінь чорноти поверхні покриття; $C_4^j = \frac{4!}{j!(4-j)!}$ – біноміальні коефіцієнти; $\tilde{t}_0 = \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_{i0}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) \, d\gamma \right)$ – усереднене значення початкової температури за товщиною багатошарового покриття; t_{i0} – початковий розподіл температури в i-му шарі; $\gamma_n = \delta$.

Індексами i, **I** та **II** позначено величини, що відносяться до i-го шару покриття, тіла та середовища відповідно.

Виведено формули відновлення для розподілу температури за товщиною покриття через граничні значення температури та її похідної у тілі. Зокрема, при обмеженні лінійними членами у розкладі за товщинами шарів покриття вони мають найпростіший вигляд [36, 63, 64]:

$$t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = t_{\mathbf{I}} \big|_{\gamma=0} + \lambda_{\mathbf{I}} \left(\frac{1}{H_{i-1}} + \frac{\gamma - \gamma_{i-1}}{\lambda_i} \right) \frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial \gamma} \bigg|_{\gamma=0},$$

$$\gamma_{i-1} \le \gamma \le \gamma_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

де $\frac{1}{H_i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{\delta_j}{\lambda_j}$, $\frac{1}{H_0} = 0$.

Отже, визначення теплового стану в тілах із багатошаровими покриттями реалізується у два етапи:

1) розв'язування некласичної крайової задачі теплопровідності в тілі з УГУ;

2) знаходження температурного поля в покритті за формулами відновлення.

2. Визначення термонапруженого стану в тілах з тонкими багатошаровими покриттями. УГУ механічного спряження тіла із середовищем через тонке покриття для випадків ізотропного та трансверсально-ізотропного покрить з урахуванням температурних деформацій виведено з використанням теорії термопружності тонких оболонок [5, 9, 20, 56].

Для ізотропного покриття сукупність рівнянь механічної рівноваги оболонки покриття, геометричних співвідношень між деформаціями і переміщеннями, конститутивних співвідношень, умов ідеального механічного контакту між тілом і покриттям, умови на межі покриття – середовище замінено УГУ механічного спряження з урахуванням температурних деформацій у покритті [33, 63]:

$$\sigma_{j3}^{\mathbf{I}} - C_2 \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{33}^{\mathbf{I}}}{\partial \alpha_j} + \mathbf{L}_j [u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} =$$

$$= \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} + C_1 \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{33}^{\mathbf{II}}}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_j} \frac{\partial N_t}{\partial \alpha_j}, \qquad j = 1, 2,$$

$$(1 - D_2 \Delta) \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \mathbf{L}_3 [u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} =$$

$$= (1 + D_1 \Delta) \sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \delta \, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + (k_{11} + k_{21}) N_t - \Delta M_t, \qquad (6)$$

які пов'язують компоненти тензора напружень $\sigma_{pq}^{\mathbf{I}}$ і компоненти вектора переміщень $u_{\mathbf{I}}$, $v_{\mathbf{I}}$, $w_{\mathbf{I}}$ точок тіла на поверхні контакту з покриттям із заданим поверхневим навантаженням $\sigma_{pq}^{\mathbf{II}}$ на межі покриття – середовище.

Тут

$$\mathbf{L}_m = -\mathbf{F}_m \mathbf{K} \mathbf{\Pi}, \qquad m = 1, 2, 3,$$

$\mathbf{F}_m$ – певні диференціальні оператори, $\mathbf{K}$ – жорсткісна матриця пружних констант у співвідношеннях зв'язку зусиль і моментів з компонентами деформації базисної поверхні оболонки, $\mathbf{\Pi}$ – матриця диференціальних операторів [63] у геометричних співвідношеннях між компонентами деформації та переміщеннями цієї поверхні; C_j, D_j – певні величини, що визначаються властивостями покриття [32]; $N_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i$, $M_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i^*$, $T_i = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} (t_i - t_{i0}) \, d\gamma$, $T_i^* = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} (t_i - t_{i0}) \gamma \, d\gamma$; E_i, ν_i, β_i – модуль Юнґа, коефіцієнт Пуассона та коефіцієнт лінійного температурного розширення (КЛТР) i-го шару покриття ($i = 1, \ldots, n$) відповідно; символ «$\top$» позначає операцію транспонування; $\mathrm{V}[\phi_1, \phi_2] = \frac{1}{A_1} \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial A_2 \phi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \phi_2}{\partial \alpha_2} \right)$.

Для часткового випадку напружено-деформованого стану, при якому відсутні згинні деформації і кручення поверхні поділу тіло – покриття, можна отримати спрощений варіант УГУ, у якому наявні лише компоненти тензора напружень [33, 63]:

$$\sigma_{j3}^{\mathbf{I}} + \mathbf{p}_j [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^{\top} - C_2 \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{33}^{\mathbf{I}}}{\partial \alpha_j} - \beta_{\mathbf{I}} \frac{1}{A_j} (G_{11} + G_{12}) \frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial \alpha_j} =$$

$$= \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} + C_1 \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{33}^{\mathbf{II}}}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_j} \frac{\partial N_t}{\partial \alpha_j}, \qquad j = 1, 2,$$

$$(1 - D_2 \Delta) \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \mathbf{p}_3 [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^{\top} +$$

$$+ (G_{11} + G_{12})(k_{11} + k_{21}) \beta_{\mathbf{I}} t_{\mathbf{I}} - (G_{21} + G_{22}) \beta_{\mathbf{I}} \Delta t_{\mathbf{I}} =$$

$$= (1 + D_1 \Delta) \sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \delta \, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + (k_{11} + k_{21}) N_t, \qquad (7)$$

де $\mathbf{p}_m = -\mathbf{F}_m \mathbf{K}\mathbf{\Pi}_\sigma$, $m = 1,2,3$, $\mathbf{\Pi}_\sigma$ – матриця пружних сталих тіла; $\beta_{\mathbf{I}}$ – КЛТР тіла; $G_{j\ell}$ – коефіцієнти жорсткості покриття.

Для анізотропних покрить при виведенні УГУ механічного спряження тіла з середовищем через тонке покриття використано гіпотезу Кірхгофа – Лява. Однак через відмінність між модулями Юнґа трансверсально-ізотропного покриття беремо до уваги поперечну деформацію ε_3^i кожного шару оболонки як додатковий ступінь свободи [5]. Порівняно з випадком ізотропного покриття, додатково враховуються нормальне поперечне зусилля N_3 і моменти першого порядку напружень поперечного зсуву M_{j3}, що виникають у покритті. Остаточно, УГУ в цьому випадку мають вигляд [67, 68]:

$$\sigma_{j3}^{\mathbf{I}} + \frac{\delta}{2} d_j \sigma_{33}^{\mathbf{I}} - \frac{\delta^2}{12} d_j \, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] + \bar{\mathbf{L}}_j [u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^\top =$$

$$= \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} - \frac{\delta}{2} d_j \sigma_{33}^{\mathbf{II}} - \frac{\delta^2}{12} d_j \, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + f_{jt}, \qquad j = 1,2,$$

$$(1 + \frac{\delta}{2} d_3) \sigma_{33}^{\mathbf{I}} - \frac{\delta^2}{12} d_3 \, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] + \bar{\mathbf{L}}_3 [u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^\top =$$

$$= (1 - \frac{\delta}{2} d_3) \sigma_{33}^{\mathbf{II}} - \frac{\delta^2}{12} d_3 \, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + f_{3t}, \qquad (8)$$

де $\bar{\mathbf{L}}_m$, d_m, $m = 1,2,3$, – певні оператори і величини; f_{mt} – величини, які залежать від властивостей покриття і враховують температурну деформацію.

Аналогічно отримано УГУ у випадку відсутності згинних деформацій і кручення поверхні поділу тіло – покриття [67, 68].

Після визначення напружено-деформованого стану тіла на основі рівнянь тривимірної теорії термопружності з використанням одного з варіантів УГУ можна знайти напружений стан у покритті за допомогою формул відновлення через граничні значення компонентів тензора напружень і вектора переміщень (у випадку відсутності згинних деформацій і кручення поверхні поділу тіло – покриття – тільки напружень) [33, 63].

Зокрема, для випадку ізотропного багатошарового покриття напруження визначаються за формулами

$$\sigma_{33}^i(\gamma) = \frac{\sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \sigma_{33}^{\mathbf{I}}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\delta}\right)\left(3 - \left(1 - \frac{2\gamma}{\delta}\right)^2\right)\frac{\sigma_{33}^{\mathbf{II}} - \sigma_{33}^{\mathbf{I}}}{2}, \qquad (9)$$

$$\sigma_{mm}^i(\gamma) = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2}\left(\varepsilon_m + \nu_i \varepsilon_{3-m} + (\varkappa_m + \nu_i \varkappa_{3-m})\gamma\right) + \frac{\nu_i}{1 - \nu_i}\sigma_{33}^i(\gamma) -$$

$$- \frac{E_i}{1 - \nu_i}\beta_i\big(t_i(\gamma) - t_{i0}(\gamma)\big), \qquad m = 1,2, \qquad (10)$$

$$\sigma_{12}^i(\gamma) = \frac{2E_i}{1 + \nu_i}(\varepsilon_{12} + \varkappa_{12}\gamma), \qquad \gamma_{i-1} \le \gamma \le \gamma_i, \quad i = 1,\ldots,n, \qquad (11)$$

де компоненти деформації відлікової поверхні поділу тіло – покриття пов'язані з переміщеннями цієї поверхні співвідношеннями

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}]^\top = \mathbf{\Pi}[u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^\top, \qquad \gamma = 0. \qquad (12)$$

Таким чином, визначення термонапруженого стану системи тіло – покриття складається з двох етапів:

1°) розв'язування некласичної крайової задачі термопружності для тіла з використанням УГУ;

2°) знаходження температурних напружень у покритті за формулами відновлення.

3. Верифікація підходу. Запропонований підхід, який ґрунтується на застосуванні УГУ, був верифікований порівнянням наближених і точних розв'язків деяких тестових задач, включно з задачами теплопровідності для пластини [62] і циліндра [64] з тришаровим покриттям, задачі Ляме навантаження суцільного циліндра з n-шаровим кусково-однорідним [32] і кусково-неоднорідним [40] покриттями, статичну задачу термопружності суцільного циліндра з n-шаровим покриттям [33].

На прикладі тестової задачі про конвективний нагрів циліндра з одношаровим покриттям [36] проаналізовано випадки, коли в розрахункових варіантах УГУ слід враховувати додаткові члени вищого порядку.

4. Застосування підходу. На основі розвинутої методології розв'язування задач термопружності тіл із тонкими покриттями, що ґрунтується на моделюванні впливу таких покрить УГУ, сформульовано відповідні некласичні лінійні та нелінійні крайові задачі та одержано розв'язки низки нових задач термопружності для тіл із багатошаровими тонкими покриттями при тепловому навантаженні.

Зокрема, отримано аналітичні розв'язки нестаціонарних задач теплопровідності та відповідних задач термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям для випадків:

- сталого початкового розподілу температури [25, 28];
- неоднорідної початкової умови за сталої температури зовнішнього середовища [41];
- експоненціального початкового розподілу температури [41];
- циклічного нагріву з кусково-однорідною зміною температури зовнішнього середовища з однорідною початковою умовою [37, 43].

Для пластини з двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестаціонарного конвективного нагріву при довільних температурах зовнішніх середовищ із застосуванням УГУ, методу інтегрального перетворення Лапласа та інтегральних співвідношень Дюгамеля отримано аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності [34] і термопружності [35]. Записано вирази розв'язків задачі для випадків лінійної, експоненціальної, логарифмічної та періодичної функцій температур зовнішніх середовищ. Детально розглянуто задачу термопружності про симетричний нагрів пластини з ідентичними тришаровими покриттями для випадку експоненціального закону зміни температури зовнішнього середовища.

У праці [26] на основі аналітичного розв'язку статичної задачі пружності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям, отриманого із застосуванням УГУ, проаналізовано вплив геометричних і фізико-механічних характеристик покриття і підкладки, а також умов закріплення торців циліндра на залишковий напружений стан системи тіло – багатошарове покриття. Встановлено умови, за яких можуть виникати небезпечні радіальні, колові та осьові напруження.

За допомогою інтегрального перетворення Лапласа побудовано аналітичний розв'язок задачі теплопровідності для циліндра з багатошаровим покриттям за конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем [30]. Записано розрахункові формули для визначення температури в підкладці та в довільному шарі покриття. Знайдено асимптотики розв'язку для великих і малих значень часу.

Для розв'язування задачі термопружності для суцільного циліндра радіуса R з ізотропним n-шаровим покриттям застосовано УГУ термомеханічного спряження підкладки з середовищем через тонке покриття [29]:

$$\left(1-\frac{\nu_{\mathbf{I}}(G_{11}+G_{12})}{RE_{\mathbf{I}}}\right)\sigma_{rr}^{\mathbf{I}}\Big|_{r=R}+\frac{G_{11}-\nu_{\mathbf{I}}G_{12}}{RE_{\mathbf{I}}}\sigma_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}}\Big|_{r=R}+$$

$$+\frac{G_{12}-\nu_{\mathbf{I}}G_{11}}{RE_{\mathbf{I}}}\sigma_{zz}^{\mathbf{I}}\Big|_{r=R}=$$

$$=\frac{N_t-(G_{11}+G_{12})\beta_{\mathbf{I}}\left(t_{\mathbf{I}}\big|_{r=R}-t_{\mathbf{I}}\big|_{r=R,\tau=0}\right)}{R}, \tag{13}$$

де $E_{\mathbf{I}}$, $\nu_{\mathbf{I}}$ – модуль Юнґа та коефіцієнт Пуассона тіла, а коефіцієнти жорсткості покриття $\{G_{11}, G_{12}\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \delta_i}{1-\nu_i^2}\{1, \nu_i\}$.

Із використанням цієї умови отримано аналітичний розв'язок задачі термопружності для циліндра з багатошаровим покриттям. Досліджено вплив геометричних і термомеханічних характеристик покриття, умов закріплення торців циліндричної підкладки та умов теплообміну із зовнішнім середовищем на термопружний стан системи тіло – багатошарове покриття за конвективного нагрівання. Для випадку покрить малої жорсткості одержано наближені формули, які є зручними для якісного оцінювання усталених напружень у системі.

На основі проведених досліджень термомеханічних процесів у тілах із тонкими шаруватими покриттями встановлено, що визначальними параметрами впливу на розподіл температури та напружень у тілі є ефективні теплофізичні характеристики покриття – зведені термоопір і теплоємність, а також інтенсивність тепловіддачі з поверхні покриття, швидкість зміни температури зовнішнього середовища, а у випадку термоциклічного навантаження – зміни тривалості циклу та моментів перемикання періодів у межах одного циклу. Виявлено, що знак усталених напружень у шарах покриття при тепловому навантаженні визначається різницею коефіцієнтів лінійного температурного розширення підкладки та шарів, а їхні абсолютні значення для покрить малої жорсткості істотно перевищують відповідні напруження у підкладці.

Нелінійну нестаціонарну задачу теплопровідності та відповідну задачу термопружності для півпростору з тонким багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну розглянуто в працях [39, 42]. На основі методу квазілінеаризації [2, 50] з використанням інтегрального перетворення Лапласа побудовано ітераційну схему розв'язання поставленої нелінійної задачі теплопровідності з аналітичним визначенням розв'язку лінеаризованої задачі для кожної ітерації. На прикладі задачі про радіаційне випромінення півпростору в середовище нульової температури за відсутності покриття у [38] проведено порівняльний аналіз результатів розрахунків нестаціонарного температурного поля у півпросторі з використанням методів Пікара, зведення вихідної задачі до нелінійного інтегрального рівняння типу Вольтерра, послідовних наближень і квазілінеаризації. На підставі проведеного аналізу ефективності застосування цих підходів щодо розв'язування такого класу задач показано кращу збіжність підходу на основі методу квазілінеаризації.

Для системи півпростір – двошарове зносостійке покриття досліджено вплив параметрів променево-конвективного теплообміну на нестаціонарне температурне поле [42] і зумовлений ним термонапружений стан [39]. Виявлено область зміни коефіцієнта теплообміну, в якій вплив променевої складової на термонапружений стан системи є неістотним.

У працях [66–68] розвинуто ефективний напіваналітичний підхід для дослідження процесу накопичення пошкоджень у крихких покриттях під впливом теплових навантажень. Підхід ґрунтується на загальній обчислювальній схемі для визначення параметрів процесу накопичення пошкоджуваності, що включає аналітичний розв'язок відповідної проміжної крайової задачі термопружності. Для тонких багатошарових покрить спрощення в аналізі досягнуто застосуванням математичної моделі з УГУ термомеханічного спряження підкладки із середовищем через покриття. Підхід апробовано на прикладі нагрівання керамічного покриття на підкладці з титанового сплаву.

Розглянуто задачу термопружності для суцільного циліндра радіуса R і керамічним n-шаровим покриттям за рівномірного нагріву. Торці циліндра зафіксовано в осьовому напрямку, і всі напруження на межі покриття – середовище відсутні. Оскільки керамічні покриття виявляють суттєву трансверсальну анізотропію, то використано варіант УГУ для трансверсально-ізотропних покрить, який у цьому випадку осьової симетрії задачі з урахуванням температурної залежності КЛТР має такий вигляд при $r = R$ [67]:

$$(1 + \overline{p}_{33})\sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \overline{p}_{31}\sigma_{11}^{\mathbf{I}} + \overline{p}_{32}\sigma_{22}^{\mathbf{I}} + \overline{p}_{3t}\Phi(t_{\mathbf{I}}) = f_{3t}\,, \tag{14}$$

де коефіцієнти $\overline{p}_{3j}$, $j = 1, 2, 3, t$, визначаються через геометричні та механічні параметри шарів покриття і тіла, а $\Phi(t_{\mathbf{I}}) = \int\limits_{t_0}^{t} \beta_{\mathbf{I}}(t')\,dt'$ – теплова деформація підкладки (t_0 – початкова температура).

Отриманий аналітичний розв'язок проміжної граничної задачі термопружності для циліндра з УГУ (14) використано в ітераційній процедурі загальної обчислювальної схеми визначення параметрів еволюції пошкоджень при тепловому навантаженні. Проведене числове дослідження [67] дало змогу виявити специфічні особливості процесу еволюції пошкоджень, які визначаються неоднорідністю властивостей шаруватого тонкого покриття.

У праці [65] розглянуто нестаціонарну задачу термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям, що містить під покриттям тріщину, перпендикулярну до поверхні поділу. Розв'язок задачі отримано на основі принципу суперпозиції і незв'язаної термопружності. На основі нестаціонарних розподілів температури [25] і відповідних теплових напружень [28] для системи без тріщини, отриманих у замкнутій аналітичній формі за допомогою моделі теплообміну півпростору з навколишнім середовищем через покриття з УГУ (4), сформульовано задачу з тріщиною як збурену змішану крайову задачу, в якій навантаження на поверхню тріщини є рівним за величиною і протилежним за знаком термічним напруженням, які було отримано для задачі без тріщини, і зведено до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв'язано чисельно.

Розроблений підхід був верифікований у [65] шляхом розв'язування декількох тестових задач, для яких було досягнуто добре узгодження з відомими розв'язками задач: про охолодження півпростору з тріщиною без покриття [61], з одношаровим покриттям [60], із двошаровим покриттям [53].

На основі проведених числових розрахунків для випадку тріщини під покриттям у підкладці з нержавіючої сталі 316L з двошаровим зносостійким покриттям WC-Co / Cr-Ni і під час процесу конвективного охолодження оцінено вплив різних геометричних і термомеханічних параметрів системи на термонапруження і коефіцієнти інтенсивності термічних напружень [65].

Заключні зауваження. Узагальнені граничні умови використовуються для розвитку методології розв'язування задач термопружності для тіл із тонкими покриттями.

Ця методологія має такі переваги:

• дає змогу суттєво спростити обчислення і зменшити затрати обчислювального часу;

• уможливлює отримання відносно простих аналітичних розв'язків практично важливих задач, які надають апріорну оцінку термонапруженого стану без громіздких обчислень;

• підвищує ефективність визначення термомеханічних полів зі зменшенням товщини покриття порівняно з прямими методами, застосування яких у цьому випадку є ускладненим.

Прикладна цінність отриманих наукових результатів визначається можливістю використання розробленої методології дослідження задач термопружності тіл із покриттями для виявлення якісних і кількісних особливостей впливу їхніх геометричних, фізико-механічних та теплофізичних характеристик на міцність і деформативність елементів конструкцій із багатошаровими покриттями. Отримані наближені розв'язки можуть бути застосовані при тестуванні результатів розрахунків, одержаних за допомогою інших методів.

1. *Аттетков А. В., Беляков Н. С.* Температурное поле неограниченного твердого тела, содержащего цилиндрический канал с термически тонким покрытием его поверхности // Теплофизика высоких температур. – 2006. – **44**, № 1. – С. 136–140.
   Те саме: *Attetkov A. V., Belyakov N. S.* The temperature field of an infinite solid containing a cylindrical channel with a thermally thin surface coating // High Temp. – 2006. – **44**, No. 1. – P. 139–143.
   – https://doi.org/10.1007/s10740-006-0016-0.
2. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – Москва: Мир, 1968. – 183 с.
3. *Беляев Ю. Н.* Методы вычислений матриц переноса упругих деформаций // Вестн. Пермск. нац. исслед. политехн. ун-та. Сер. Механика. – 2013. – № 3. – С. 63–109.
4. *Березовский А. А., Шувар Р. А.* Плоское нестационарное температурное поле кругового цилиндра с термически тонким покрытием // Задачи нестационарной теплопроводности. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 97–104.
5. *Василенко А. Т.* Основные соотношения некоторых вариантов уточненных моделей оболочек // *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Емельянов И. Г. и др.* Статика элементов конструкций. – Киев: «А.С.К», 1999. – 379 с. – Механика композитов: В 12 т / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 8. – С. 78–91.
6. *Гаврись А. П., Шевчук П. Р.* Математическое моделирование процессов при высокотемпературном напылении покрытий // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып. 33. – С. 13–18.
   Те саме: *Gavris' A. P., Shevchuk P. R.* Mathematical modeling of the processes occurring during high-temperature spray coating // J. Sov. Math. – 1993. – **65**, No. 5. – P. 1818–1822. – https://doi.org/10.1007/BF01097295.
7. *Гембара Н., Лучко Й.* Моделювання теплопровідності оболонок з двостороннім багатошаровим покриттям // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2013. – **69**, № 1. – С. 222–230.
8. *Горбунов А. Д.* Аналитический расчёт нагрева (охлаждения) простых тел, покрытых тонкой оболочкой // Металлург. теплотехника. – 2010. – Вып. 2 (17). – С. 56–62.
9. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 4.
10. *Жорник А. И., Киричек В. А.* Приближённое решение задачи теплопроводности для сплошного цилиндра с тонким покрытием // Научная дискуссия: вопросы технических наук. – 2015. – № 9-10 (28). – С. 21–29.
11. *Захаров Д. Д.* Эффективные аппроксимации высокого порядка для слоистых покрытий и прослоек из анизотропных упругих, вязкоупругих и нематических материалов // Прикл. математика и механика. – 2010. – **74**, № 3. – С. 403–418.
    Те саме: *Zakharov D. D.* Effective high-order approximations of layered coatings and linings of anisotropic elastic, viscoelastic and nematic materials // J. Appl. Math. Mech. – 2010. – **74**, No. 3. – P. 286–296.

– https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.07.004.
12. *Иващук Д. В.* Исследование теплодиффузионных процессов и напряженного состояния в телах с покрытиями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1978. – 16 с.
13. *Коляно Ю. М., Хомякевич М. Е.* Обобщенная теплопроводность в телах с покрытиями, учитывающая кривизну покрытия // Инж.-физ. журн. – 1993. – **65**, № 6. – С. 745–749.
   Те саме: *Kolyano Yu. M., Khomyakevich M. E.* Generalized heat conduction in coated bodies that accounts for the coating curvature // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1993. – **65**, No. 6. – P. 1251–1256.
   – https://doi.org/10.1007/BF00861951.
14. *Комаров Г. М.* Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності // Доп. НАН України. – 1996. – № 7. – С. 26–32.
15. *Лерман Л. Б.* Слоисто-неоднородные объекты с поверхностями раздела. Применение трансляционных матриц в некоторых прикладных задачах // Хімія, фізика та технологія поверхні. – 2016. – **7**, № 3. – С. 255–284.
   – https://doi.org/10.15407/hftp07.03.255.
16. *Лучко Й. Й.* Розрахунок теплопровідності бетонних плит з багатошаровими покриттями // Наук. вісн. Мукачівськ. технолог. ін.-ту. – 2006. – Вип. 2. – С. 40–46.
17. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
18. *Подстригач Я. С.* О применении операторного метода к выводу основных соотношений теории теплопроводности тонкостенных элементов и составных конструкций // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1965. – Вып. 5. – С. 24–35.
19. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М.* Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. – Киев: Наук. думка, 1981. – 342 с.
20. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
21. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах // Физ.-хим. механика материалов. – 1967. – **3**, № 5. – С. 575–583.
   Те саме: *Podstrigach Ya. S., Shevchuk P. R.* Effect of surface layers on diffusion processes and the resulting stress state in solids // Sov. Mater. Sci. – 1968. – **3**, No. 5. – P. 420–426. – https://doi.org/10.1007/BF00716058.
22. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
23. *Терлецький Р. Ф., Турій О. П.* Моделювання і дослідження теплопереносу у пластинах з тонкими покриттями за врахування впливу випромінювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 2. – С. 186–201.
   Те саме: *Terlets'kyi R. F., Turii O. P.* Modeling and investigation of heat transfer in plates with thin coatings with regard for the influence of radiation // J. Math. Sci. – 2013. – **192**, No. 6. – P. 703–722.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-013-1427-1.
24. *Флейшман Н. П.* Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 39. – С. 30–34.
25. *Шевчук В. А.* Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием // Инж.-физ. журн. – 2013. – **86**, № 2. – С. 423–431.
   Те саме: *Shevchuk V. A.* Analytical solution of nonstationary heat conduction problem for a half-space with a multilayer coating // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2013. – **86**, No. 2. – P. 450–459. – https://doi.org/10.1007/s10891-013-0854-7.
26. *Шевчук В. А.* Визначення залишкових напружень в циліндрі з тонким багатошаровим покривом // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 159–167.
27. *Шевчук В. А.* До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 76–82.
28. *Шевчук В. А.* Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покривом // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 157–163.
29. *Шевчук В. А.* Задача термопружності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 2. – С. 117–129.

Те саме: *Shevchuk V. A.* Problem of thermoelasticity for a cylinder with thin multilayer coating // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, No. 1. – P. 145–161. – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04532-2.

30. *Шевчук В. А.* Нестаціонарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 2. – С. 179–185.
Те саме: *Shevchuk V. A.* Nonstationary one-dimensional problem of heat conduction for a cylinder with a thin multilayer coating // J. Math. Sci. – 2012. – **184**, No. 2. – P. 215–223. – https://doi.org/10.1007/s10958-012-0865-5.
31. *Шевчук В. А.* Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1995. – Вип. 38. – С. 116–120.
Те саме: *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions for heat transfer between a body and the surrounding medium through a multilayer thin covering // J. Math. Sci. – 1996. – **81**, No. 6. – P. 3099–3102. – https://doi.org/10.1007/BF02362603.
32. *Шевчук В. А.* Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями // Проблемы прочности. – 2000. – № 1. – С. 136–150.
Те саме: *Shevchuk V. A.* Analysis of the stressed state of bodies with multilayer thin coatings // Strength Mater. – 2000. – **32**, No. 1. – P. 92–102. – https://doi.org/10.1007/BF02511512.
33. *Шевчук В. А.* Расчет температурных напряжений в телах с тонкими многослойными покрытиями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2011. – Т. 19, Вип. 15(1). – С. 129–139.
34. *Шевчук В. А.* Теплопровідність пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестаціонарного нагріву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 2. – С. 148–157.
Те саме: *Shevchuk V. A.* Heat conduction in plates with thin two-sided multilayer coatings under the conditions of nonstationary heating // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 2. – P. 184–197. – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3347-y.
35. *Шевчук В. А.* Термонапружений стан пластини з тонким двостороннім багатошаровим покривом за умов нестаціонарного теплообміну // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 113–122.
36. *Шевчук В. А.* Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через багатошарові неплоскі покриття // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62,** № 2. – С. 82–97.
Те саме: *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions of radiant-convection heat exchange of bodies with ambient medium through multilayer nonplanar coatings // J. Math. Sci. – 2022. – **261**, No. 1. – P. 95–114. – https://doi.org/10.1007/s10958-022-05741-y.
37. *Шевчук В. А., Гаврись А. П.* Нестационарная задача теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием при циклическом изменении температуры внешней среды // Инж.–физ. журн. – 2020. – **93**, № 6. – С. 1543–1551.
Те саме: *Shevchuk V. A., Gavris' A. P.* Nonstationary heat-conduction problem for a half-space with a multilayer coating upon cyclic change in the ambient temperature // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2020. – **93**, No. 6. – P. 1489–1497. – https://doi.org/10.1007/s10891-020-02254-w.
38. *Шевчук В. А., Гаврись О. П.* Вибір ітеративного методу розв'язання нелінійної нестаціонарної задачі теплопровідності для півпростору при радіаційному охолодженні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57,** № 4. – С. 179–185.
39. *Шевчук В. А., Гаврись О. П.* Термонапружений стан півпростору з багатошаровим покривом за променево-конвективного теплообміну // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 171–179.
40. *Шевчук В. А., Калиняк Б. М.* Напружений стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покривами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 6. – С. 35–41.
Те саме: *Shevchuk V. A., Kalynyak B. M.* Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings // Mater Sci. – 2011. – **46**, No. 6. – P. 747–756. – https://doi.org/10.1007/s11003-011-9348-y.
41. *Шевчук В., Гаврись О.* Аналітичний розв'язок крайової задачі теплопровідності для системи півпростір – багатошарове покриття з неоднорідною початковою умовою за конвективного теплообміну з середовищем // Фіз.-мат. моделювання

та інформ. технології. – 2016. – Вип. 24. – С. 130–140.

42. *Шевчук В., Гаврись О.* Дослідження температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 20. – С. 229–240.
43. *Шевчук В., Гаврись О.* Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за термоциклічної обробки // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Зб. наук. праць 10-ї Міжнар. наук. конф. / Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Г. С. Кіта. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2019. – Вип. 5. – С. 129–130.
44. *Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П.* Нелінійна крайова задача радіаційно-конвективного теплообміну тіл з багатошаровими покриттями // Машинознавство. – 2010. – № 5 (155). – С. 21–25.
45. *Шевчук П. Р., Гаврись А. П.* Влияние лучевого нагрева на температурные режимы и остаточные напряжения при высокотемпературном напылении покрытий // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 30. – С. 69–73.
    Те саме: *Shevchuk P. R., Gavris' A. P.* The influence of radiant heating on temperature schemes and residual stresses under high-temperature spray coating // J. Sov. Math. – 1993. – **63**, No. 3. – P. 371–374.
    – https://doi.org/10.1007/BF01255745.
46. *Al-Nimr M. A., Alkam M. K.* A generalized thermal boundary condition // Heat Mass Transfer. – 1997. – **33**, No. 1-2. – P. 157–161.
    – https://doi.org/10.1007/s002310050173.
47. *Auvray A., Vial G.* Asymptotic expansions and effective boundary conditions: a short review for smooth and nonsmooth geometries with thin layers // ESAIM Proc. Surveys. – 2018. – **61. –** P. 38–54.
    – https://doi.org/10.1051/proc/201861038.
48. *Bahar L. Y.* Transfer matrix approach to layered systems // J. Eng. Mech. Div. – 1972. – **98**, No. 5. – P. 1159–1172. – https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0001660.
49. *Bahar L. Y., Hetnarski R. B.* Coupled thermoelasticity of a layered medium // J. Therm. Stresses. – 1980. – **3**, No. 1. – P. 141–152.
    – https://doi.org/10.1080/01495738008926958.
50. *Campo A.* A quasilinearization approach for the transient response of bodies with surface radiation // Lett. Heat Mass Transfer. – 1977. – **4**, No. 4. – P. 291–298.
    – https://doi.org/10.1016/0094-4548(77)90118-7.
51. *Chen J.-L., Гембара Н. О., Гвоздюк М. М.* Нестаціонарна температурна задача для циліндричної оболонки з багатошаровими тонкими покривами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 3. – С. 49–57.
    Те саме: *Chen J.-L., Hembara N. O., Hvozdyuk M. M.* Nonstationary temperature problem for a cylindrical shell with multilayer thin coatings // Mater. Sci. – 2018. – **54**, No. 3. – P. 339–348. – https://doi.org/10.1007/s11003-018-0190-3.
52. *Chen Y. Z.* Study of multiply-layered cylinders made of functionally graded materials using the transfer matrix method // J. Mech. Mater. Struct. – 2011. – **6**, No. 5. – P. 641–657. – https://doi.org/10.2140/jomms.2011.6.641.
53. *Choi H. J., Jin T. E., Lee K. Y.* Transient thermal stresses in a cladded semi-infinite medium containing an underclad crack // J. Therm. Stresses. – 1995. – **18**, No. 3. –P. 269–290. – https://doi.org/10.1080/01495739508946303.
54. *Du F., Lovell M. R., Wu T. W.* Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**, No. 26-27. – P. 4557–4570. – https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00291-2.
55. *Hou X., Deng Z., Yin G.* Application of transfer matrix method in heat transfer performance analysis of multi-re-entrant honeycomb structures // Heat Mass Transfer. – 2014. – **50**, No. 12. – P. 1765–1782.
    – https://doi.org/10.1007/s00231-014-1352-y.
56. *Lukasiewicz S. A.* Thermal stresses in shells // In: Thermal Stresses III / R. B. Hetnarski (Ed.). – Amsterdam: North Holland, 1989. – P. 355–553.
57. *Moulton D., Pelesko J. A.* Thermal boundary conditions: an asymptotic analysis // Heat Mass Transfer. – 2007. – **44**, No. 7. – P. 795–803.
    – https://doi.org/10.1007/s00231-007-0277-0.
58. *Pipes L. A.* Matrix analysis of heat transfer problems // J. Franklin Inst. – 1957. – **263**, No. 3. – P. 195–206. – https://doi.org/10.1016/0016-0032(57)90927-4.
59. *Rahmani L., Vial G.* Reinforcement of a thin plate by a thin layer // Math. Meth. Appl. Sci. – 2008. – **31**, No. 3. – P. 315–338. – https://doi.org/10.1002/mma.910.
60. *Rizk A. A., Erdogan F.* Cracking of coated materials under transient thermal

stresses // J. Therm. Stresses. – 1989. – **12**, No. 2. – P. 125–168. – https://doi.org/10.1080/01495738908961959.

61. *Rizk A. E.-F. A., Radwan S. F.* Transient thermal stress problem for a cracked semi-infinite medium // J. Therm. Stresses. – 1992. – **15**, No. 4. – P. 451–468. – https://doi.org/10.1080/01495739208946150.
62. *Shevchuk V. A.* Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings // Proc. Int. Conf. "Computational Science – ICCS 2002" (21–24 April 2002, Netherlands) / P. M. A. Sloot, A. G. Hoekstra, C. J. K. Tan, J. J. Dongarra (Eds). – Lect. Notes Comput. Sci. – **2330**. – Berlin etc.: Springer, 2002. – P. 500–509. – https://doi.org/10.1007/3-540-46080-2_52.
63. *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 1942–1953. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_601.
64. *Shevchuk V. A.* Modeling and computation of heat transfer in a system "body – multilayer coating" // Heat Transfer Res. – 2006. – **37**, No. 5. – P. 421–433. – https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.v37.i5.50.
65. *Shevchuk V. A.* Thermoelasticity problem for a multilayer coating/half-space assembly with undercoat crack subjected to convective thermal loading // J. Therm. Stresses. – 2017. – **40**, No. 10. – P. 1215–1230. – https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1301788.
66. *Shevchuk V. A., Silberschmidt V. V.* Analysis of damage evolution in thick ceramic coatings // Mater. Sci. Eng. **A**. – 2006. – **426**, No. 1-2. – P. 121–127. – https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.03.080.
67. *Shevchuk V. A., Silberschmidt V. V.* Analysis of damage evolution in thin multi-layer coatings under thermal loading // Proc. 6th Int. Congr. Therm. Stresses (26–29 May 2005, Vienna, Austria) / F. Ziegler, R. Heuer, C. Adam (Eds). – Vienna: Vienna Univ. of Technology, 2005. – Vol. 2. – P. 313–316.
68. *Shevchuk V. A., Silberschmidt V. V.* Semi-analytical analysis of thermally induced damage in thin ceramic coatings // Int. J. Solids Struct. – 2005. – **42**, No. 16-17. – P. 4738–4757. – https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.002.
69. *Ting T. C. T.* Mechanics of a thin anisotropic elastic layer and a layer that is bonded to an anisotropic elastic body or bodies // Proc. Roy. Soc. **A**. – 2007. – **463**, No. 2085. – P. 2223–2239. – https://doi.org/10.1098/rspa.2007.1875.
70. *Wang H., Qin Q.* Thermal analysis of a functionally graded coating/substrate system using the approximated transfer approach // Coatings. – 2019. – **9**, No. 1, article 51. – 17 p. – https://doi.org/10.3390/coatings9010051.
71. *Wang X., Sudak L. J.* Three-dimensional analysis of multi-layered functionally graded anisotropic cylindrical panel under thermomechanical loading // Mech. Mater. – 2008. – **40**, No. 4-5. – P. 235–254. – https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2007.06.008.
72. *Wunderlich W., Pilkey W. D.* Mechanics of structures: variational and computational methods. – Boca Raton: CRC Press Inc., 2002. – 892 p.

THE METHODOLOGY OF INVESTIGATION OF THERMAL STRESSED STATE OF BODIES WITH THIN MULTILAYER COATINGS

The methodology of effective calculation and investigation of thermal stressed state of bodies with thin multilayer coatings is presented, which is based on modeling of such coatings by shells with corresponding geometrical, thermophysical and thermomechanical properties of the coating. In this approach, the effect of coatings on the thermoelastic state of the entire body – coating system is described by special generalized boundary conditions. The efficiency of the approach is shown by test problems. Examples of solved new nonclassical linear and nonlinear boundary problems of thermoelasticity for bodies with multilayer thin coatings under heat loading are provided.

***Key words**: heat conduction, thermal elasticity, thin coatings, multilayer coatings, ceramic coatings, generalized boundary conditions, radiation-convection heat exchange.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.09.21