УДК 512.55+512.64+511.82

Н. Б. Ладзоришин[✉], В. М. Петричкович

ПРО СТАНДАРТНІ ФОРМИ ПАР МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЕМ ЦІЛИХ ҐАУССОВИХ ЧИСЕЛ ВІДНОСНО (z,k)-ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Досліджується (z,k)-еквівалентність пар матриць над кільцем цілих ґауссових чисел і їх звідність до стандартних форм. Встановлено, що число стандартних форм пар матриць над цим кільцем є скінченним. Наведено класи пар матриць з мінімальними і максимальними числами стандартних форм.

Ключові слова: *квадратичне кільце, кільце цілих ґауссових чисел, пари матриць, (z,k)-еквівалентність, стандартна форма пари матриць.*

Різні типи еквівалентностей матриць і їх пар та скінченних наборів над різними областями, зокрема над поліноміальними кільцями, кільцями головних ідеалів, адекватними кільцями тощо виникають у багатьох задачах [3, 6, 15, 16]. У працях [3, 7] на основі встановлених простіших форм матриць відносно таких еквівалентностей розроблено методи факторизації поліноміальних матриць і матриць над іншими кільцями. Запропоновано також способи розв'язування матричних лінійних різносторонніх рівнянь [10, 11].

Матриці над квадратичними кільцями виникають і використовуються у теорії чисел та інших розділах математики [1, 9, 14, 17, 18]. Їх властивості мало вивчені. У цій статті досліджуємо еквівалентність матриць над квадратичними кільцями. У [2] для матриць над квадратичними евклідовими кільцями встановлено трикутну форму з інваріантними множниками на головній діагоналі відносно спеціальної еквівалентності.

Нехай $\mathbb{Z}$ – кільце цілих чисел. Тоді $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ – квадратичне кільце, де ціле число k відмінне від 0 і 1 та не ділиться на квадрат простого числа. Елемент a квадратичного кільця $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ має вигляд

$$a = a_1 + a_2\sqrt{k}, \qquad \text{якщо } k = 2,3 \pmod 4,$$

або

$$a = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\sqrt{k}, \ a_1 \text{ і } a_2 \text{ однакової парності}, \qquad \text{якщо } k = 1 \pmod 4.$$

Розглянемо матриці над кільцем цілих ґауссових чисел $\mathbb{Z}[i]$. Це кільце складається з елементів вигляду $a = a_1 + a_2 i$, $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. Очевидно, що кільце цілих ґауссових чисел $\mathbb{Z}[i]$ є евклідовим. Евклідова норма $\mathcal{E}(a) \in \mathbb{N}$ елемента a із $\mathbb{Z}[i]$ може бути означена так:

$$\mathcal{E}(a) = a_1^2 + a_2^2.$$

Надалі через $M(n,\mathbb{K})$ будемо позначати кільце матриць n-го порядку над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$.

Кожна неособлива матриця A над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K}$ еквівалентна до канонічної діагональної форми D^A, тобто для деяких оборотних матриць $U, V \in GL(n,\mathbb{K})$:

$$D^A = UAV = \operatorname{diag}(\mu_1^A, \ldots, \mu_n^A), \qquad \mu_p^A \mid \mu_{p+1}^A, \qquad p = 1,\ldots,n-1,$$

$\mu_p^A(\lambda)$, $p = 1,\ldots,n$, – інваріантні множники матриці A.

✉ natalja.ladzoryshyn@gmail.com

У праці [5] введено поняття (z,k)-еквівалентності матриць. Матриці A та B з кільця $M(n,\mathbb{K})$ називають (z,k)-еквівалентними, якщо існують такі оборотна матриця S над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ та оборотна матриця Q над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$, що $A = SBQ$.

Для кожної неособливої матриці $A \in M(n,\mathbb{K})$ з канонічною діагональною формою $D^A = \operatorname{diag}(\varphi_1^A, \ldots, \varphi_n^A)$, де $\mathbb{K}$ – квадратичне евклідове кільце, встановлено її (z,k)-еквівалентність до такої трикутної форми:

$$SAQ = \left\| \begin{array}{ccccc} \varphi_1^A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t_{21}^A \varphi_1^A & \varphi_2^A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n-11}^A \varphi_1^A & t_{n-12}^A \varphi_2^A & \cdots & \varphi_{n-1}^A & 0 \\ t_{n1}^A \varphi_1^A & t_{n2}^A \varphi_2^A & \cdots & t_{nn-1}^A \varphi_{n-1}^A & \varphi_n^A \end{array} \right\| = T^A, \tag{1}$$

де $S \in GL(n,\mathbb{Z})$, $Q \in GL(n,\mathbb{K})$ і

$$t_{pj}^A = 0, \qquad \text{якщо} \quad \varphi_p^A = 1, \quad p, j = 1, \ldots, n, \quad j < p, \tag{2}$$

$$\mathcal{E}(t_{pj}^A) < \frac{\mathcal{E}(\varphi_p^A)}{\mathcal{E}(\varphi_j^A)}, \qquad \text{якщо} \quad t_{pj}^A \neq 0, \quad p, j = 1, \ldots, n, \quad j < p. \tag{3}$$

Трикутну форму T^A вигляду (1) з умовами (2) і (3) називають стандартною формою матриці A відносно (z,k)-еквівалентності. Стандартна форма T^A матриці A, взагалі кажучи, визначається неоднозначно. У [8] виділено класи матриць над квадратичним кільцем цілих ґауссових чисел, для яких стандартна форма матриць дорівнює їх канонічній діагональній формі і, таким чином, є єдиною.

Пари матриць (A_1, A_2) і (B_1, B_2), де $A_p, B_p \in M(n, \mathbb{Z}[i])$, $p = 1, 2$, називаються (z,k)-еквівалентними, якщо існують така оборотна матриця S над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і оборотні матриці Q_1, Q_2 над квадратичним кільцем $\mathbb{Z}[i]$, що

$$A_1 = SB_1Q_1, \qquad A_2 = SB_2Q_2.$$

У [4, 12] для певних класів пар матриць (A, B) над квадратичним евклідовим кільцем встановлено їх звідність (z,k)-еквівалентними перетвореннями до пари (T^A, T^B), де T^A і T^B – трикутні форми вигляду (1) з умовами (2) і (3) матриць A і B. Пару матриць (T^A, T^B) назвемо стандартною парою пари матриць (A, B) або стандартною парою матриць. Зауважимо, що у працях [5, 13] стандартні пари застосовано для опису структури розв'язків матричних однобічних і двобічних рівнянь.

Позначимо через $\boldsymbol{M}_{T^A}$ множину всіх матриць T^A вигляду (1), для яких виконуються умови (2), (3). Аналогічно через $\boldsymbol{M}_{T^B}$ позначимо множину всіх трикутних матриць T^B з інваріантними множниками φ_p^B, $p = 1, \ldots, n$, матриці B на головній діагоналі, а під головною діагоналлю елементи $t_{pj}^B \varphi_j^B$, де $t_{pj}^B = 0$, якщо $\varphi_p^B = 1$, і $\mathcal{E}(t_{pj}^B) < \dfrac{\mathcal{E}(\varphi_p^B)}{\mathcal{E}(\varphi_j^B)}$, якщо $t_{pj}^B \neq 0$, $p, j = 1, \ldots, n$, $j < p$.

Через $\boldsymbol{M}_{(T^A,T^B)}$ позначимо множину всіх пар матриць (T^A, T^B), де $T^A \in \boldsymbol{M}_{T^A}$, $T^B \in \boldsymbol{M}_{T^B}$.

Стандартні пари матриць також визначаються неоднозначно. Легко показати, що число стандартних пар матриць над кільцем цілих ґауссових чисел $\mathbb{Z}[i]$ є скінченним. Наведемо оцінку числа стандартних пар для деякого класу пар матриць над кільцем цілих ґауссових чисел $\mathbb{Z}[i]$.

Лема 1. *Нехай* $A, B \in M(n, \mathbb{Z}[i])$ і $\mathcal{E}(\det A) \le 4$, $\mathcal{E}(\det B) \le 4$. *Тоді пара матриць* (A, B) *є* (z,k)*-еквівалентною до стандартної пари* (T^A, T^B).

Д о в е д е н н я. Елементами $a \in \mathbb{Z}[i]$ з евклідовими нормами, не більшими, ніж чотири, з точністю до асоційованості є $a = 1, 1+i, 2$. Їх евклідовими нормами є $\mathcal{E}(1) = 1$, $\mathcal{E}(1+i) = 2$, $\mathcal{E}(2) = 4$.

Нехай у парі матриць (A, B) евклідова норма визначника однієї з матриць A чи B дорівнює 1, тобто ця матриця оборотна. Тоді $(\det A, \det B) = 1$, і на основі результату з [12] пара матриць (A, B) є (z,k)-еквівалентною до стандартної пари (T^A, T^B).

В інших випадках визначники матриць A і B є простими числами або квадратами простих чисел із $\mathbb{Z}[i]$. Тоді (z,k)-еквівалентними перетвореннями пара матриць (A, B) зводиться до стандартної пари (T^A, T^B) згідно з результатами праці [4]. Лему доведено. ♦

Теорема 1. *Нехай* $A, B \in M(n, \mathbb{Z}[i])$, $\mathcal{E}(\det A) < 4$, $\mathcal{E}(\det B) < 4$, і $(\det A, \det B) = 1$. *Тоді стандартною парою пари матриць* (A, B) *є кожна пара* (T^A, T^B) *із множини* $\boldsymbol{M}_{(T^A,T^B)}$, *і їх число є максимальним.*

Д о в е д е н н я. З леми 1 випливає, що кожна така пара матриць (A, B) над квадратичним евклідовим кільцем є (z,k)-еквівалентною до стандартної пари (T^A, T^B) матриць A і B.

За умовою теореми маємо, що визначники матриць A і B набувають значень $1, 1+i$. Із того, що $(\det A, \det B) = 1$, випливає, що принаймні одна з матриць A чи B є оборотною.

Нехай обидві матриці A і B є оборотними. Тоді множина $\boldsymbol{M}_{(T^A,T^B)}$ містить пару одиничних матриць і пари матриць, асоційованих до цих матриць.

Розглянемо випадок $\mathcal{E}(\det A) = 1$, $\mathcal{E}(\det B) = 2$. Тоді канонічними діагональними формами матриць A і B є

$$D^A = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1), \qquad D^B = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1+i).$$

Множина $\boldsymbol{M}_{T^A}$ містить тільки одиничну матрицю, а множина $\boldsymbol{M}_{T^B}$ містить діагональну матрицю $D^B = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1+i)$ та матриці

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} & 1+i \end{matrix} \right\|, \tag{5}$$

і оскільки $\mathcal{E}(t_j) < \mathcal{E}(1+i)$, $j = 1, \ldots, n-1$, то t_j, $j = 1, \ldots, n-1$, пробігають значення 0, 1.

Зауважимо, що матриця

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+i \end{Vmatrix}$$

не є асоційовною справа з кожною матрицею вигляду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} & 1+i \end{Vmatrix},$$

де $t_p = 0$ або $t_p = 1$ і не всі t_p, $p = 1, \ldots, n-1$, дорівнюють нулеві.

Доведемо, що пари матриць

$$(D^A, D^B) = \left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+i \end{Vmatrix} \right),$$

і

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} & 1+i \end{Vmatrix} \right) \tag{6}$$

є (z,k)-еквівалентними. Розглянемо другу матрицю з пари матриць (6).

Якщо $t_1 = 0$, тоді переходимо до t_2. Нехай $t_2 = 1$, тоді додавши до останнього рядка другий рядок, помножений на -1, на місці t_2 отримаємо нуль. Відповідно, виконавши цю ж саму операцію над першою матрицею із цієї пари − одиничною матрицею, отримаємо матрицю

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Додавши до другого стовпчика останній стовпчик, отримаємо одиничну матрицю.

Аналогічно розглянемо інші t_p, $p = 3, \ldots, n-1$. Застосувавши одні і ті ж самі елементарні операції над рядками обох матриць пари (6) і окремі елементарні операції над стовпцями над кільцем $\mathbb{K}$ до кожної матриці цієї пари, (z,k)-еквівалентними перетвореннями пару матриць (6) зведемо до пари матриць (D^A, D^B). Таким чином, кожна пара матриць вигляду (6) є (z,k)-еквівалентною до пари (D^A, D^B).

Отже, кожні пари матриць (T^A, T^B), де $T^A \in \boldsymbol{M}_{T^A}$, $T^B \in \boldsymbol{M}_{T^B}$, попарно (z,k)-еквівалентні, і кожна така пара матриць є парою стандартних форм пари матриць (A, B). Теорему доведено. ♦

Теорема 2. *Нехай* $A, B \in M(n, \mathbb{Z}[i])$, $\mathcal{E}(\det A) = 4$, $\mathcal{E}(\det B) = 4$. *Тоді не кожна пара* (T^A, T^B) *з множини* $\boldsymbol{M}_{(T^A, T^B)}$ *може бути стандартною парою пари матриць* (A, B).

Д о в е д е н н я. Покажемо, що існує пара матриць (A, B), для якої не кожна пара матриць з множини (T^A, T^B) є стандартною парою пари матриць (A, B). Для цього розглянемо пару матриць (A, B), де

$$A = \begin{Vmatrix} 2+i & 1-i \\ 1 & 1-i \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 5-i & 1 \\ 11+13i & 2+3i \end{Vmatrix}$$

і $\mathcal{E}(\det A) = 4$, $\mathcal{E}(\det B) = 4$. Канонічними діагональними формами матриць A і B є матриці $D^A = \mathrm{diag}(1,2)$ і $D^B = \mathrm{diag}(1,2)$. Тоді множина матриць (T^A, T^B) складається з пар

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t_1 & 2 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t_2 & 2 \end{Vmatrix} \right),$$

де $t_1, t_2 \in \{0, 1, -1, i, -i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i\}$, і отже, містить 81 пару матриць. Однією із стандартних пар пари матриць (A, B) є пара

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \right)$$

з цієї множини. Покажемо, що пари матриць

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \right) \quad \text{і} \quad \left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ i & 2 \end{Vmatrix} \right)$$

не є (z, k)-еквівалентними. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що існують такі оборотні матриці

$$S = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{Vmatrix}, \qquad s_{pj} \in \mathbb{Z},$$

і

$$Q = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{Vmatrix}, \qquad q_{pj} \in \mathbb{Z}[i], \qquad p, j = 1, 2,$$

що

$$S \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} Q = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ i & 2 \end{Vmatrix}.$$

З цієї рівності отримаємо систему рівнянь:

$$s_{11}q_{11} + 2s_{12}q_{21} = 1,$$

$$s_{21}q_{11} + 2s_{22}q_{21} = i,$$

$$s_{11}q_{12} + 2s_{12}q_{22} = 0,$$

$$s_{21}q_{12} + 2s_{22}q_{22} = 2,$$

відносно невідомих s_{pj}, q_{pj}, $p, j = 1, 2$.

Розв'язуючи цю систему, приходимо до висновку, що система нерозв'язна. Таким чином, припущення неправильне, і отже, ці матриці не є (z, k)-еквівалентними. Тому число стандартних пар не є максимальним. Теорему доведено. ♦

Зауважимо, що якщо матриці $A, B \in M(n, \mathbb{Z}[i])$ є оборотними, тоді стандартною парою є єдина пара матриць (E, E), де E − одинична матриця.

Наслідок 1. *Нехай* $A, B \in M(n, \mathbb{Z}[i])$, $\mathcal{E}(\det A) \le 4$, $\mathcal{E}(\det B) \le 4$. *Тоді такі пари матриць* (A, B) *мають* r *стандартних форм, де* $1 \le r \le m$, m *− число пар матриць* (T^A, T^B) *множини* $\boldsymbol{M}_{(T^A, T^B)}$.

Зауважимо, що теорема 2 правильна, якщо евклідова норма визначника однієї з матриць A або B є меншою, ніж чотири.

► ***Приклад.*** Нехай матриці $A, B \in M(2, \mathbb{Z}[i])$ з канонічними діагональними формами $D^A = \operatorname{diag}(1, 1+i)$ і $D^B = \operatorname{diag}(1, 2)$, відповідно. Тоді $\mathcal{E}(\det A) = 2$, $\mathcal{E}(\det B) = 4$. Множина $\boldsymbol{M}_{T^A}$ складається з матриць

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t_1 & 1+i \end{Vmatrix},$$

де $t_1 \in \{0, 1, -1, i, -i\}$, множина $\boldsymbol{M}_{T^B}$ − з матриць вигляду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t_2 & 2 \end{Vmatrix},$$

де $t_2 \in \{0, 1, -1, i, -i, 1-i, 1+i, -1+i, -1-i\}$. Тоді $\boldsymbol{M}_{(T^A, T^B)}$ складається з пар матриць вигляду

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t_1 & 1+i \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t_2 & 2 \end{Vmatrix}\right).$$

Таких пар є 45. Стандартною парою пари матриць (A, B) є пара

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}\right).$$

Однак пара матриць

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ i & 2 \end{Vmatrix}\right)$$

з множини $\boldsymbol{M}_{(T^A, T^B)}$ не є (z, k)-еквівалентна до цієї стандартної пари, і отже, не є стандартною парою пари матриць (A, B). Ця пара матриць (A, B) не має максимального числа стандартних пар. ◄

1. *Величко И. Н.* Обобщенные суммы Клостермана над кольцом матриц $M_n(\mathbb{Z}[i])$ // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Математика і механіка. − 2010. − **15,** № 19. − С. 9−20.
2. *Зеліско В. Р., Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Про еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями // Прикл. проблеми механіки і математики. − 2006. − Вип. 4. − С. 16−21..
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. − Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. − 282 с.
4. *Ладзоришин Н. Б.* Про еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичними евклідовими кільцями // Карпат. мат. публікації. − 2013. − **5**, № 1. − С. 63–69.
5. *Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями відносно (z, k)-еквівалентності та структура розв’язків матричних двобічних лінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2018. − **61,** № 2. − С. 49−56.

   Те саме: *Ladzoryshyn N. B., Petrychkovych V. M.* Standard form of matrices over quadratic rings with respect to the (z,k)-equivalence and the structure of solutions of bilateral matrix linear equations // J. Math. Sci. – 2021. – **253**, No. 1. – P. 54–62. – https://doi.org/10.1007/s10958-021-05212-w.

6. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 13–16.
   Те саме: *Petrichkovich V. M.* Semiscalar equivalence and the Smith normal form of polynomial matrices // J. Sov. Math. – 1993. – **66**, No. 1. – P. 2030–2033. – htps://doi.org/10.1007/BF01097386.
7. *Петричкович В. М.* Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 312 с.
8. *Петричкович В. М., Зеліско Г. В., Ладзоришин Н. Б.* Стандартна форма матриць над кільцем цілих гаусових чисел відносно (z,k)-еквівалентності // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2020. – Вип. 18. – С. 5–10.
9. *Cossu L., Zanardo P.* Idempotent factorizations of singular 2×2 matrices over quadratic integer rings // Linear Multilinear Algebra. – 2022. – **70,** No. 2. – P. 297–309. – https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1721416.
10. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure // Algebra Discrete Math. – 2019. – **27,** No. 2. – P. 243–251.
11. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings // Int. Scholarly Research Notices. ISRN Algebra. – **2012**. – Article ID 205478. – 14 pages. – doi:10.5402/2012/205478.
12. *Ladzoryshyn N., Petrychkovych V.* Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic rings of principal ideals // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. – 2014. – **76,** No. 3. – P. 38–48.
13. *Ladzoryshyn N. B., Petrychkovych V. M., Zelisko H. V.* Matrix Diophantine equations over quadratic rings and their solutions // Карпат. мат. публікації. – 2020. – **12,** No. 2. – P. 368–375. – https://doi:10.15330/cmp.12.2.368-375.
14. *Nica B.* The unreasonable slightness of E_2 over imaginary quadratic rings // Amer. Math. Monthly. – 2011. – **118**, No. 5. – P. 455–462. – https://doi:10.4169/amer.math.monthly.118.05.455.
15. *Petrychkovych V.* Generalized equivalence of pairs of matrices // Linear Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, No. 2. – P. 179–188. – doi: 10.1080/03081080008818667.
16. *Petrychkovych V.* Standard form of pairs of matrices with respect to generalized equivalence // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 148–155.
17. *Varbanets S. P.* General Kloosterman sums over the ring of Gaussian integers // Укр. мат. журн. – 2007. – **59,** № 9. – С. 1179–1200.
   Те саме: *Varbanets S. P.* General Kloosterman sums over the ring of Gaussian integers // Ukr. Math. J. – 2007.– **59**, No. 9. – P. 1313–1341. – https://doi.org/10.1007/s11253-007-0090-4.
18. *Velichko I. N.* Generalized Kloosterman sum over the ring $M_n(\mathbb{Z})$ // Siauliai Math. Semin. – 2010. – **5**, No. 13. – P. 121–136.

ON STANDARD FORMS OF PAIRS OF MATRICES OVER THE RING OF GAUSSIAN INTEGERS WITH RESPECT TO (z,k)-EQUIVALENCE

The (z,k)-equivalence of pairs of matrices over the ring of Gaussian integers and its reducibility to standard forms are investigated. It is established that the number of standard forms of pairs of matrices over this ring is finite. Classes of pairs of matrices with minimum and maximum numbers of standard forms are presented.

Key words: *quadratic ring, ring of Gaussian integers, pairs of matrices, (z,k)-equivalence, standard form of pair of matrices.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.12.21