

СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ ПАРАМЕТРІВ РУЙНУВАННЯ В П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ПРИ РІЗНИХ ТИПАХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ЇЇ БЕРЕГАХ

Методом скінченних елементів досліджується напружено-деформований стан міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі, поляризованому перпендикулярно до берегів тріщини, при заданні на нескінченності електричного поля, паралельного до тріщини, та напружень, паралельних до осі поляризації. На берегах тріщини розглядаються основні варіанти електростатичних граничних умов: непроникуєність (ізолюваність), електропроникуєність, електропровідність, а також варіант змішаних граничних умов – електропровідність середньої частини верхнього берега та ізолюваність решти тріщини. Допускається утворення зон механічного контакту між берегами. Задача розглядається у постановці плоскої деформації. Визначення швидкостей вивільнення енергії реалізується за допомогою інтегрального методу віртуального закриття тріщини. Показано, що тип граничних умов істотно впливає на параметри руйнування.

Ключові слова: п'єзоелектричний біматеріал, міжфазна тріщина, метод скінченних елементів, параметри руйнування, інтегральний метод віртуального закриття тріщин.

Вступ. П'єзоелектричні матеріали широко застосовуються у сучасних мікроелектронних виробках, таких як п'єзорезонатори, п'єзоелектричні трансформатори, актуатори тощо. У процесі експлуатації такі вироби зазнають значних навантажень як механічної, так і електричної природи, у них також можуть виникати різноманітні порушення суцільності матеріалу, такі як пори, тріщини або відшарування. Відомо, що п'єзоелектричні матеріали є схильними до крихкого руйнування [5, 6], тому при аналізі міцності та надійності п'єзоелектричних структур виникає необхідність використання концепцій механіки руйнування. Наявні аналітичні розв'язки відповідних граничних задач частіше всього відносяться до нескінченних областей з неоднорідностями канонічної форми і, як правило, реалізуються за допомогою методів теорії комплексних потенціалів. Більшість робіт, у яких отримано точні розв'язки для широкого кола як однорідних, так і неоднорідних п'єзоматеріалів з дефектами типу отворів і тріщин при заданих електромеханічних навантаженнях, відноситься до класу двовимірних задач [3, 8, 15, 16, 18, 19]. Кількість публікацій цього спрямування постійно збільшується. Переважно розглядаються лінійні моделі деформування і руйнування п'єзоактивних матеріалів.

У той же час коло задач механіки руйнування п'єзоматеріалів далеко не обмежується випадками нескінченних областей. Практичний інтерес становлять розрахунки для скінченних областей складної форми. У таких випадках, природно, виникає необхідність застосування чисельних методів, у першу чергу – методу скінченних елементів (МСЕ) [22]. Існує ряд робіт, у яких розглядаються різні аспекти реалізації МСЕ стосовно п'єзоматеріалів [7, 9–14]. Як правило, з метою тестування точності скінченноелементних алгоритмів вибирають задачі для нескінченних областей, для яких побудовано аналітичні розв'язки. Важливою проблемою при реалізації МСЕ є адекватне моделювання електричних та механічних умов на берегах тріщин і границях між різними матеріалами. Крім того, оскільки в задачах, пов'язаних з руйнуванням, основний інтерес становить отримання достовірних даних про параметри руйнування, актуальною є побудова ефективних алгоритмів

[✉] lobvv@ua.fm

обчислення таких величин, як розкриття тріщини, коефіцієнти інтенсивності напружень, J -інтеграли, швидкість вивільнення енергії [1, 2, 4, 17, 21].

Метою пропонованої роботи є розробка скінченноелементної моделі міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі, модифікація алгоритму методу віртуального закриття тріщини для обчислення швидкості вивільнення енергії і дослідження впливу типу електростатичних граничних умов на берегах тріщини на параметри руйнування.

1. Постановка задачі. Розглядається плоска деформація біматеріалу, складеного з півпросторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, зчеплених по інтерфейсу $x_3 = 0$ і заповнених п'єзоматеріалами 1 та 2, відповідно, поляризованими вздовж осі Ox_3 . На відрізку $AB: x_1 \in L = (-\ell, \ell)$ інтерфейсу розміщена міжфазна тріщина (рис. 1).

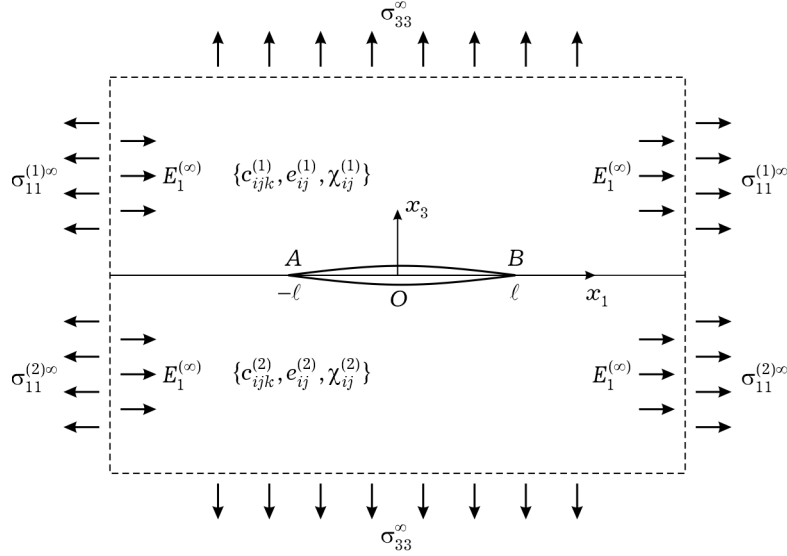


Рис.1. Схема навантаження п'єзоелектричного біматеріалу.

Замкнена система рівнянь п'єзостатики за відсутності масових сил і вільних зарядів у загальному випадку описується рівняннями [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, & D_i &= e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \chi_{ik} E_k, & \sigma_{ij,i} &= 0, & D_{i,i} &= 0, \\ \varepsilon_{ij} &= 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), & E_i &= -\varphi_{,i}, & i, j, k, \ell &= 1, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

де u_i – компоненти вектора переміщень; σ_{ij} , ε_{ij} – компоненти тензорів напружень і деформацій; E_i – компоненти вектора електричного поля; D_i – компоненти вектора електричної індукції; φ – електричний потенціал; c_{ijkl} , e_{ijk} , χ_{ij} – компоненти пружної, п'єзоелектричної та діелектричної матриць. Кома в індексі означає похідну за відповідною координатною змінною. В умовах плоскої деформації $u_2 = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{23} = 0$, $\varepsilon_{12} = 0$, $\varepsilon_{23} = 0$, $E_2 = 0$, $D_2 = 0$, а всі інші компоненти є функціями лише змінних x_1 та x_3 .

Виключивши із системи (1) напруження і деформації, отримаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} (c_{ijkl} u_k + e_{lij} \varphi)_{,li} &= 0, \\ (e_{ikl} u_k - \chi_{il} \varphi)_{,li} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На нескінченності задаємо компоненти механічних та електричних по-

лів $\sigma_{11}^{(1)\infty}$, $\sigma_{11}^{(2)\infty}$, σ_{33}^∞ , E_1^∞ . Граничні умови на інтерфейсі для відкритої тріщини L мають вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_{i3}^{(1)}(x_1, 0) &= \sigma_{i3}^{(2)}(x_1, 0), & \varphi^{(1)}(x_1, 0) &= \varphi^{(2)}(x_1, 0), \\ D_3^{(1)}(x_1, 0) &= D_3^{(2)}(x_1, 0), & u_i^{(1)}(x_1, 0) &= u_i^{(2)}(x_1, 0), & x_1 &\in (-\infty, \infty) \setminus L, \\ \sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) &= 0, & x_1 &\in L, & m &= 1, 2, & i &= 1, 3.\end{aligned}\quad (3)$$

Припускаємо, що береги тріщини можуть знаходитись в умовах безфрикційного контакту на інтервалі $x_1 \in (c, d)$, $-\ell \leq c < d \leq \ell$. Таким чином, до умов на інтерфейсі додаються такі механічні умови

$$\begin{aligned}\sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) &= 0, & x_1 &\in [-\ell, c] \cup [d, \ell], \\ u_3^{(1)}(x_1, 0) &= u_3^{(2)}(x_1, 0), & \sigma_{13}^{(m)}(x_1, 0) &= 0, \\ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) &= \sigma_{33}^{(2)}(x_1, 0), & x_1 &\in (c, d), & m &= 1, 2, & i &= 1, 3.\end{aligned}\quad (4)$$

Розглянемо такі варіанти електростатичних умов на берегах тріщини: **1)** електропроникна тріщина; **2)** електроізолювана тріщина; **3)** електропровідна тріщина; **4)** тріщина, електродована на частині $|x_1| \leq 0.5\ell$ верхнього берега та електроізолювана вздовж решти частини берегів.

Розшукуємо такі параметри руйнування: розкриття тріщини $\Delta(x_1) = |u_3^{(2)}(x_1, 0) - u_3^{(1)}(x_1, 0)|$, а також швидкості вивільнення енергії G у вершинах тріщини **A**, **B**.

Розглядаємо п'езоматеріали з кристалічною симетрією 6mm, для яких (з використанням скорочених індексних позначень [5]) маємо $c_{11} = c_{1111}$, $c_{33} = c_{3333}$, $c_{13} = c_{1133}$, $c_{44} = c_{1313}$, $e_{31} = e_{311}$, $e_{33} = e_{333}$, $e_{15} = e_{113}$, а пружна, п'езоелектрична та діелектрична матриці набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\|c_{ij}\| &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{pmatrix}, \\ \|e_{ij}\| &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \|\chi_{ij}\| &= \begin{pmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

При цьому співвідношення стану e -типу [5] набувають вигляду

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3, \\ \sigma_{33} &= c_{13}\varepsilon_{11} + c_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}E_3, & \sigma_{13} &= c_{44}\varepsilon_{13} - e_{15}E_1, \\ D_1 &= e_{15}\varepsilon_{13} + \chi_{11}E_1, & D_3 &= e_{31}\varepsilon_{11} + e_{33}\varepsilon_{33} + \chi_{33}E_3.\end{aligned}\quad (5)$$

Граничні умови на нескінченності повинні задовольняти умову неперервності деформацій ε_{11} уздовж інтерфейсу біматеріалу:

$$\varepsilon_{11}^{(1)\infty} = \varepsilon_{11}^{(2)\infty} = \varepsilon_{11}^\infty \quad (6)$$

З урахуванням неперервності на інтерфейсі напружень σ_{33} та індукції D_3 з формул (5) і (6) випливають такі співвідношення для компонентів електромеханічних полів у граничних умовах (3):

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(m)\infty} &= c_{11}^{(m)}\varepsilon_{11}^\infty + c_{13}^{(m)}\varepsilon_{33}^{(m)\infty} - e_{31}^{(m)}E_3^{(m)\infty}, \\ \sigma_{33}^\infty &= c_{13}^{(m)}\varepsilon_{11}^\infty + c_{33}^{(m)}\varepsilon_{33}^{(m)\infty} - e_{33}^{(m)}E_3^{(m)\infty}, \\ D_3^\infty &= e_{31}^{(m)}\varepsilon_{11}^\infty + e_{33}^{(m)}\varepsilon_{33}^{(m)\infty} + \chi_{33}^{(m)}E_3^{(m)\infty}, \quad m = 1, 2.\end{aligned}$$

Розв'язуючи ці співвідношення відносно ε_{11}^∞ , $\varepsilon_{33}^{(1)\infty}$, $\varepsilon_{33}^{(2)\infty}$, $E_3^{(1)\infty}$, $E_3^{(2)\infty}$ та D_3^∞ , отримаємо таку умову:

$$\begin{aligned}\left\{ \sigma_{11}^{(1)\infty} [(e_{33}^{(1)})^2 + c_{11}^{(1)}\chi_{33}^{(1)}] - \sigma_{33}^\infty (e_{31}^{(1)}e_{33} + c_{13}^{(1)}\chi_{33}^{(1)}) + \right. \\ \left. + D_3^\infty (c_{33}^{(1)}e_{31}^{(1)} - c_{13}^{(1)}e_{33}^{(1)}) \right\} (\delta^{(1)})^{-1} = \left\{ \sigma_{11}^{(2)\infty} [(e_{33}^{(2)})^2 + c_{11}^{(2)}\chi_{33}^{(2)}] - \right. \\ \left. - \sigma_{33}^\infty (e_{31}^{(2)}e_{33}^{(2)} + c_{13}^{(2)}\chi_{33}^{(2)}) + D_3^\infty (c_{33}^{(2)}e_{31}^{(2)} - c_{13}^{(2)}e_{33}^{(2)}) \right\} (\delta^{(2)})^{-1}, \quad (7)\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\delta^{(m)} &= c_{33}^{(m)}(e_{31}^{(m)})^2 - 2c_{13}^{(m)}e_{31}^{(m)}e_{33}^{(m)} + c_{11}^{(m)}(e_{33}^{(m)})^2 + \\ &+ [c_{11}^{(m)}c_{33}^{(m)} - (c_{13}^{(m)})^2]\chi_{33}^{(m)}, \quad m = 1, 2.\end{aligned}$$

Для матеріалу 1 – PZT-4 та матеріалу 2 – PZT-5H за умови, що $D_3^\infty = 0$, співвідношення (7) набуває вигляду

$$\sigma_{33}^\infty = 9.418 \sigma_{11}^{(1)\infty} - 10.029 \sigma_{11}^{(2)\infty}.$$

У табл. 1 наведено декілька значень $\sigma_{11}^{(m)\infty}/\sigma_{33}^\infty$, $m = 1, 2$, що відповідають цьому співвідношенню.

Таблиця 1. Значення механічних навантажень $\sigma_{11}^{(m)\infty}$, $m = 1, 2$, що забезпечують неперервність деформацій ε_{11} на інтерфейсі біматеріалу PZT-4/PZT-5H.

$\sigma_{11}^{(1)\infty}/\sigma_{33}^\infty$	$\sigma_{11}^{(2)\infty}/\sigma_{33}^\infty$
0.106	0
0	-0.100
-1.637	-1.637

За додаткової умови неперервності компоненти E_3 електричного поля: $E_3^{(1)\infty} = E_3^{(2)\infty}$, умова неперервності деформацій ε_{11} набуває вигляду

$$\sigma_{11}^{(1)\infty} = 0.954\sigma_{33}^\infty, \quad \sigma_{11}^{(2)\infty} = 0.797\sigma_{33}^\infty.$$

Якщо замість умови $D_3^\infty = 0$ виконуються умови $E_3^{(1)\infty} = E_3^{(2)\infty} = 0$, то деформації ε_{11} будуть неперервними при таких значеннях навантажень:

$$\sigma_{11}^{(1)\infty} = 7.594\sigma_{33}^\infty, \quad \sigma_{11}^{(2)\infty} = 8.301\sigma_{33}^\infty.$$

2. Чисельна реалізація. Моделювання п'єзоелектричного біматеріалу з міжфазною тріщиною здійснювали за допомогою методу скінченних елементів, що є найбільш ефективним обчислювальним засобом розв'язування широкого кола задач механіки суцільного середовища [22]. Моделювання та розрахунки реалізували у середовищі пакету Abaqus. Нескінченну область апроксимуємо скінченною областю $|x_1| \leq b$, $|x_3| \leq b$, де $b = 20 \ell$, що, як показали числові експерименти, забезпечує достатню збіжність з відомими аналітичними результатами для нескінченної області.

Електромеханічні граничні умови на нескінченності задавали на границях скінченної області. При цьому компоненти електричного поля виражали через різницю потенціалів $\Delta\phi$ на протилежних сторонах скінченної області:

$$E_1^\infty = -\Delta\phi / (2b).$$

Для стабілізації тіла від переміщень як жорсткого цілого в кожному куті зовнішньої границі додавали дві закріплені з одного кінця пружини – горизонтальну і вертикальну, жорсткість яких вибирали на декілька порядків меншою, ніж жорсткість біматеріалу. Як показали чисельні дослідження, така фіксація не вносить помітних змін у напружений стан біматеріалу. Для дискретизації області використовувались чотирикутні 8-вузлові п'єзоелектричні елементи з поліноміальною апроксимацією другого порядку. У кожному вузлі визначали компоненти переміщень u_1 , u_3 і потенціал електричного поля ϕ . Неоднорідні сітки скінченних елементів згущували в околі тріщини і розріджували в міру наближення до зовнішньої границі біматеріалу. Особливу увагу приділено належному моделюванню околів вершин тріщини, де використовувались концентричні сітки скінченних елементів, довжина радіальних сторін яких поступово зменшувалася від 0.3560ℓ до 0.0012ℓ , та дуговою мірою $\alpha = 11.25^\circ$ (рис. 2). Розрахункова модель в середньому налічувала близько 10^4 скінченних елементів з $3 \cdot 10^4$ вузлами, що забезпечувало практичну незмінність результатів, отриманих при ще більш щільних сітках. У вироджених трикутних елементах, що примикають до вершин тріщини, вздовж радіальних сторін здійснювався зсув середніх вузлів у напрямку вершини тріщини на $1/4$ довжини сторони, що забезпечувало моделювання асимптотики степеня 0.5 для переміщень і потенціалу ϕ в околі вершини. Можливий контакт між берегами тріщини моделювали за допомогою створення контактної пари між берегами тріщини при умовах взаємного непроникнення контактуючих поверхонь і відсутності тертя між ними.

У випадку *електропровідної тріщини* виконувалась умова

$$\phi(x_1) = \phi_0 = \text{const}, \quad x_1 \in L, \quad (8)$$

яка реалізувалась за допомогою багатоточкового обмеження, згідно з яким потенціали в усіх вузлах електродованої тріщини дорівнювали потенціалу в одному із заздалегідь вибраних вузлів.

У випадку *електропроникної тріщини* граничні умови на тріщині задавали у вигляді

$$\phi^{(1)}(x_1) = \phi^{(2)}(x_1), \quad x_1 \in L, \quad (9)$$

для кожної пари вузлів на протилежних берегах тріщини з однією і тією ж координатою x_1 . Як і у попередньому випадку, такі умови реалізувались за допомогою багатоточкових обмежень, але для пар вузлів з однією і тією ж координатою x_1 .

У випадку *електроізолюваної тріщини* реалізується умова

$$D_3^{(m)}(x_1) = 0, \quad x_1 \in L, \quad m = 1, 2. \quad (10)$$

Скінченноелементне розв'язання граничних задач здійснювали в геометрично лінійній постановці за умови прикладання статичного навантаження.

Через відсутність у пакеті Abaqus можливості отримання силових (коєфіцієнтів інтенсивності напружень) або енергетичних (J -інтегралів) характеристик руйнування тріщини для п'єзоактивних матеріалів виникає необхідність постпроцесорної обробки даних для отримання параметрів руйнування. Визначення швидкостей вивільнення енергії G у вершинах

тріщини реалізували за допомогою інтегрального методу віртуального закриття тріщини, згідно з яким приріст потенціальної енергії при підростанні тріщини на величину δ дорівнює віртуальній роботі, яку створюють напруження і індукція на проміжку δ перед фронтом тріщини на переміщеннях і потенціалах на проміжку тієї ж довжини позаду тріщини при її закритті на довжину δ . Метод спершу було запропоновано для тріщин у п'єзопасивних матеріалах [21], а згодом поширено на п'єзоактивні матеріали [12–14].

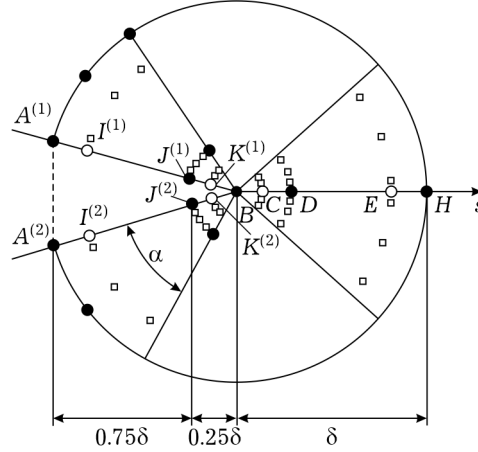


Рис. 2. Схема дискретизації околу вершини тріщини B .

Швидкість вивільнення енергії в околі вершини B тріщини (рис. 2) характеризується величиною [18–20]

$$G(B) = G^M(B) + G^E(B), \quad (11)$$

де $G^M(B)$, $G^E(B)$ – відповідно механічна та електрична складові швидкості вивільнення енергії в околі вершини тріщини B :

$$G^M(B) = -\frac{1}{2\delta} \int_0^\delta [\sigma_{13}(s)\Delta u_1(s-\delta) + \sigma_{33}(s)\Delta u_3(s-\delta)] ds, \quad (12)$$

$$G^E(B) = -\frac{1}{2\delta} \int_0^\delta [D_3(s)\Delta\varphi(s-\delta) - D_3^{(1)}(s-\delta)\varphi^{(1)}(s-\delta) + D_3^{(2)}(s-\delta)\varphi^{(2)}(s-\delta) - \Delta D_3(s-\delta)\varphi(s)] ds, \quad (13)$$

де

$$\Delta u_i(s) = u_i^{(1)}(s) - u_i^{(2)}(s), \quad i = 1, 3,$$

$$\Delta\varphi(s) = \varphi^{(1)}(s) - \varphi^{(2)}(s), \quad \Delta D_3(s) = D_3^{(1)}(s) - D_3^{(2)}(s).$$

У рамках запропонованої чисельної реалізації стрибки переміщень $\Delta u_i^{(m)}(s)$ і потенціалів $\Delta\varphi^{(m)}(s)$ на берегах тріщини апроксимуємо за допомогою методу найменших квадратів з використанням значень скінченноелементного розрахунку в вузлах $A^{(m)}$, $J^{(m)}$, B , $m = 1, 2$:

$$\Delta u_i(s) = \alpha_i^{\Delta u} s + \beta_i^{\Delta u} \sqrt{-s}, \quad i = 1, 3,$$

$$\Delta\varphi(s) = \alpha^{\Delta\varphi} s + \beta^{\Delta\varphi} \sqrt{-s}, \quad -\delta \leq s \leq 0. \quad (14)$$

Потенціали $\varphi(s)$ перед фронтом тріщини апроксимуємо у вигляді

$$\varphi(s) = \alpha^\varphi + \beta^\varphi s + \gamma^\varphi \sqrt{s}, \quad 0 \leq s \leq \delta, \quad (15)$$

з використанням значень у вузлах B , D , H . Напруження $\sigma_{i3}(s)$ та індукції $D_3(s)$ перед фронтом тріщини апроксимуємо у вигляді

$$\sigma_{i3}(s) = \alpha_i^\sigma + \beta_i^\sigma s + \gamma_i^\sigma \sqrt{s^{-1}}, \quad i = 1, 3,$$

$$D_3(s) = \alpha^D + \beta^D s + \gamma^D \sqrt{s^{-1}}, \quad 0 \leq s \leq \delta, \quad (16)$$

за даними в точках C , D , E , отриманими за допомогою усереднення відповідних даних, узятих з двох найближчих точок інтегрування – вузлів кубатурної формули Гаусса третього порядку (позначені на рис. 2 квадратами), оскільки у скінченноелементних розрахунках напруження та індукції обчислюються саме в цих точках. Індукції $D_3(s)$ на берегах тріщини апроксимуємо у вигляді, аналогічному до (16) (із заміною s на $-s$), за даними в точках $I^{(m)}$, $J^{(m)}$, $K^{(m)}$, $m = 1, 2$. Дані в цих точках отримуємо з найближчих точок інтегрування. Це не вносить значних похибок, оскільки відстані між вказаними точками та найближчими до них точками інтегрування, а також змінюваність даних у нормальному до берегів тріщини напрямку, є малими. Варто зауважити, що точки D , $I^{(m)}$, $J^{(m)}$, $m = 1, 2$, співпадають з вузлами відповідних скінченних елементів.

Внаслідок того, що на всіх скінченних елементах, які примикають до вершини тріщини, здійснюється стискання простору в радіальному напрямку, для відображення кореневих асимптотик електричного потенціалу та переміщень у вершині тріщини координати точок C , D , E дорівнюють відповідно $\frac{\delta}{4}(1 - \sqrt{3/5})^2$, $\frac{\delta}{4}$, $\frac{\delta}{4}(1 + \sqrt{3/5})^2$, а координати точок $I^{(m)}$, $J^{(m)}$, $K^{(m)}$, $m = 1, 2$, – відповідно $-\frac{\delta}{4}(1 + \sqrt{3/5})^2$, $-\frac{\delta}{4}$, $-\frac{\delta}{4}(1 - \sqrt{3/5})^2$.

Описану схему реалізовано у середовищі пакету Mathematica. Розв'язання тестових задач з відомими аналітичними розв'язками демонструє задовільну точність отриманих результатів. Похибки чисельних результатів у всіх розглянутих задачах не перевищували 0.5%.

3. Чисельні результати. Всі обчислення виконано для тріщини довжиною $2l = 0.02$ м. На рис. 3 наведено графіки залежності розкриття Δ електропроникної тріщини від параметрів σ_{33}^∞ і E_1^∞ для біматеріалу PZT-4/PZT-5Н. У цьому випадку величина розкриття тріщини залежить лише від механічної складової навантаження.

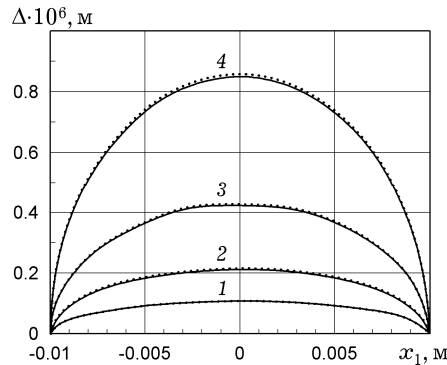


Рис. 3. Розкриття Δ електропроникної тріщини для біматеріалу PZT-4 / PZT-5Н при $E_1^\infty = -2 \cdot 10^5$ В/м (суцільні лінії) та $E_1^\infty = 0$ (крапки) для різних рівнів напружень σ_{33}^∞ : **1** – $\sigma_{33}^\infty = 0.25$ МПа; **2** – $\sigma_{33}^\infty = 0.5$ МПа; **3** – $\sigma_{33}^\infty = 1.0$ МПа; **4** – $\sigma_{33}^\infty = 2.0$ МПа.

З умови неперервності потенціалу та нормальної компоненти індукції на берегах електропроникної тріщини зі співвідношення (13) випливає, що $G^E = 0$.

У табл. 2 наведено дані для швидкостей вивільнення енергії у вершинах електропроникної тріщини для різних рівнів механічного навантаження біматеріалу.

Таблиця 2. Залежність швидкостей вивільнення енергії у вершинах A і B електропроникної тріщини від рівня механічного навантаження.

σ_{33}^∞ , МПа	0.25	0.5	1.0	2.0
$G(A), G(B)$, Н/м	0.02	0.08	0.33	1.35

На рис. 4 наведено графіки залежностей від параметрів σ_{33}^∞ і E_1^∞ розкриття Δ для випадку тріщини з ізолюваними берегами для біматеріалу PZT-4/PZT-5Н. Як випливає з аналізу кривих, наявність електричного поля E_1^∞ сприяє додатковому розкриттю тріщини. При $\sigma_{33}^\infty = 0$ розкриття тріщини практично відсутнє.

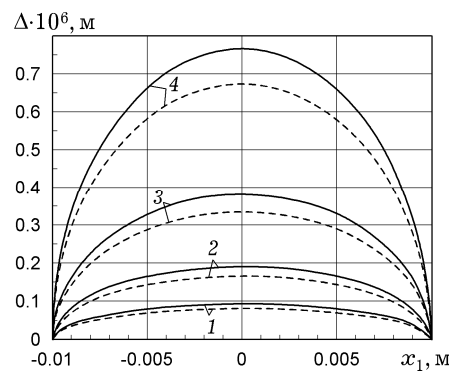


Рис. 4. Розкриття Δ електроізолюваної тріщини для біматеріалу PZT-4/PZT-5Н при $E_1^\infty = -2 \cdot 10^6$ В/м (суцільні лінії) та $E_1^\infty = 0$ (пунктирні лінії) для різних рівнів напружень σ_{33}^∞ : **1** — $\sigma_{33}^\infty = 0.25$ МПа; **2** — $\sigma_{33}^\infty = 0.5$ МПа; **3** — $\sigma_{33}^\infty = 1.0$ МПа; **4** — $\sigma_{33}^\infty = 2.0$ МПа.

У табл. 3 наведено дані для швидкостей вивільнення енергії у вершинах електроізолюваної тріщини при різних рівнях електромеханічного навантаження біматеріалу, округлені до 0.5% від загальної величини G . Внаслідок граничної умови (10) у співвідношенні (13) для G^E присутній лише перший член.

Таблиця 3. Залежність швидкостей вивільнення енергії у вершинах A і B електроізолюваної тріщини від рівнів електромеханічного навантаження.

E_1^∞ , В/м	σ_{33}^∞ , МПа	$G^M(A), G^M(B)$, Н/м	$G^E(A), G^E(B)$, Н/м
0	0.25	0.02	0.00
0	0.5	0.07	0.00
0	1.0	0.27	0.00
0	2.0	1.06	0.00
$-2 \cdot 10^6$	0.25	0.02	0.00
$-2 \cdot 10^6$	0.5	0.08	0.00
$-2 \cdot 10^6$	1.0	0.30	0.02
$-2 \cdot 10^6$	2.0	1.20	0.07

На рис. 5 подано графіки залежності розкриття Δ електропровідної тріщини від значень σ_{33}^∞ і E_1^∞ для біматеріалу PZT-4/PZT-5H. При цьому в граничній умові (8) прийнято, що $\varphi_0 = 0$. У цьому випадку, на відміну від розглянутих вище, існує контактна взаємодія між берегами тріщини внаслідок дії електричного поля. Довжини зон контакту, а також максимальні значення розкриття тріщини добре узгоджуються з точними значеннями, отриманими в роботі [16].

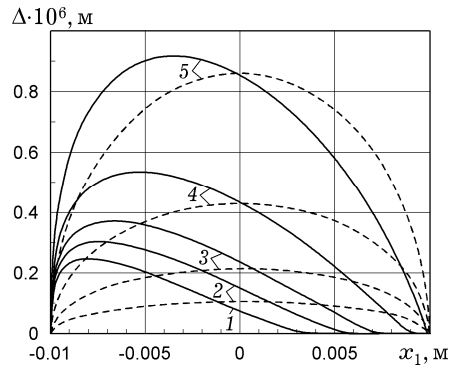


Рис. 5. Розкриття Δ електропровідної тріщини для біматеріалу PZT-4/PZT-5H при $E_1^\infty = -2 \cdot 10^6$ В/м (суцільні лінії) та $E_1^\infty = 0$ (штрихові лінії) для різних рівнів напруження σ_{33}^∞ : **1** — $\sigma_{33}^\infty = 0$ МПа, **2** — $\sigma_{33}^\infty = 0.25$ МПа, **3** — $\sigma_{33}^\infty = 0.5$ МПа, **4** — $\sigma_{33}^\infty = 1.0$ МПа, **5** — $\sigma_{33}^\infty = 2.0$ МПа.

Наведені результати демонструють істотний вплив електричного поля на характер деформування. Це зумовлено тим, що на берегах електродованої тріщини в паралельному до неї електричному полі індуються вільні заряди, наявність яких якісно змінює вид поля в околі тріщини (на електродованих берегах анулюється дотична компонента електричного поля). Окрім цього, через виникнення зсувних деформацій, викликаних п'єзоефектом, у цій зоні суттєво змінюється тип напружено-деформованого стану. Утворення зон контактної взаємодії між берегами електродованої тріщини обумовлено комбінацією двох факторів — наявністю електричного поля E_1^∞ і відмінністю електромеханічних властивостей п'єзоматеріалів, що складають біматеріал, внаслідок чого деформації берегів тріщини відрізняються одна від одної.

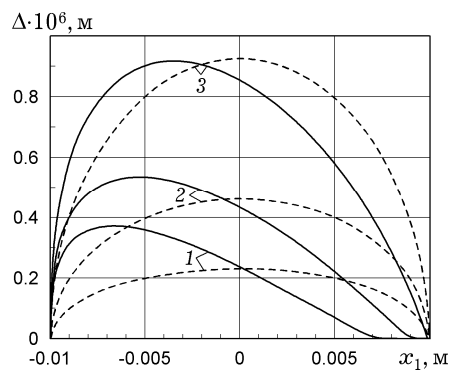


Рис. 6. Порівняння розкриття Δ електропровідної тріщини для біматеріалу PZT-4/PZT-5H при $E_1^\infty = -2 \cdot 10^6$ В/м (суцільні криві) та однорідного матеріалу PZT-4 (штрихові криві) при різних рівнях напруження σ_{33}^∞ : **1** — $\sigma_{33}^\infty = 0.5$ МПа; **2** — $\sigma_{33}^\infty = 1.0$ МПа; **3** — $\sigma_{33}^\infty = 2.0$ МПа.

На рис. 6 наведено порівняльні дані розкриття Δ для біматеріалу PZT-4/PZT-5Н та однорідного матеріалу PZT-4. Бачимо, що для однорідного матеріалу контактна взаємодія між берегами електропровідної тріщини відсутня.

Варто відмітити, що розкриття тріщини для біматеріалу при $E_1^\infty \neq 0$ відбувається навіть при відсутності механічного навантаження, у той час, як у випадку однорідного п'єзоматеріалу під дією одного тільки електричного поля розкриття тріщини не спостерігається – відбувається лише взаємне проковзування берегів тріщини. У цьому випадку при $E_1^\infty = -2 \cdot 10^6$ В/м для матеріалу PZT-4 маємо

$$G^M(A) = G^M(B) = 0.17 \text{ Н/м}, \quad G^E(A) = G^E(B) = 721.0 \text{ Н/м}.$$

У табл. 4 наведено дані для швидкостей вивільнення енергії у вершинах **A** і **B** електропровідної тріщини при різних рівнях електромеханічного навантаження біматеріалу.

Таблиця 4. Залежність швидкостей вивільнення енергії у вершинах **A** і **B** електропровідної тріщини від рівнів електромеханічного навантаження.

E_1^∞ , В/м	σ_{33}^∞ , МПа	$G^M(A)$, Н/м	$G^E(A)$, Н/м	$G^M(B)$, Н/м	$G^E(B)$, Н/м
0	0.25	0.02	0.0	0.02	0.0
0	0.5	0.08	0.0	0.08	0.0
0	1.0	0.33	0.0	0.33	0.0
0	2.0	1.34	0.0	1.34	0.0
$-2 \cdot 10^6$	0.0	6.35	1044.1	0.09	1050.1
$-2 \cdot 10^6$	0.25	7.16	1042.5	0.00	1051.2
$-2 \cdot 10^6$	0.5	8.05	1040.8	-0.10	1052.2
$-2 \cdot 10^6$	1.0	10.03	1037.4	-0.35	1054.5
$-2 \cdot 10^6$	2.0	14.61	1030.4	-1.09	1059.7

Наведені дані демонструють істотне зростання вкладу електричної складової у величину швидкості вивільнення енергії для електродованої тріщини при $E_1^\infty \neq 0$ порівняно з раніше розглянутими варіантами граничних умов. Також спостерігаємо істотну різницю між значеннями механічних складових швидкості вивільнення енергії у вершинах тріщини **A** і **B**. У випадку застосування критерію руйнування на основі врахування лише механічної складової швидкості вивільнення енергії G^M [19] при $E_1^\infty \neq 0$ менш небезпечною є вершина **B**, де відбувається змикання берегів тріщини ($G^M(B) < 0$, тобто спостерігаємо дефіцит потенціальної енергії, необхідної для підростання тріщини).

На рис. 7 подано графіки залежності розкриття Δ для тріщини, електродованої на частині $|x_1| \leq 0.5\ell$ верхнього берега та ізолюваної на решті частини границі, від значень σ_{33}^∞ і E_1^∞ для біматеріалу PZT-4/PZT-5Н. При цьому на електродованій частині прийнято, що $\phi^{(1)}(x_1) = 0$, $|x_1| \leq 0.5\ell$.

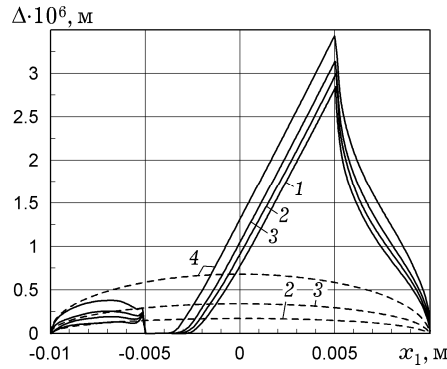


Рис. 7. Розкриття Δ частково електродованої тріщини для біматеріалу PZT-4/PZT-5H при $E_1^\infty = -2 \cdot 10^6$ В/м (суцільні лінії) та $E_1^\infty = 0$ (штрихові лінії) для різних рівнів напружень σ_{33}^∞ : **1** – $\sigma_{33}^\infty = 0$ МПа; **2** – $\sigma_{33}^\infty = 0.5$ МПа; **3** – $\sigma_{33}^\infty = 1.0$ МПа; **4** – $\sigma_{33}^\infty = 2.0$ МПа.

Аналіз переміщень засвідчує істотний вплив електричного поля E_1 на картину деформування. Під дією електричного поля електродована частина верхнього берега тріщини зберігає горизонтальне положення, тоді як решта тріщини внаслідок п'єзоефекту зазнає повороту. Через це утворюються дві зони розкриття тріщини і проміжна контактна зона, довжина якої зменшується зі збільшенням рівня механічного навантаження σ_{33}^∞ . На рис. 7 бачимо, що максимальне розкриття тріщини значно перевищує значення, що спостерігаються для раніше розглянутих граничних умов.

У табл. 5 наведено дані для швидкостей вивільнення енергії у вершинах частково електродованої тріщини при різних рівнях електромеханічного навантаження біматеріалу.

Таблиця 5. Залежність швидкостей вивільнення енергії у вершинах частково електродованої тріщини від рівнів електромеханічного навантаження.

E_1^∞ , В/м	σ_{33}^∞ , МПа	$G^M(A)$, Н/м	$G^E(A)$, Н/м	$G^M(B)$, Н/м	$G^E(B)$, Н/м
0	0.5	0.07	0.0	0.07	0.0
0	1.0	0.27	0.0	0.27	0.0
0	2.0	1.06	-0.02	1.06	0.0
$-2 \cdot 10^6$	0.0	1.00	-20.72	1.90	-33.08
$-2 \cdot 10^6$	0.5	1.25	-20.03	2.49	-34.51
$-2 \cdot 10^6$	1.0	1.55	-19.33	3.20	-35.96
$-2 \cdot 10^6$	2.0	2.34	-17.96	4.96	-38.87

Висновки. Побудовано скінченноелементну модель п'єзоелектричного біматеріалу з тріщиною на його інтерфейсі. Розроблено схеми скінченноелементної реалізації основних електростатичних граничних умов на берегах тріщини. Запропоновано модифікацію методу віртуального закриття тріщини для постпроцесорного обчислення швидкостей вивільнення енергії в вершинах тріщини.

Отримано чисельні розв'язки задач для деяких варіантів електростатичних умов: **1**) електропроникна тріщина, **2**) електроізолювана тріщина, **3**) електропровідна тріщина, **4**) частково електродована і частково електро-

ізолювана тріщина. Наведені результати показують, що тип електростатичних граничних умов на берегах тріщини суттєво впливає на напружено-деформований стан і параметри руйнування п'єзоелектричного біматеріалу з тріщиною. З'ясовано, що у випадках електропроникної або електроізолюваної тріщин під впливом електричного поля E_1^∞ відбувається безконтактне деформування з відсутністю асиметрії, характерної для електродованої тріщини. Ця асиметрія обумовлена комбінацією таких факторів, як наявність електричного поля і відмінність електромеханічних властивостей п'єзоматеріалів, що складають біматеріал. При $E_1^\infty \neq 0$ для електродованої тріщини спостерігаємо істотне зростання вкладу електричної складової у величину швидкості вивільнення енергії. У випадку частково електродованої тріщини характер деформування якісно відрізняється від випадків задання основних типів електростатичних граничних умов. Спостерігається утворення контактної зони в середній частині тріщини, а також значне зростання величини максимального розкриття тріщини.

1. *Адлуцький В. Я., Лобода В. В.* Скінченноелементний аналіз пружно-пластичного стану площини з еліптичним включенням при наявності міжфазної тріщини // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 1. – С. 65–74.
2. *Benkaci N., Maugin G.* J integral computation for piezo-ceramics // *Revue Européenne des Éléments Finis.* – 2001. – **10**, No. 1. – P. 99–128.
– <https://doi.org/10.1080/12506559.2001.11869241>.
3. *Beom H. G., Atluri S. N.* Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media // *Int. J. Fract.* – 2002. – **118**, No. 4. – P. 285–301.
– <https://doi.org/10.1023/A:1023381215338>.
4. *Cun-Fa Gao, Minghao Zhao, Pin Tong, Tong-Yi Zhang.* The energy release rate and the J-integral of an electrically insulated crack in a piezoelectric material // *Int. J. Eng. Sci.* – 2004. – **42**, Nos. 19–20. – P. 2175–2192.
– <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2004.08.007>.
5. *Fang D., Liu J.* Fracture mechanics of piezoelectric and ferroelectric solids. – Beijing: Tsinghua Univ. Press, and Berlin etc.: Springer, 2013. – xii+437 p.
6. *Fett T., Kamlah M., Munz D., Thun G.* Crack resistance and fracture toughness of PZT ceramics // *Proc. SPIE 4333, SPIE 4333, Smart Structures and Materials 2001: Active Materials: Behavior and Mechanics.* – 2001. – P. 221–230.
– <https://doi.org/10.1117/12.432760>.
7. *Gruebner O., Kamlah M., Munz D.* Finite element analysis of cracks in piezoelectric materials taking into account the permittivity of the crack medium // *Eng. Fract. Mech.* – 2003. – **70**, No. 11. – P. 1399–1413.
– [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00117-0](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00117-0).
8. *Herrmann K. P., Loboda V. V., Govorukha V. B.* On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric bimaterial // *Int. J. Fract.* – 2001. – **111**, No. 3. – P. 203–227.
– <https://doi.org/10.1023/A:1012269616735>.
9. *Kumar S., Singh R. N.* Crack propagation in piezoelectric materials under combined mechanical and electrical loadings // *Acta Materialia.* – 1996. – **44**, No. 1. – P. 173–200. – [https://doi.org/10.1016/1359-6454\(95\)00175-3](https://doi.org/10.1016/1359-6454(95)00175-3).
10. *Kumar S., Singh R. N.* Effect of the mechanical boundary condition at the crack surfaces on the stress distribution at the crack tip in piezoelectric materials // *Mater. Sci. Eng. A.* – 1998. – **252**, No. 1. – P. 64–77.
– [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(98\)00629-7](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(98)00629-7).
11. *Kumar S., Singh R. N.* Influence of applied electric field and mechanical boundary condition on the stress distribution at the crack tip in piezoelectric materials // *Mater. Sci. Eng. A.* – 1997. – **231**, Nos. 1–2. – P. 1–9.
– [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(97\)00038-5](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(97)00038-5).
12. *Kuna M.* Finite element analyses of crack problems in piezoelectric structures // *Comput. Mater. Sci.* – 1998. – **13**, Nos 1–3. – P. 67–80.
– [https://doi.org/10.1016/S0927-0256\(98\)00047-0](https://doi.org/10.1016/S0927-0256(98)00047-0).
13. *Kuna M.* Finite element analyses of cracks in piezoelectric structures // *Key Eng. Mater.* – 2007. – **348–349**. – P. 629–632.
– <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.348-349.629>.

14. Rao B. N., Kuna M. Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded piezoelectric materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – **45**, No. 20. – P. 5237–5257. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.05.020>.
15. Loboda V., Mahnken R. An investigation of an electrode at the interface of a piezoelectric bimaterial space under remote electromechanical loading // *Acta Mech.* – 2011. – **221**, Nos. 3-4. – P. 327–339. – <https://doi.org/10.1007/s00707-011-0519-6>.
16. Loboda V., Sheveleva A., Lapusta Y. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric bimaterial // *Int. J. Solids Struct.* – 2014. – **51**, No. 1. – P. 63–73. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.09.012>.
17. McMeeking R. M. The energy release rate for a Griffith crack in a piezoelectric material // *Eng. Fract. Mech.* – 2004. – **71**, Nos. 7-8. – P. 1149–1163. – [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00135-8](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00135-8).
18. Park S. B., Sun C. T. Effect of electric field on fracture of piezoelectric ceramics // *Int. J. Fract.* – 1993. – **70**, No. 3. – P. 203–216. – <https://doi.org/10.1007/BF00012935>.
19. Park S. B., Sun C. T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics // *J. Am. Ceramic Soc.* – 1995. – **78**, No. 6. – P. 1475–1480. – <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1995.tb08840.x>.
20. Parton V. Z., Kudryavtsev B. A. *Electromagnetoelasticity* / New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1988. – xix+503 p.
21. Rybicki E. F., Kanninen M. F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral // *Eng. Fract. Mech.* – 1977. – **9**, No. 4. – P. 931–938. – [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(77\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0013-7944(77)90013-3).
22. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *The finite element method for solid and structural mechanics.* – Vol. 2. – Oxford etc.: Elsevier, 2005. – 736 p.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF THE PARAMETERS OF FRACTURE IN A PIEZOELECTRIC BIMATERIAL WITH INTERFACE CRACK UNDER DIFFERENT TYPES OF BOUNDARY CONDITIONS ON ITS FACES

A finite element technique is used to study the stress-strain state of an interface crack in piezoelectric bimaterial polarized in the direction perpendicular to the crack. At infinity the electrical field parallel to the crack and stresses parallel to the polarization axis are assigned. The main variants of electrostatic boundary conditions at the crack faces are considered: electrical impermeability (insulation), electrical permeability, electrical conductivity, and also the variant of mixed boundary conditions – inner part of the upper crack face is electrically conducting while the rest of the crack is electrically insulated. Existence of the mechanical contact zones between faces of the crack is allowed. The problem is considered on the basis of plane strain formulation. Determination of the energy release rate is realized using the integral method of virtual closure of crack. It is shown that the type of boundary conditions has a significant influence on the fracture parameters.

Key words: piezoelectric bimaterial, interface crack, finite element method, integral method of virtual crack closure, fracture parameters.

Дніпровський нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро

Одержано
19.11.21