УДК 539.3

Р. М. Андрійчук[✉], Я. І. Кунець, В. В. Матус

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТОНКОГО П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ З ПРУЖНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ ЗА ОСЕСИМЕТРИЧНОГО КРУЧЕННЯ

Побудовано математичні моделі динамічної взаємодії тонкого п'єзокерамічного включення змінної товщини з пружним ізотропним середовищем за осесиметричного кручення композита. На межі поділу середовищ виконуються умови ідеального механічного контакту. Розглянуто електроізольоване та заземлене п'єзокерамічне включення. Моделювання здійснено за допомогою теорії сингулярних збурень.

Ключові слова: *асимптотичні моделі, пружна ізотропна матриця, тонке п'єзокерамічне включення, осесиметричне кручення, теорія сингулярних збурень.*

Вступ. Створення ефективних математичних моделей та аналітично-числових інструментаріїв для опису властивостей сучасних композитних матеріалів з метою вдосконалення технологій їх синтезу є важливою проблемою сьогодення. Тверді складноструктуровані композити і метаматеріали через унікальні механічні і фононні властивості відносяться до сучасних технологічно-інноваційних матеріалів, які широко використовуються у практиці як відповідальні внутрішні і покриваючі елементи інженерних конструкцій і систем. Визначальним тут є їх внесок у суттєве зміцнення і збереження легкості та гнучкості об'єктів, а у випадку хвильового проникнення – ще й роль хвильових бар'єрів, фільтрів і лінз.

На сьогодні в елементах конструкцій широке застосування мають матеріали, в яких наявна суттєва зв'язаність механічних та електричних полів. Ця взаємодія проявляється в п'єзокераміках, які традиційно використовують у випромінювачах і приймачах звуку, в гідроакустиці, елементах запалювання, п'єзотрансформаторах, вимірювальних приладах тощо [2, 9, 12, 15, 19]. Широке використання у процесі створення перетворювачів енергії і датчиків для вимірювальних приладів п'єзоелектричних крихких матеріалів стимулює інтерес до вивчення та аналізу розподілу напружень і концентрації силових та електричних полів у п'єзоелектричних тілах з дефектами типу порожнини, включень, тріщин.

Однак при розв'язанні задачі електропружності виникають серйозні математичні труднощі порівняно з пружними задачами, оскільки основна система рівнянь електропружності є зв'язаною стосовно силових і електричних полів системою диференціальних рівнянь із частинними похідними, розв'язок якої отримати набагато важче, ніж розв'язок чисто пружної задачі. Здебільшого їх долають вводячи деякі додаткові припущення (гіпотези) фізичного або математичного характеру, що приводить до зниження розмірності розрахункової задачі шляхом врахування тонкості хвильового розсіювача [1, 10, 16, 18]. У зв'язку з цим спостерігається велика різноманітність моделей включень, які запропоновані для неоднорідностей з різними матеріальними властивостями – розглядались окремо включення низької або великої жорсткості, створювались моделі, які охоплюють широкий діапазон властивостей дефекту (аналогічна ситуація спостерігається при розгляді задач теплопровідності та термопружності, електромагнетизму).

Оскільки згаданий підхід базується на додаткових припущеннях, отримані моделі адекватно описують взаємодію тонкої неоднорідності із прилеглим пружним середовищем лише у вузькому діапазоні зміни відношень їх фізичних параметрів. Застосування теорії сингулярних збурень усуває цей недолік. Згідно з нею розв'язки задач подають у вигляді асимптотичних

✉ andriychukroman@gmail.com

(зовнішніх) розкладів із подальшим додатковим їх вивченням (побудовою примежових шарів, внутрішніх асимптотичних розкладів) в областях швидкої зміни розглядуваних процесів. Основні положення підходу та огляд наукових праць з цієї проблематики викладено у працях [3, 4, 6, 13, 14, 17].

У статті [5] запропоновано метод розв'язання статичної задачі про осесиметричне кручення пружного середовища з тонким пружним включенням. Згідно з ним асимптотичні розв'язки задачі шукають за різних співвідношень між пружними параметрами складових композита. Нижче за цією методикою отримано асимптотично точні ефективні умови динамічної взаємодії тонкого дискового п'єзокерамічного включення змінної товщини із пружною матрицею. За подібних припущень досліджено випадок поздовжнього зсуву композита [7].

1. Формулювання задачі. Нехай у пружному необмеженому ізотропному середовищі за умов осесиметричного кручення і динамічних навантажень знаходиться тонке дискове п'єзокерамічне включення змінної товщини, яке займає область $W_\varepsilon = \{(r,z) : 0 \le r \le a,\ \varepsilon f_2(r) \le z \le \varepsilon f_1(r)\}$, де $Or\theta z$ – циліндрична система координат; a і $h(r)$ – радіус і товщина включення, де $h(r) = \varepsilon g(r) = \varepsilon[f_1(r) - f_2(r)]$, ε – малий параметр, що характеризує відносну товщину включення.

Рівняння руху для *матриці* в циліндричній системі координат запишемо у вигляді [2, 9]

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \omega^2 \rho u_\theta = 0, \qquad (r,z) \in \mathbb{R}^2 \backslash W_\varepsilon ,$$

де $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ – компоненти тензора напружень у матриці, u_θ – відмінна від нуля компонента вектора зміщень, ω – циклічна частота коливань композита, ρ – густина матеріалу матриці.

Закон Гука для матеріалу матриці у циліндричній системі координат такий:

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right), \qquad \sigma_{\theta z} = \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} ,$$

де μ – модуль зсуву матриці.

Рівняння руху для матриці в переміщеннях

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + k^2\right) u_\theta = 0, \qquad k = \omega / c, \qquad c = \sqrt{\mu/\rho} , \tag{1}$$

де k – хвильове число поперечних хвиль у матриці, c – їх швидкість.

Повні поля зміщень $u_\theta(r,z)$ і напружень $\sigma_{r\theta}(r,z)$, $\sigma_{\theta z}(r,z)$ у матриці подамо у вигляді

$$u_\theta(r,z) = u_\theta^{\mathrm{sc}}(r,z) + u_\theta^{\mathrm{in}}(r,z), \qquad \sigma_{r\theta}(r,z) = \sigma_{r\theta}^{\mathrm{sc}}(r,z) + \sigma_{r\theta}^{\mathrm{in}}(r,z) ,$$

$$\sigma_{\theta z}(r,z) = \sigma_{\theta z}^{\mathrm{sc}}(r,z) + \sigma_{\theta z}^{\mathrm{in}}(r,z), \qquad (r,z) \in \mathbb{R}^2 \backslash W_\varepsilon , \tag{2}$$

де $u_\theta^{\mathrm{sc}}(r,z)$, $\sigma_{r\theta}^{\mathrm{sc}}(r,z)$, $\sigma_{\theta z}^{\mathrm{sc}}(r,z)$ – розсіяні неоднорідністю поля зміщень і напружень у матриці, $u_\theta^{\mathrm{in}}(r,z)$, $\sigma_{r\theta}^{\mathrm{in}}(r,z)$, $\sigma_{\theta z}^{\mathrm{in}}(r,z)$ – зміщення і напруження, що характеризують прикладене відоме навантаження. Для $u_\theta^{\mathrm{sc}}(r,z)$ виконуються умови випромінювання [9].

Рівняння руху для матеріалу *включення* у циліндричній системі координат і рівняння Максвелла запишемо так [2, 9]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^0}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta}^0 + k_0^2 u_\theta^0 = 0, \qquad (r,z) \in W_\varepsilon, \qquad k_0 = \omega / c_0 ,$$

$$c_0 = \sqrt{c_{44}(1+\eta^2)/\rho_0}, \qquad \eta = e_{15}^2 / (c_{44}\,\varepsilon_{11}) , \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}^0 = \frac{\partial D_r^0}{\partial r} + \frac{D_r^0}{r} + \frac{\partial D_z^0}{\partial z} = 0\,, \tag{4}$$

де $\sigma_{r\theta}^0$, $\sigma_{\theta z}^0$ – компоненти тензора напружень у включенні, u_θ^0 – відмінна від нуля компонента вектора зміщень; D_r^0 та D_z^0 – компоненти вектора індукції електричного поля $\mathbf{D}^0$; k_0 – хвильове число поперечних хвиль у включенні, c_0 – їх швидкість; ρ_0 – густина матеріалу включення; η – коефіцієнт електромеханічного зв'язку; c_{44}, e_{15} – пружна та п'єзоелектрична сталі матеріалу включення, а ε_{11} – його діелектрична проникність.

Співвідношення для матеріалу включення мають вигляд

$$\sigma_{r\theta}^0 = c_{44}\left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial r} - \frac{u_\theta^0}{r} + \eta^2\frac{\partial \varphi_p^0}{\partial r}\right), \qquad \sigma_{\theta z}^0 = c_{44}\left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial z} + \eta^2\frac{\partial \varphi_p^0}{\partial z}\right),$$

$$D_r^0 = e_{15}\left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial r} - \frac{u_\theta^0}{r} - \frac{\partial \varphi_p^0}{\partial r}\right), \qquad D_z^0 = e_{15}\left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_p^0}{\partial z}\right), \tag{5}$$

$$\varphi_p^0(r,z) = \varepsilon_{11}\varphi^0(r,z)/e_{15}\,, \tag{6}$$

де $\varphi^0(r,z)$ – електричний потенціал включення.

Враховуючи вирази (3)–(6), отримаємо систему двох рівнянь для переміщення u_θ^0 та потенціалу φ_p^0:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)u_\theta^0 + \eta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_p^0 +$$

$$+ k_0^2(1+\eta^2)u_\theta^0 = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\right)u_\theta^0 - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_p^0 = 0, \qquad (r,z) \in W_\varepsilon\,. \tag{7}$$

Систему (7) також можна подати у такому вигляді:

$$(1+\eta^2)Lu_\theta^0 - \frac{u_\theta^0}{r^2} - \eta^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u_\theta^0 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\varphi_1^0 + \chi^2 u_\theta^0 = 0, \qquad (r,z) \in W_\varepsilon\,,$$

$$(1+\eta^2)L\varphi_1^0 - \eta^2\frac{u_\theta^0}{r^2} + \eta^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u_\theta^0 + \eta^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\varphi_1^0 + \eta^2\chi^2 u_\theta^0 = 0\,. \tag{8}$$

Тут $\chi^2 = \dfrac{\rho_0\omega^2}{c_{44}}$, $\varphi_1^0 = \dfrac{e_{15}}{c_{44}}\varphi_p^0$, $L \equiv\!: \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

На межі поділу середовищ виконуються умови ідеального механічного контакту. Зокрема, на лицьових поверхнях включення маємо

$$u_\theta(r,\pm h) = u_\theta^0(r,\pm h), \qquad \sigma_n(r,\pm h) = \sigma_n^0(r,\pm h)\,, \tag{9}$$

де $\sigma_n = \sigma_{\theta z}n_z + \sigma_{\theta r}n_r$, $\sigma_n^0 = \sigma_{\theta z}^0 n_z + \sigma_{\theta r}^0 n_r$, $n_z \approx \pm 1$, $n_r \approx 2\varepsilon g'(r)$.

Для *електроізольованого включення* на лицьовій поверхні виконується така умова:

$$D_n^0(r,\pm h) = 0\,, \tag{10}$$

де $D_n^0 = D_z n_z + D_r n_r$.

Для *заземленого включення* маємо умову

$$\varphi^0(r, \pm h) = 0. \tag{11}$$

Крім цього, вважаємо, що хвильові товщини включення є малими:

$$kh \ll 1, \qquad k_0 h \ll 1.$$

2. Моделювання динамічної взаємодії середовища з п'єзокерамічним включенням. Оскільки відносна товщина включення є малою, для отримання наближених розв'язків задачі використаємо методи теорії сингулярних збурень [5, 8]. Подамо шукані величини у вигляді асимптотичних розкладів за степенями ε:

$$u_\theta^{\text{sc}}(r,z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{\theta j}^{\text{sc}}(r,z)\varepsilon^j, \qquad u_\theta^0(r,z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{\theta j}^0(r,\overline{z})\varepsilon^j, \qquad (r,z) \in \mathbb{R}^2 \backslash W_\varepsilon,$$

$$\varphi_p^0(r,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{pj}^0(r,\overline{z})\varepsilon^j, \qquad \overline{z} = \frac{z}{\varepsilon}, \qquad (r,z) \in W_\varepsilon. \tag{12}$$

Характер асимптотик (12) визначає співвідношення між параметром контрастності жорсткостей складників електропружної системи $\gamma = c_{44}/\mu$ та ε [5, 7]. Тому розглянемо три різні діапазони зміни величини γ:

$$\mathbf{1^\circ}.\ \varepsilon \le \gamma \le 1/\varepsilon; \qquad \mathbf{2^\circ}.\ 0 \le \gamma \le \varepsilon; \qquad \mathbf{3^\circ}.\ 1/\varepsilon \le \gamma < \infty. \tag{13}$$

Діапазон ***1°*** відповідає випадку, коли механічні властивості матеріалів матриці та включення неістотно відрізняються порівняно з параметром ε, тобто *діапазон* ***1°*** відповідає неконтрастним неоднорідностям. *Діапазон* ***2°*** описує випадок, коли жорсткість включення є набагато меншою, ніж жорсткість навколишнього середовища, порівняно з ε. *Діапазон* ***3°*** описує випадок включення великої жорсткості.

Підставляючи розклади (12) у співвідношення (2), (8)–(11) та розщеплюючи вирази за степенями ε, у кожному із діапазонів (13) з точністю до головних членів отримаємо ефективні умови спряження складових композита, записані на серединній поверхні включення.

Для *електроізольованого п'єзокерамічного включення* маємо

– *діапазон* ***1°***:

$$\left[u_\theta^{\text{sc}}\right]_-^+ \approx \varepsilon \frac{1-\gamma_*}{\gamma_*} g(r) \frac{\partial u^{\text{in}}(r,z)}{\partial z},$$

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{\text{sc}}}{\partial z}\right]_-^+ \approx \varepsilon(1-\gamma_*) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 g(r) \frac{\partial}{\partial r} \frac{u^{\text{in}}(r,z)}{r}\right) +$$

$$+ \varepsilon\left(k^2 - 2\gamma_* k_0^2\right) g(r) u^{\text{in}}(r,z), \qquad 0 \le r \le a, \qquad z = 0; \tag{14}$$

– *діапазон* ***2°***:

$$\left[u_\theta^{\text{sc}}\right]_-^+ \approx \frac{h(r)}{\gamma_*} \frac{\partial}{\partial z}\left[u_\theta^{\text{sc}}(r,z) + u^{\text{in}}(r,z)\right],$$

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{\text{sc}}}{\partial z}\right]_-^+ \approx 0, \qquad 0 \le r \le a, \qquad z = 0; \tag{15}$$

– *діапазон* ***3°***:

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{\text{sc}}}{\partial z}\right]_-^+ \approx -\gamma_* \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} h(r) r^2 \left(-\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right) + h(r) k_0^2\right]\left[u_\theta^{\text{sc}}(r,z) + u^{\text{in}}(r,z)\right],$$

$$\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}\right]_-^+ \approx 0, \qquad 0 \le r \le a, \qquad z = 0\,. \tag{16}$$

Тут і надалі $\gamma_* = \gamma(1+\eta^2)$, $[f]_-^+ = f(x_1,+0) - f(x_1,-0)$.

Для *заземленого п'єзокерамічного* включення маємо

– *діапазон* ***1°*:**

$$\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}\right]_-^+ \approx \varepsilon\,\frac{1-\gamma}{\gamma}\,g(r)\,\frac{\partial u^{\mathrm{in}}(r,z)}{\partial z}\,,$$

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{\mathrm{sc}}}{\partial z}\right]_-^+ \approx \varepsilon(1-\gamma)\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 g(r)\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{u^{\mathrm{in}}(r,z)}{r}\right) +$$

$$+\,\varepsilon\left(k^2 - 2\gamma_* k_0^2\right) g(r) u^{\mathrm{in}}(r,z), \qquad 0 \le r \le a, \quad z = 0\,; \tag{17}$$

– *діапазон* ***2°*:**

$$\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}\right]_-^+ \approx \frac{h(r)}{\gamma}\,\frac{\partial}{\partial z}\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}(r,z) + u^{\mathrm{in}}(r,z)\right],$$

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{\mathrm{sc}}}{\partial z}\right]_-^+ \approx 0, \qquad 0 \le r \le a, \qquad z = 0\,; \tag{18}$$

– *діапазон* ***3°*:**

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{\mathrm{sc}}}{\partial z}\right]_-^+ \approx -\left[\frac{\gamma}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,h(r) r^2\left(-\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right) + \gamma_* h(r) k_0^2\right]\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}(r,z) + u^{\mathrm{in}}(r,z)\right],$$

$$\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}\right]_-^+ \approx 0, \qquad 0 \le r \le a, \qquad z = 0\,. \tag{19}$$

З виразів (14)–(19) легко отримати математичні *моделі динамічної взаємодії* тонкого дискового п'єзокерамічного включення сталої товщини із пружною матрицею [11]:

– *діапазон* ***1°*:**

$$\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}\right]_-^+ \approx h\frac{1-\gamma_*}{\gamma_*}\,\frac{\partial u^{\mathrm{in}}(r,z)}{\partial z}\,,$$

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{\mathrm{sc}}}{\partial z}\right]_-^+ \approx h(1-\gamma_*)\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{u^{\mathrm{in}}(r,z)}{r}\right) +$$

$$+\,h\left(k^2 - 2\gamma_* k_0^2\right) u^{\mathrm{in}}(r,z), \qquad 0 \le r \le a, \qquad z = 0\,;$$

– *діапазон* ***2°*:**

$$\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}\right]_-^+ \approx \frac{h}{\gamma_*}\,\frac{\partial}{\partial z}\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}(r,z) + u^{\mathrm{in}}(r,z)\right],$$

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{\mathrm{sc}}}{\partial z}\right]_-^+ \approx 0, \qquad 0 \le r \le a, \qquad z = 0\,;$$

– *діапазон* ***3°*:**

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{\mathrm{sc}}}{\partial z}\right]_-^+ \approx -\gamma_* h\left[\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r^2\left(-\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right) + k_0^2\right]\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}(r,z) + u^{\mathrm{in}}(r,z)\right],$$

$$\left[u_\theta^{\mathrm{sc}}\right]_-^+ \approx 0, \qquad 0 \le r \le a, \qquad z = 0\,.$$

У випадку *заземленого п'єзокерамічного включення* маємо

– *діапазон* **1°:**

$$\left[u_\theta^{sc}\right]_-^+ \approx h\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{\partial u^{in}(r,z)}{\partial z},$$

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{sc}}{\partial z}\right]_-^+ \approx h(1-\gamma)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial}{\partial r}\frac{u^{in}(r,z)}{r}\right)+$$

$$+h\left(k^2-2\gamma_* k_0^2\right)u^{in}(r,z), \qquad 0 \le r \le a, \qquad z=0;$$

– *діапазон* **2°:**

$$\left[u_\theta^{sc}\right]_-^+ \approx \frac{h}{\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left[u_\theta^{sc}(r,z)+u^{in}(r,z)\right],$$

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{sc}}{\partial z}\right]_-^+ \approx 0, \qquad 0 \le r \le a, \qquad z=0;$$

– *діапазон* **3°:**

$$\left[\frac{\partial u_\theta^{sc}}{\partial z}\right]_-^+ \approx -h\left[\frac{\gamma}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\left(-\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right)+\gamma_* k_0^2\right]\left[u_\theta^{sc}(r,z)+u^{in}(r,z)\right],$$

$$\left[u_\theta^{sc}\right]_-^+ \approx 0, \qquad 0 \le r \le a, \qquad z=0.$$

Співвідношення (14)–(19) з точністю до головних членів розкладів (12) визначають розв'язок поставленої задачі всюди, за винятком деяких малих околів кінців включення, де виникають примежові шари. У цих околах розв'язок задачі шукаємо у вигляді примежових поправок, алгоритм побудови яких подано в працях [3–5, 13].

Висновки. За допомогою теорії сингулярних збурень побудовано математичні моделі динамічної взаємодії тонкого п'єзокерамічного включення змінної товщини з пружним середовищем за осесиметричного кручення композита. Розглянуто ідеальний механічний контакт між компонентами композита та різні граничні електричні умови на поверхні включення. Моделювання здійснено з використанням теорії сингулярних збурень. Застосування отриманих моделей тонкого включення спрощує постановку задач розсіяння і дає можливість визначити розв'язки рівняння руху (1) для матриці за відповідних ефективних умов (14)–(19), записаних на серединній поверхні неоднорідності. Запропонований підхід можна використати для дослідження дифракційних полів у пружних композитах із множинними тонкими п'єзокерамічними включеннями.

1. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
2. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.
3. *Кит Г. С., Кунец Я. И., Михаськив В. В.* Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости в упругом теле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 82–89.

   Те саме: *Kit H. S., Kunets Ya. I., Mykhas'kiv V. V.* Interaction of a stationary wave with a thin low stiffness pennyshaped inclusion in an elastic body // Mech. Solids. – 2004. – **39**, No. 5. – P. 64–70.
4. *Кіт Г. С., Ємець В. Ф., Кунець Я. І.* Модель пружно-динамічної взаємодії тонкостінного включення з матрицею в умовах антиплоского зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 54–61.

Те саме: *Kit G. S., Emets' V. F., Kunets' Ya. I.* A model of the elastodynamic interaction of a thin-walled inclusion with a matrix under antiplanar shear // J. Math. Sci. – 1999. – **97**, No. 1. – P. 3810–3816.
– https://doi.org/10.1007/BF02364919.

5. *Кунец Я. И.* Осесимметричное кручение упругого пространства с тонким упругим включением // Прикл. математика и механика. – 1987. – **51**, № 4. – С. 638–645.
Те саме: *Kunets Ya. I.* Axisymmetric torsion of an elastic space with a thin elastic inclusion // J. App. Math. Mech. – 1987. – **51,** No. 4. – P. 497–503.
– https://doi.org/10.1016/0021-8928(87)90090-6.
6. *Кунецъ Я. І., Матус В. В.* Асимптотичний підхід у динамічних задачах теорії пружності для тіл з тонкими пружними включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63,** № 1. – С. 75–93.
7. *Кунецъ Я. І., Рабош Р. В.* Поздовжній зсув пружного середовища з тонким прямолінійним гострокінцевим п'єзоелектричним включенням низької жорсткості // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 3. – С. 141–147.
Те саме: *Kunets' Ya. I., Rabosh R. V.* Longitudinal shear of an elastic medium with a thin rectilinear sharp-pointed piezoelectric inclusion of low rigidity // J. Math. Sci. – 2012. – **180**, No. 2. – P. 153–160.
– https://doi.org/10.1007/s10958-011-0637-7.
8. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. – Ленинград: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1983. – 117 с.
9. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 472 с.
10. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослі.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
11. *Andriychuk R. M., Kunets Ya. I.* Mathematical modeling of the dynamic interaction of slim piezoceramic inclusion with elastic matrix at axisymmetric torsion // Proc. of 26th Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2021), September 8–10, 2021, Tbilisi. – Tbilisi, 2021. – P. 249–252.
– https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552307.
12. *Chen W. Q., Lim C. W.* 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // Int. J. Fract. – 2005. – **131,** No. 3. – P. 231–246.
– https://doi.org/10.1007/s10704-004-4195-6.
13. *Emets V. F., Kunets Ya. I., Matus V. V.* Scattering of SH waves by an elastic thin-walled rigidly supported inclusion // Arch. Appl. Mech. – 2004. – **73**, No. 11-12. – P. 769–780. – https://doi.org/10.1007/s00419-004-0323-z.
14. *Kanaun S. K., Levin V. M.* Self-consistent methods for composites. – Vol. 2. Wave propagation in heterogeneous materials. – Heidelberg: Springer, 2008. – 302 p.
– https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6968-0.
15. *Nasedkin A. V., Nasedkina A. A., Nassar M. E., Rybyanets A. N.* Effective properties of piezoceramics with metal inclusions: numerical analysis // Ferroelectrics. – 2021. – **575**, No. 1. – P. 84–91.
– https://doi.org/10.1080/00150193.2021.1888230.
16. *Pasternak Ia.* Doubly periodic arrays of cracks and thin inhomogeneities in an infinite magnetoelectroelastic medium // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2012. – **36**, No. 5. – P. 799–811.
– https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2011.12.004.
17. *Sánchez-Palencia E.* Non-homogeneous media and vibration theory. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1980. – 400 p.
– https://doi.org/10.1007/3-540-10000-8.
18. *Zhang B., Boström A., Niklasson A. J.* Antiplane shear waves from a piezoelectric strip actuator: exact versus effective boundary condition solutions // Smart Mater. Struct. – 2004 – **13**, No. 1. – P. 161–168.
– https://doi.org/10.1088/0964-1726/13/1/018.
19. *Zhuoye C., Donghua W., Wei L., Kong D.* Torsional wave propagation in a piezoelectric radial phononic crystals // Noise Control Eng. J. – 2016. – **64,** No. 1. – P. 75–84.
– https://doi.org/10.3397/1/376361.

MATHEMATICAL MODELING OF THE DYNAMIC INTERACTION OF THIN PIEZOCERAMIC INCLUSION OF VARIABLE THICKNESS WITH ELASTIC MEDIUM UNDER AXISYMMETRIC TORSION

A mathematical models of dynamic interaction of a thin piezoceramic inclusion of variable thickness with isotropic elastic medium under axisymmetric torsion of a composite are constructed. Conditions of the perfect mechanical contact on the interface of components are satisfied. Cases of electrically insulated and grounded piezoceramic inclusions are considered. Modeling is performed using the theory of singular perturbations.

***Keywords**: asymptotic models, elastic medium, thin piezoceramic inclusion, axisymmetric torsion, theory of singular perturbations.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.03.22